第54卷第1期 大连理工大学学报 Vol.54, No.1
2014年1月 Journal of Dalian University of Technology Jan. 2014

文章编号：1000-8608(2014)01-0152-05

按 Laplace 谱半径对一些偶单圈图的排序

张海霞*[1,2]

（1. 大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024；
2. 太原科技大学 数学系，山西 太原 030024）

摘要：研究一些偶单圈图按其 Laplace 谱半径排序的问题. 利用扩圈变换对偶单圈图 S_k^1 的 Laplace 谱半径影响的证明方法，得出了顶点数为 $k+2$，圈长为 $k(k\geqslant 10)$ 的偶单圈图 $C(k+2,k)$ 按其 Laplace 谱半径从大到小的顺序依次排在前三位和最后一位的单圈图.

关键词：单圈图；最大 Laplace 特征值；排序

中图分类号：O157.5　**文献标识码**：A　**doi**：10.7511/dllgxb201401023

0 引言

设 G 是 n 阶连通简单图，其顶点集为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，边集为 $E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. G 的阶数是指 G 的顶点个数. G 的 Laplace 矩阵定义为 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$，其中 $\boldsymbol{A}(G)$ 和 $\boldsymbol{D}(G)$ 分别为 G 的邻接矩阵和度对角矩阵. G 的 Laplace 特征多项式为 $\Phi(G)=\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(G))$，它的根称为 G 的 Laplace 特征值. 既然 $\boldsymbol{L}(G)$ 是半正定的实对称矩阵，其所有的特征值都是实数，不妨记为 $\mu_1(G)\geqslant\cdots\geqslant\mu_n(G)=0$，其中 $\mu_1(G)$ 也称为 G 的 Laplace 谱半径.

图的 Laplace 特征值的研究是非常活跃的研究课题，已经有许多结果[1-5]，它的研究不仅对图论本身有意义，而且对其他学科，例如物理、化学、生物也有非常重大的意义，因而越来越受到人们的关注[4-7].

单圈图是边数等于顶点数的简单连通图，它可以看成是树在不相邻的两个顶点间连一条边得到的. 如果单圈图的圈长为偶数，也称单圈图为偶单圈图. 单圈图的邻接谱和 Laplace 谱的研究已有许多[8-9]. 而对于阶数和圈长固定的单圈图的 Laplace 谱半径的最小值问题仍未考虑. 这里先考虑一些特殊的偶单圈图的 Laplace 谱半径的最小值问题.

记 C_k 是有 k 个顶点的圈，$C_k^2(i,j,a)$ 是在圈 C_k 的顶点 u、v 上分别接出 i 条和 j 条悬挂边后得到的单圈图，C_k 按逆时针方向来看，设 u、v 之间的顶点数（不含 u、v）为 a，其中 $i,j\geqslant 1$，$1\leqslant a\leqslant[(k-2)/2]$. 其他记号可参考文献[10].

1 用到的引理

引理 1[11]　记 $\boldsymbol{D}_n$ 是 n 阶矩阵，它是从路 P_{n+2} 对应的 $\boldsymbol{L}(P_{n+2})$ $(n\geqslant 1)$ 中删掉两个悬挂点所对应的行和列后得到的矩阵，其特征多项式记为 $\Phi(\boldsymbol{D}_n)$，规定 $\Phi(\boldsymbol{D}_0)=1$，$\Phi(\boldsymbol{D}_{-n})=0$. 则

(1) $x\Phi(\boldsymbol{D}_{n-1})=\Phi(P_n)$；

(2) $\Phi(\boldsymbol{D}_{n+1})=(x-2)\Phi(\boldsymbol{D}_n)-\Phi(\boldsymbol{D}_{n-1})$；

(3) $\Phi(\boldsymbol{D}_{m+1})\Phi(\boldsymbol{D}_n)-\Phi(\boldsymbol{D}_m)\Phi(\boldsymbol{D}_{n+1})=\Phi(\boldsymbol{D}_m)\Phi(\boldsymbol{D}_{n-1})-\Phi(\boldsymbol{D}_{m-1})\Phi(\boldsymbol{D}_n)$；

(4) $\Phi(\boldsymbol{C}_n)=\Phi(\boldsymbol{D}_n)-\Phi(\boldsymbol{D}_{n-2})+2(-1)^{n+1}$.

