文章编号：1000-8608(2014)03-0371-06

UEND 和 φ 混合随机变量随机和的精确大偏差

华志强*[1,2]， 宋立新[1]， 冯敬海[1]

（1.大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024；
2.内蒙古民族大学 数学学院，内蒙古 通辽 028000）

摘要：介绍了 *UEND* 和 φ 混合的相依关系的随机变量，研究了具有 *UEND* 和 φ 混合的相依关系的随机变量的随机和的尾概率问题，利用一种求相依关系的随机变量的随机和的大偏差方法，得到了具有 *UEND* 和 φ 混合的相依关系的服从重尾分布的随机变量的随机和的渐近尾概率的结果，将服从独立不同分布的随机变量的随机和的一致渐近结论推广到了服从不同分布的带相依关系的随机变量的随机和的结论上.

关键词：上延拓负相依；φ 混合；随机和；精确大偏差

中图分类号：O211.4 **文献标识码**：A **doi**：10.7511/dllgxb201403017

0 引言

服从重尾分布的随机变量和的精确大偏差是保险业中一个重要的研究课题，其确定有利于保险公司做出更好的决策，降低保险公司破产事件发生的可能性. 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 表示一个取值非负的、服从不同分布的随机变量序列，其对应的分布为 $\{F_n, n \geqslant 1\}$，且有有限的均值 $\{\mu_n, n \geqslant 1\}$，在保险业中这个随机变量序列代表索赔额. 令 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是一个由取非负整数值的随机变量所产生的随机过程，且满足对所有的 $t \geqslant 0$ 有 $E(N(t)) = \lambda(t) < \infty$，但当 $t \to \infty$ 时就有 $\lambda(t) \to \infty$. 常令 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 与 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是相互独立的. 记 $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ 为随机和. 文献[1-2]研究了独立同分布情形下的随机和的精确大偏差，即对于任意的 $\gamma > 0$，当 $t \to \infty$ 时，对于 $x \geqslant \gamma\lambda(t)$ 一致地有 $P(S(t) - E(S(t)) > x) \sim \lambda(t)\overline{F}(x)$，其中 F 是独立同分布情形下的随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 的共同分布. 这种一致性可以理解为 $\lim_{t\to\infty} \sup_{x \geqslant \gamma\lambda(t)} \left| \frac{P(S(t) - E(S(t)) > x)}{\lambda(t)\overline{F}(x)} - 1 \right| = 0$. 文献[3]研究了独立不同分布的随机变量的随机和的精确大偏差，而本文主要研究的是相依不同分布的随机变量序列的随机和的精确大偏差.

1 预备知识

1.1 重尾分布

称随机变量 X（或它的分布 F）是重尾的，如果它没有指数阶矩. 一个支撑在 $[0, \infty)$ 上的分布 F 是一致变化尾的（记为 $\mathscr{C}$），若

$$\lim_{y \downarrow 1} \lim_{x\to\infty} \inf \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1$$

或者，等价地有

$$\lim_{y \uparrow 1} \lim_{x\to\infty} \sup \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = 1$$

若对于任意的 $y \in (0,1)$（或者等价地，对 $y = 1/2$）有

$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty$$

成立，则称 F 属于控制变化族（记为 $\mathscr{D}$）. 由文献[4]知，$\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$. 令

收稿日期：2014-01-05； **修回日期**：2014-05-25.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11371077,61175041)；内蒙古自治区自然科学基金资助项目(2013MS0101)；内蒙古民族大学科学研究基金资助项目(NMD1227;NMD1304).
作者简介：华志强*(1981-)，男，博士生，E-mail：huazhiqiang1981@mail.dlut.edu.cn；宋立新(1966-)，男，教授，博士生导师，E-mail：lxsong@dlut.edu.cn.

$$\gamma(y) := \lim_{x\to\infty} \inf \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}$$

和

$$\gamma_F := \inf\left\{-\frac{\log \gamma(y)}{\log y} : y > 1\right\}$$

在文献[5]中，γ_F 称为分布 F 的 Matuszewska 上指标.

1.2 相依随机变量序列

首先给出第一个相关的相依随机变量序列的概念.