从引理 1(1) 可知，$\boldsymbol{D}_n$ 的特征值是 $2+2\cos\dfrac{i\pi}{n+1}(1\leqslant i\leqslant n)$，全部小于 4，此外 $\Phi(\boldsymbol{D}_n)$ 还有一些其他的性质.

引理 2　给定 n 阶矩阵 $\boldsymbol{D}_n(n\geqslant 1)$，则

收稿日期：2012-11-23；　**修回日期**：2013-09-21.
基金项目：山西省自然科学基金资助项目(2012011019-2)；太原科技大学校青年基金资助项目(20113022).
作者简介：张海霞*(1979-)，女，博士生，讲师，E-mail：zhx049@163.com.

$\Phi^2(\boldsymbol{D}_n)=\Phi(\boldsymbol{D}_{n+1})\Phi(\boldsymbol{D}_{n-1})+1.$

证明 由引理1(2)可知，

$$\begin{pmatrix}\Phi(\boldsymbol{D}_{n+1}) & \Phi(\boldsymbol{D}_n)\\ \Phi(\boldsymbol{D}_n) & \Phi(\boldsymbol{D}_{n-1})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\Phi(\boldsymbol{D}_n) & \Phi(\boldsymbol{D}_{n-1})\\ \Phi(\boldsymbol{D}_{n-1}) & \Phi(\boldsymbol{D}_{n-2})\end{pmatrix}$$

两边取行列式可得

$$\Phi^2(\boldsymbol{D}_n)-\Phi(\boldsymbol{D}_{n+1})\Phi(\boldsymbol{D}_{n-1})=\Phi^2(\boldsymbol{D}_{n-1})-\Phi(\boldsymbol{D}_n)\Phi(\boldsymbol{D}_{n-2})=\cdots=\Phi^2(\boldsymbol{D}_1)-\Phi(\boldsymbol{D}_2)\Phi(\boldsymbol{D}_0)=1$$

引理3 给定n阶矩阵$\boldsymbol{D}_n(n\geqslant 1)$，则当$x\geqslant 4$时，$\Phi(\boldsymbol{D}_n)>\Phi(\boldsymbol{D}_{n-1})$.

证明 利用数学归纳法：

当$k=1$时，$\Phi(\boldsymbol{D}_1)=x-2$，$\Phi(\boldsymbol{D}_0)=1$，故当$x\geqslant 4$时，$\Phi(\boldsymbol{D}_1)>\Phi(\boldsymbol{D}_0)$.

假设当$k\leqslant n$时，$\Phi(\boldsymbol{D}_k)>\Phi(\boldsymbol{D}_{k-1})$.

当$k=n+1$时，由引理1(2)及假设知，

$$\Phi(\boldsymbol{D}_{n+1})-\Phi(\boldsymbol{D}_n)=(x-3)\Phi(\boldsymbol{D}_n)-\Phi(\boldsymbol{D}_{n-1})>(x-4)\Phi(\boldsymbol{D}_{n-1})\geqslant 0$$

故结论成立.

下面给出单圈图的一些变换性质.

引理4 当k为偶数时，$\mu_1(S^1_{k+2})<\mu_1(S^1_k)$.

引理4中从S^1_k到S^1_{k+2}的变换称为扩圈变换. 此结论从文献[12]中也可得到，但是在后面证明定理需要用到下面给出的证明，因而这里给出了它的新的证明方法.

证明 不妨用k表示任意的大于3的正整数，由引理1(4)及文献[10]中引理1知，

$$\begin{aligned}\Phi(S^1_k)-\Phi(S^1_{k+2})&=(x-1)[\Phi(C_k)-\Phi(C_{k+2})]+x[\Phi(\boldsymbol{D}_{k+1})-\Phi(\boldsymbol{D}_{k-1})]=\\&-x[(x^2-6x+6)\Phi(\boldsymbol{D}_k)+2\Phi(\boldsymbol{D}_{k-1})]\end{aligned}\tag{1}$$

令$P(x,k)=(x^2-6x+6)\Phi(\boldsymbol{D}_k)+2\Phi(\boldsymbol{D}_{k-1})$，其中$x^2-6x+6=0$的根为$r_1=3-\sqrt{3}$，$r_2=3+\sqrt{3}$.