定义 1 称随机变量序列$\{X_n, n\geqslant 1\}$为 φ 混合序列(或者一致正则强混合序列)，若当 $t\to\infty$ 时，有

$$\varphi(n) = \sup_{k\geqslant 1} \varphi(\mathscr{F}_1^k, \mathscr{F}_{n+k}^\infty) \to 0, n\to\infty$$

这里

$$\varphi(\mathscr{A},\mathscr{B}) = \sup_{\substack{A\in\mathscr{A}\\ B\in\mathscr{B}, P(A)>0}} |P(B\mid A) - P(B)|$$

$$\mathscr{F}_1^k = \sigma(X_i, 1\leqslant i\leqslant k),\ \mathscr{F}_{n+k}^\infty = \sigma(X_i, i\geqslant n+k)$$

注：一般地，$\varphi(n)$ 是一个递减函数，且 φ 混合可以推出强混合，不少有关混合文献的结论被应用到时间序列分析中，见文献[6-8]. 接下来给出本文所需要的第二个相依随机变量序列的概念.

定义 2 称随机变量序列$\{X_n, n\geqslant 1\}$是上延拓负相依的随机变量序列(记为 $UEND$)，如果存在某个 $M>0$，对于每一个 $n=1,2,\cdots$，以及所有的取值为实数的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，

$$P(X_1 > x_1, \cdots, X_n > x_n) \leqslant M\prod_{i=1}^n P(X_i > x_i) \tag{1}$$

注：关于 $UEND$ 的概念详见文献[9].

1.3 相关命题

命题 1 (1) 设 $F\in\mathscr{D}$，且存在一个有限的数学期望，对于任意的 $1\leqslant \gamma_F < p < \infty$，当 $x\to\infty$ 时，有

$$x^{-p} = o(\overline{F}(x))$$

(2) 设 $F\in\mathscr{D}$，对于任意的 $p>\gamma_F$，存在正数 x_0 和 B，使得对于所有的 $\theta\in(0,1]$ 和所有的 $x\geqslant \theta^{-1}x_0$，有

$$\frac{\overline{F}(\theta x)}{\overline{F}(x)} \leqslant B\theta^{-p}$$

命题 1 中的(1)是文献[2]中的引理 2.1，证明已由引理 2.1 给出；命题 1 中的(2)是文献[2]中的引理 2.2，它的证明见文献[5]中的性质 2.2.1. 下面的命题是文献[9]中的引理 2.2.

命题 2 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是 $UEND$ 的随机变量序列，

(1) 如果$\{f_n(\cdot), n\geqslant 1\}$是非降的函数，则$\{f_n(X_n), n\geqslant 1\}$是 $UEND$ 的随机变量序列；

(2) 如果$\{X_n, n\geqslant 1\}$是非负的和 $UEND$ 的随机变量序列，则对于任意的 $s>0$ 和每一个 $n\geqslant 1$，都有

$$E\exp\left\{s\sum_{i=1}^n X_i\right\} \leqslant M\prod_{i=1}^n E\exp\{sX_i\}$$

命题 3 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$为一个非负的、$UEND$ 的和 φ 混合的随机变量序列，满足 $\sum_{n=1}^\infty \varphi^{1/2}(2^n) < \infty$，其对应的分布函数列为$\{F_n, n\geqslant 1\}$，存在相应的有限数学期望序列$\{\mu_n, n\geqslant 1\}$. 设 X 为非负的随机变量，其分布函数 $F\in\mathscr{C}$，数学期望为$\overline{\mu}$. 假设：

(1) F 和$\{F_n, n\geqslant 1\}$满足假设条件 1：存在某个 $T>0$，使得对于 $x\geqslant T$ 一致地有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \overline{F}_i(x)}{n\overline{F}(x)} = 1$$

且存在常数 $c\geqslant 1$，使得对于 $i=1,2,\cdots,n$，有 $\overline{F}_i(x) \leqslant c\overline{F}(x)$.

(2) $\overline{\mu}$ 和$\{\mu_n, n\geqslant 1\}$满足假设条件 2：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i = \overline{\mu} < \infty$$

则对于任意固定的 $\gamma>0$ 和 $\delta>0$，当 $n\to\infty$ 时，对 $x\geqslant \gamma n^{1+\delta}$ 一致地有

$$P(S_n - E(S_n) > x) \sim n\overline{F}(x)$$

这里 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

由文献[10]的定理 1 及文献[2]的定理 3.1 的证明方法可以得到命题 3，下面的命题 4 是文献[2]的引理 2.4.