当$x\geqslant r_2$时，$P(x,k)>0$；由引理3知$P(4,k)<0$；进一步

$$\operatorname{sgn}(P(\mu_i(\boldsymbol{D}_k),k))=\operatorname{sgn}\Big(2\prod_{j=1}^{k-1}(\mu_i(\boldsymbol{D}_k)-\mu_j(\boldsymbol{D}_{k-1}))\Big)=(-1)^{i-1};\quad i=1,\cdots,k$$

$$\operatorname{sgn}(P(\mu_i(\boldsymbol{D}_{k-1}),k))=\operatorname{sgn}\Big(2(x-r_1)(x-r_2)\times\prod_{j=1}^{k}(\mu_i(\boldsymbol{D}_{k-1})-\mu_j(\boldsymbol{D}_k))\Big)$$

其中 sgn 为实数集 $\mathbf{R}$ 上的符号函数，即

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1; & x>0\\ 0; & x=0\\ -1; & x<0\end{cases}$$

情形1 若存在指标m满足$\mu_m(\boldsymbol{D}_{k-1})=r_1$，那么

$$\operatorname{sgn}(P(\mu_i(\boldsymbol{D}_{k-1}),k))=\begin{cases}(-1)^{i-1}; & 1\leqslant i\leqslant m-1\\ 0; & \mu_m(\boldsymbol{D}_{k-1})=r_1\\ (-1)^i; & m+1\leqslant i\leqslant k-1\end{cases}$$

由$\Phi(\boldsymbol{D}_k)$的根的特点可知$1<m<k-1$. 由连续函数的零点定理可知，$P(x,k)$至少有$k+1$个实根$t_0,t_1,\cdots,t_m,r_1,t_{m+1},\cdots,t_{k-1}$满足$\mu_{k-1}(\boldsymbol{D}_{k-1})<t_{k-1}<\mu_{k-1}(\boldsymbol{D}_k)<\cdots<\mu_{m+1}(\boldsymbol{D}_{k-1})<t_{m+1}<\mu_{m+1}(\boldsymbol{D}_k)<\mu_m(\boldsymbol{D}_{k-1})=r_1<\mu_m(\boldsymbol{D}_k)<t_m<\mu_{m-1}(\boldsymbol{D}_{k-1})<\cdots<\mu_2(\boldsymbol{D}_k)<t_2<\mu_1(\boldsymbol{D}_{k-1})<\mu_1(\boldsymbol{D}_k)<t_1<4<t_0<r_2$.

情形2 若存在指标m满足$\mu_{m+1}(\boldsymbol{D}_k)\leqslant r_1<\mu_m(\boldsymbol{D}_{k-1})$，那么$\operatorname{sgn}(P(\mu_{m+1}(\boldsymbol{D}_k),k))=(-1)^m$，$\operatorname{sgn}(P(\mu_m(\boldsymbol{D}_{k-1}),k))=(-1)^{m-1}$，因此$P(x,k)$在区间$(\mu_{m+1}(\boldsymbol{D}_k),\mu_m(\boldsymbol{D}_{k-1}))$内至少有一个实根，取代了情形1中的实根$r_1$，其他区间内根的情况类似于情形1.

情形3 若存在指标m满足$\mu_{m+1}(\boldsymbol{D}_{k-1})<r_1\leqslant\mu_{m+1}(\boldsymbol{D}_k)$，那么$P(x,k)$在区间$(\mu_{m+1}(\boldsymbol{D}_{k-1}),\mu_{m+1}(\boldsymbol{D}_k))$，$(\mu_{m+1}(\boldsymbol{D}_k),\mu_m(\boldsymbol{D}_{k-1}))$内各自至少有一个实根，其他区间内根的情况类似于情形1.

综上，$P(x,k)$至少有$k+1$个实根，而$P(x,k)$是$k+2$次多项式，故其余的根必定是实数. 下面说明$P(x,k)$在$(4,r_2)$内仅有一个根$c(k)$，且为$P(x,k)$的最大根. 不然，若$(4,c(k)]$内还有一个根d，由$P(x,k)$的连续性及根的分布特点可知，当$x\in(4,d)$时，$P(x,k)<0$，与$P(x,k)>0$矛盾. 由此可见，$P(x,k)$的第二大根

是小于 4 的.

下面考虑 $P(x,k)$ 的最大根 $c(k)$ 随 k 严格递减且有下界.

由 Maple 计算可知,$c(4)=4.385\,7$,$c(5)=4.384\,7$,故 $c(4)>c(5)$,假设 $c(k-1)>c(k)$ 成立,由于 $P(x,k+1)-(x-2)P(x,k)=-P(x,k-1)$,等式两边取 $x=c(k)$,由假设可知,$c(k)>c(k+1)$.

此外,$P^2(x,k)-P(x,k-1)P(x,k+1)=(x-4)(x^3-6x^2+8x-4)$,由 Maple 计算得到 $x^3-6x^2+8x-4=0$ 的最大根为 $e=4.383\,7$,若存在 l,使得 $c(l)\leqslant e<c(l-1)$,那么 $P^2(x,l)-P(x,l-1)P(x,l+1)\,|_{x=e}>0$,与 $(x-4)(x^3-6x^2+8x-4)\,|_{x=e}=0$ 矛盾.因而,$c(k)$ 单调递减且有下界 e,但永远达不到下界.

接下来,考虑 k 为偶数时 $\mu_1(S_k^1)$ 和 $\mu_1(S_{k+2}^1)$ 的大小关系,由 Maple 计算可得 $\mu_1(S_6^1)=4.414\,0>c(4)>c(6)$.当 $k=4$ 时,式(1) 变为 $\Phi(S_4^1)-\Phi(S_6^1)=-xP(x,4)$,两边同取 $x=\mu_1(S_6^1)$,右边小于零,故 $\mu_1(S_6^1)<\mu_1(S_4^1)$.当 $k=6$ 时,式(1) 变为 $\Phi(S_6^1)-\Phi(S_8^1)=-xP(x,6)$,两边同取 $x=c(6)$,则有 $\mu_1(S_8^1)>c(6)$;进一步两边同取 $x=\mu_1(S_8^1)$,右边小于零,故 $\mu_1(S_6^1)>\mu_1(S_8^1)$,类似的方法,最终有 $\mu_1(S_{k+2}^1)<\mu_1(S_k^1)$.

引理 5 在 $C(n,k)$ 中,$\mu_1(C_k^2(i,j,a))<\mu_1(C_k^2(i,j,a-1))$.

证明 通过直接计算可得

$$\Phi(C_k^2(i,j,a))-\Phi(C_k^2(i,j,a-1))=ijx^2(x-1)^{i+j-2}\Phi(\boldsymbol{D}_{k-2-2a})\tag{2}$$

由于 $\boldsymbol{D}_{k-2-2a}$ 的最大特征值小于 4,由文献[10] 的引理 6 知,当

$$x\geqslant\mu_1(C_k^2(i,j,a)),\mu_1(C_k^2(i,j,a-1))$$

时,式(2) 大于零,从而结论成立.

2 主要结论

这一节考虑偶单圈图 $C(k+2,k)$ 按照其 Laplace 谱半径排序的问题,比较 $\mu_1(C_k^1(0,1))$ 和 $\mu_1(C_k^2(1,1,a))(1\leqslant a\leqslant[(k-2)/2])$ 的值.由引理 1(4) 和文献[10] 的引理 1 得到

$$\begin{aligned}&\Phi(C_k^2(1,1,a))-\Phi(C_k^1(0,1))=\\&-x\{x\Phi(\boldsymbol{D}_a)\Phi(\boldsymbol{D}_b)-2[\Phi(\boldsymbol{D}_a)+\Phi(\boldsymbol{D}_{a-1})]\times\\&[\Phi(\boldsymbol{D}_b)+\Phi(\boldsymbol{D}_{b-1})]+2(-1)^k\}=\\&-x\{[(x-2)\Phi(\boldsymbol{D}_a)-2\Phi(\boldsymbol{D}_{a-1})]\Phi(\boldsymbol{D}_b)-\\&2[\Phi(\boldsymbol{D}_a)+\Phi(\boldsymbol{D}_{a-1})]\Phi(\boldsymbol{D}_{b-1})+2(-1)^k\}\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $a+b=k-2$.特别地,当 $a=1$,有以下定理.