命题 4 设$\{\zeta(t), t\geqslant 0\}$是一个随机过程，满足 $E(\zeta(t)) = 1$. 如果对于任意固定的 $\delta>0$，有

$$\lim_{t\to\infty} E(\zeta(t) 1_{(\zeta(t)>1+\delta)}) = o(1)$$

则 $\zeta(t) \xrightarrow{P} 1$. 这里 $1_{(\cdot)}$ 是示性函数.

1.4 相关引理

引理 1　设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是一个随机变量序列，存在相应的有限数学期望序列$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$，其对应的分布函数列为$\{F_n,n\geqslant 1\}$. 令$\{N(t),t\geqslant 0\}$是一个独立于$\{X_n,n\geqslant 1\}$的取非负整数值的随机过程，且满足对于所有的$t\geqslant 0$有$E(N(t))=\lambda(t)<\infty$，但当$t\to\infty$时有$\lambda(t)\to\infty$. 设$X$为非负的随机变量，其分布函数$F\in\mathscr{C}$，数学期望为$\bar{\mu}$. 假设$F$和$\{F_n,n\geqslant 1\}$满足假设条件 1，$\bar{\mu}$和$\{\mu_n,n\geqslant 1\}$满足假设条件 2. 设$\{N(t),t\geqslant 0\}$满足假设条件 3：对于任意的$p>\gamma_F$和任意的$\delta>0$，有

$$E((N(t))^p 1_{(N(t)>(1+\delta)\lambda(t))})=O(\lambda(t))$$

则当$t\to\infty$时有

$$E(S(t))\sim\bar{\mu}\lambda(t)$$

注：由文献[2]可知假设条件 3 等价于当$t\to\infty$时有

$$N(t)/\lambda(t)\xrightarrow{P}1 \tag{2}$$

而与式(2)等价的另一种表述形式为存在一个正值函数$\varepsilon(t)$，当$t\to\infty$时有$\varepsilon(t)\to 0$，且

$$P(|N(t)-\lambda(t)|>\varepsilon(t)\lambda(t))=o(1) \tag{3}$$

证明　由假设条件 2 可知，对于任意的$\delta_1\in(0,1)$，存在$N>0$，使得当$n>N$时，就有

$$(1-\delta_1)\bar{\mu}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\leqslant(1+\delta_1)\bar{\mu} \tag{4}$$

取满足式(3)的$\varepsilon(t)$，对于任意的$\delta>0$，有

$$\begin{aligned}E(S(t))&=E\Big(E\Big(\sum_{i=1}^{N(t)}X_i\mid N(t)\Big)\Big)=\\&\sum_{n=1}^{\infty}E\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)P(N(t)=n)=\\&\Big(\sum_{n=1}^{(1-\varepsilon(t))\lambda(t)}+\sum_{n=(1-\varepsilon(t))\lambda(t)+1}^{(1+\delta)\lambda(t)}+\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}\Big)\times\\&\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\Big)nP(N(t)=n)=\\&K_1+K_2+K_3\end{aligned} \tag{5}$$

由式(4)知，当t充分大时，取$M=\max\Big\{\mu_1,\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2),\cdots,\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_i,(1-\delta_1)\bar{\mu},(1+\delta_1)\bar{\mu}\Big\}$. 则由式(3)知，当$t\to\infty$时，有

$$\begin{aligned}\frac{K_1}{\lambda(t)\bar{\mu}}&=\frac{\Big(\sum_{n=1}^{N}+\sum_{n=N+1}^{(1-\varepsilon(t))\lambda(t)}\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\Big)nP(N(t)=n)}{\lambda(t)\bar{\mu}}\leqslant\\&\frac{\sum_{n=1}^{N}MnP(N(t)=n)}{\lambda(t)\bar{\mu}}+\\&\frac{\sum_{n=N+1}^{(1-\varepsilon(t))\lambda(t)}(1+\delta_1)\bar{\mu}nP(N(t)=n)}{\lambda(t)\bar{\mu}}\leqslant\\&\frac{ME(N(t)1_{(N(t)\leqslant N)})}{\lambda(t)\bar{\mu}}+(1-\varepsilon(t))\times\\&(1+\delta_1)P(N(t)\leqslant(1-\varepsilon(t))\lambda(t))=o(1)\end{aligned} \tag{6}$$