定理 1 $\mu_1(C_k^2(1,1,1))>\mu_1(C_k^1(0,1))$,其中 $k\geqslant4$ 为偶数.

证明 不妨设 k 为任意的大于 4 的正整数,由式(3) 可知

$$\begin{aligned}&\Phi(C_k^2(1,1,1))-\Phi(C_k^1(0,1))=\\&-x[(x^2-4x+2)\Phi(\boldsymbol{D}_{k-3})-\\&2(x-1)\Phi(\boldsymbol{D}_{k-4})+2(-1)^k]\end{aligned}\tag{4}$$

令 $Q(x,k)=(x^2-4x+2)\Phi(\boldsymbol{D}_k)-2(x-1)\Phi(\boldsymbol{D}_{k-1})$,其中 $x-1=0$ 的根为 $s_1=1$,$x^2-4x+2=0$ 的根为 $s_2=2-\sqrt{2}$,$s_3=2+\sqrt{2}$.

当 $x\geqslant5$ 时,$Q(x,k)>0$;由引理 1(2) 知 $Q(4,k)<0$,考虑 s_1 在区间$(\mu_k(\boldsymbol{D}_k),\mu_1(\boldsymbol{D}_k))$ 内的位置.

若存在指标 m 满足 $\mu_m(\boldsymbol{D}_k)=s_1$,那么由 $\Phi(\boldsymbol{D}_k)$ 的根的特点可知 $1<m<k$.对任意的 $x\in(\mu_m(\boldsymbol{D}_k),\mu_1(\boldsymbol{D}_k))$,有 $\mathrm{sgn}(-2(x-1))=-1$ 恒成立,因而在这个区间内根的讨论情况和引理 4 的证明过程类似,故 $Q(x,k)$ 在区间 $(\mu_m(\boldsymbol{D}_k),\mu_1(\boldsymbol{D}_k))$ 内至少有 $m-1$ 个根.类似地,对任意的 $x\in(\mu_k(\boldsymbol{D}_k),\mu_m(\boldsymbol{D}_k))$,有 $\mathrm{sgn}(-2(x-1))=1$ 恒成立,故 $Q(x,k)$ 在区间$(\mu_k(\boldsymbol{D}_k),\mu_m(\boldsymbol{D}_k))$ 内至少有 $k-m$ 个根.另外,$Q(x,k)$ 有实根 s_1,区间(4,5) 内存在实根.其他的情形 $\mu_m(\boldsymbol{D}_{k-1})\leqslant s_1<\mu_m(\boldsymbol{D}_k)$,可类似地讨论.综合上述情况,$Q(x,k)$ 至少有 $k+1$ 个实根,剩下的根必定是实根,类似于引理 4 中关于 $P(x,k)$ 根的讨论,可知 $Q(x,k)$ 的第二大根小于 4.记它的最大根为 $d(k)$.

而 $Q(x,k)$ 的最大根 $d(k)$ 随 k 严格递增且有上界.

由 Maple 计算可知,$d(4)=4.379\,9$,$d(5)=4.382\,8$,故 $d(4)<d(5)$,假设 $d(k-1)<d(k)$

成立，此外也有 $d(1)<d(2)<d(3)<d(4)$. 由于 $Q(x,k+1)-(x-2)Q(x,k)=-Q(x,k-1)$，等式两边取 $x=d(k)$，由假设可知，$d(k)<d(k+1)$.

此外，$Q^2(x,k)-Q(x,k-1)Q(x,k+1)=-x(x^3-6x^2+8x-4)$，由 Maple 计算得到 $x^3-6x^2+8x-4=0$ 最大根为 $e=4.3837$，若存在 m，使得 $d(m)\geqslant e>d(m-1)$，那么 $Q^2(x,m)-Q(x,m-1)Q(x,m+1)\mid_{x=e}>0$，与 $-x(x^3-6x^2+8x-4)\mid_{x=e}=0$ 矛盾. 因而，$d(k)$ 严格递增且有上界 e，但永远达不到上界.

当 k 为偶数时，式(4) 变为 $\Phi(C_k^2(1,1,1))-\Phi(C_k^1(0,1))=-x[Q(x,k-3)+2]$. 显然，对任意的 $x\geqslant d(k-3)$，$Q(x,k-3)+2>0$. 由引理 4 证明中的后半部分可知 $\mu_1(S_k^1)>c(k-2)>e$，同时 $d(k-3)<d(k)<e$. 故 $\mu_1(S_k^1)>d(k-3)$. 由文献[10] 中引理 3 知

$$\mu_1(S_k^1)\leqslant\mu_1(C_k^2(1,1,1)),\mu_1(C_k^1(0,1))$$

从而 $\mu_1(C_k^2(1,1,1))>\mu_1(C_k^1(0,1))$.

定理 2　$\mu_1(C_k^2(1,1,(k-2)/2))<\mu_1(C_k^1(0,1))$，其中 $k\geqslant 10$ 为偶数.

证明　由引理 1(2) 和 2，式(3) 变为

$$\Phi(C_k^2(1,1,(k-2)/2))-\Phi(C_k^1(0,1))=-x\Phi(\boldsymbol{D}_{(k-2)/2})[\Phi(\boldsymbol{D}_{(k-2)/2})-2\Phi(\boldsymbol{D}_{(k-4)/2})] \tag{5}$$

令 $W(x,t)=\Phi(\boldsymbol{D}_t)-2\Phi(\boldsymbol{D}_{t-1})=(x-4)\Phi(\boldsymbol{D}_{t-1})-\Phi(\boldsymbol{D}_{t-2})$，$t\geqslant 2$.

由引理 3 知，对任意的 $x\geqslant 5$，$W(x,t)>0$；$W(4,t)<0$. 进一步，

$$\operatorname{sgn}(W(\mu_i(\boldsymbol{D}_t),t))=\operatorname{sgn}\left(-2\prod_{j=1}^{t-1}\left(\mu_i(\boldsymbol{D}_t)-\mu_j(\boldsymbol{D}_{t-1})\right)\right)=(-1)^i;\quad i=1,\cdots,t$$

$$\operatorname{sgn}(W(\mu_i(\boldsymbol{D}_{t-1}),t))=\operatorname{sgn}\left(\prod_{j=1}^{t}\left(\mu_i(\boldsymbol{D}_{t-1})-\mu_j(\boldsymbol{D}_t)\right)\right)=(-1)^i;\quad i=1,\cdots,t-1$$

由连续函数的零点定理知，$W(x,t)$ 在每个区间 $(\mu_t(\boldsymbol{D}_t),\mu_{t-1}(\boldsymbol{D}_{t-1}))$，…，$(\mu_2(\boldsymbol{D}_t),\mu_1(\boldsymbol{D}_{t-1}))$，$(4,5)$ 内至少有一个实根，而 $W(x,t)$ 的次数恰好为 t，因而 $W(x,t)$ 的第二大根小于 4，记它的最大根为 $w(t)$.

$W(x,t)$ 的最大根 $w(t)$ 随 t 严格递增且有上界.

由 Maple 计算可知，$w(1)=4$，$w(2)=4.4150$，故 $w(1)<w(2)$，假设 $w(t-1)<w(t)$ 成立. 由于 $W(x,t+1)-(x-2)W(x,t)=-W(x,t-1)$，等式两边取 $x=w(t)$，由假设知 $w(t)<w(t+1)$.

此外，$W^2(x,t)-W(x,t-1)W(x,t+1)=9-2x$，其最大根为 4.5，若存在 n，使得 $w(n)\geqslant 4.5>w(n-1)$，那么 $W^2(x,n)-W(x,n-1)W(x,n+1)\mid_{x=4.5}>0$，与 $9-2x\mid_{x=4.5}=0$ 矛盾. 因而，$w(t)$ 严格递增且有上界 4.5，但永远达不到上界.

从文献[12] 知，$\mu_1(C_k^1(0,1))$ 关于 k 是严格递减的，其中 k 为偶数. 由 Maple 计算可知 $\mu_1(C_8^1(0,1))=w(3)$. 又 $w(t)$ 是严格递增的，故当 $t\geqslant 4$，即 $k\geqslant 10$ 时，$\mu_1(C_k^1(0,1))<w((k-2)/2)$，式(5) 两边同取 $x=\mu_1(C_k^1(0,1))$，右边大于 0，从而 $\mu_1(C_k^2(1,1,(k-2)/2))<\mu_1(C_k^1(0,1))$.

由定理 1、2 和引理 5 可知下面定理.

定理 3　给定偶单圈图 $C(k+2,k)(k\geqslant 10)$，按其 Laplace 谱半径从大到小的顺序 S_k^2，$C_k^2(1,1,0)$，$C_k^2(1,1,1)$ 依次排在前三位，而 $C_k^2(1,1,(k-2)/2)$ 排在最后一位.

猜想　当 $k\geqslant 10$ 且为偶数时，$\mu_1(C_k^2(1,1,(k-2)/4))>\mu_1(C_k^1(0,1))>\mu_1(C_k^2(1,1,(k+2)/4))$ 成立，这样，此类偶单圈图的所有排序都能得到.

3　结　语

本文给出了扩圈变换对偶单圈图 S_k^1 的 Laplace 谱半径影响的证明方法，利用此方法确定了偶单圈图 $C(k+2,k)(k\geqslant 10)$ 按其 Laplace 谱半径从大到小的顺序依次排在前三位和最后一位的单圈图.

参考文献：

[1] Anderson W N, Morley T D. Eigenvalues of the Laplacian of a graph [J]. **Linear and Multilinear Algebra**, 1985, **18**(2):141-145.

[2] Cvetkovic D, Doob M, Sachs H. **Spectra of Graphs-Theory and Application** [M]. New York: Academic Press, 1980.

[3] Kinkar C D. The Laplacian spectrum of a graph [J]. **Computers and Mathematics with Applications**, 2004, **48**(5-6):715-724.

[4] LI Jiong-sheng, ZHANG Xiao-dong. A new upper bound for eigenvalues of Laplacian matrix of a graph [J]. **Linear Algebra and Its Applications**, 1997, **265**(1-3):93-100.

[5] LI Jiong-sheng, ZHANG Xiao-dong. On the Laplacian eigenvalues of a graph [J]. **Linear Algebra and Its Applications**, 1998, **285**(1-3):305-307.

[6] Merris R. Laplacian matrices of graphs: A survey [J]. **Linear Algebra and Its Applications**, 1994, **197-198**:143-176.

[7] Merris R. A note on Laplacian graph eigenvalues [J]. **Linear Algebra and Its Applications**, 1998, **285**(1-3):33-35.

[8] Cvetkovic D, Rowlinson P. Spectra of unicyclic graphs [J]. **Graphs and Combinatorics**, 1987, **3**(1):7-23.

[9] 郭曙光. 单圈图 Laplace 矩阵的最大特征值[J]. 高等应用数学学报:A 辑, 2001,**16**(2):131-135.
GUO Shu-guang. The largest eigenvalues of Laplacian matrix of unicyclic graphs [J]. **Applied Mathematics Journal of Chinese Universities: Series A**, 2001, **16**(2):131-135. (in Chinese)

[10] 张海霞,于洪全. 按 Laplace 谱半径对圈长和阶数固定的单圈图的排序[J]. 大连理工大学学报, 2013, **53**(1):145-150.
ZHANG Hai-xia, YU Hong-quan. Unicyclic graphs ordering with fixed number vertices and cycle length by their Laplace spectral radii [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2013, **53**(1):145-150. (in Chinese)

[11] GUO Ji-ming. A conjecture on the algebraic connectivity of connected graphs with fixed girth [J]. **Discrete Mathematics**, 2008, **308**(23):5702-5711.

[12] GUO Ji-ming. The Laplacian spectral radius of a graph under modifications [J]. **Computers and Mathematics with Applications**, 2007, **54**(5):709-720.

Some even-unicyclic graphs ordering by their Laplacian spectral radii

ZHANG Hai-xia*[1,2]

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Department of Mathematics, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: Ordering some even-unicyclic graphs by their Laplacian spectral radii is the main research problem. An expanding transformation which changes the Laplacian radius of even-unicyclic graph S_k^1 is given. With the aid of the way to prove the expanding transformation, the largest three and the smallest one in the order of even-unicyclic graphs $C(k+2,k)(k\geqslant 10)$ by Laplacian spectral radii are obtained.

Key words: unicyclic graphs; maximum Laplacian eigenvalues; ordering