由式(4)及假设条件 3 知，当$t\to\infty$时，有

$$\begin{aligned}\frac{K_3}{\lambda(t)\bar{\mu}}&\leqslant\frac{\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}((1+\delta_1)\bar{\mu})nP(N(t)=n)}{\lambda(t)\bar{\mu}}\leqslant\\&(1+\delta_1)\frac{E((N(t))^p 1_{(N(t)>(1+\delta)\lambda(t))})}{(\lambda(t))^p}=\\&o(1)\end{aligned} \tag{7}$$

对于$\frac{K_2}{\lambda(t)\bar{\mu}}$，一方面由式(4)及式(2)知，当$t\to\infty$时，有

$$\begin{aligned}\frac{K_2}{\lambda(t)\bar{\mu}}&\leqslant\frac{\sum_{n=(1-\varepsilon(t))\lambda(t)+1}^{(1+\delta)\lambda(t)}((1+\delta_1)\bar{\mu})nP(N(t)=n)}{\lambda(t)\bar{\mu}}\leqslant\\&(1+\delta_1)(1+\delta)P(N(t)\leqslant(1+\delta)\lambda(t))\end{aligned} \tag{8}$$

另一方面，同理有

$$\begin{aligned}\frac{K_2}{\lambda(t)\bar{\mu}}&\geqslant\frac{\sum_{n=(1-\varepsilon(t))\lambda(t)+1}^{(1+\delta)\lambda(t)}((1-\delta_1)\bar{\mu})nP(N(t)=n)}{\lambda(t)\bar{\mu}}\geqslant\\&(1-\delta_1)((1-\varepsilon(t))+1/\lambda(t))P(N(t)\leqslant\\&(1+\delta)\lambda(t))\end{aligned} \tag{9}$$

令$\delta\downarrow 0$，$\delta_1\downarrow 0$，当$t\to\infty$时，由式(2)、式(5)～(9)可知结论成立. □

引理 2　设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是一个非负的、*UEND* 的随机变量序列，其对应的分布函数列为$\{F_n,n\geqslant 1\}$. 则对于任意的$0<t\leqslant 1$，有

$$P(S_n>x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(X_i>y_i)+M\exp\left\{\frac{x}{y}-\frac{x}{y}\log\left(\frac{xy^{t-1}}{\sum_{i=1}^{n}\int_0^{y_i}u^t\,\mathrm{d}F_i(u)}+1\right)\right\}$$

成立，这里x是一个任意的正数，$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$是一个由n个正数组成的集合，$y\geqslant\max\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$.

证明 采用截断误差的方法来证明. 设 $\widetilde{X}_i = X_i I_{\{X_i \leqslant y_i\}}$，$\widetilde{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i$. 由马尔可夫不等式及命题 2 的(2) 知

$$P(S_n > x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(X_i > y_i) + P(\widetilde{S}_n > x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(X_i > y_i) + \exp(-hx) \times E\exp(h\widetilde{S}_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(X_i > y_i) + M\exp(-hx)\prod_{i=1}^{n} E\exp(h\widetilde{X}_i) \tag{10}$$

这里 $h = h(x, y_1, \cdots, y_n) > 0$. 取 $0 < t \leqslant 1$，有

$$M\exp(-hx)\prod_{i=1}^{n} E\exp(h\widetilde{X}_i) = M\exp(-hx)\prod_{i=1}^{n}\left\{1 + \int_0^{y_i} \frac{\exp(hu) - 1}{u^t} u^t \mathrm{d}F_i(u)\right\} \leqslant M\exp(-hx)\prod_{i=1}^{n}\left\{1 + \frac{\exp(hy) - 1}{y^t}\int_0^{y_i} u^t \mathrm{d}F_i(u)\right\} \leqslant M\exp(-hx)\prod_{i=1}^{n}\exp\left\{\frac{\exp(hy) - 1}{y^t}\int_0^{y_i} u^t \mathrm{d}F_i(u)\right\} = M\exp\left\{\frac{\exp(hy) - 1}{y^t}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{y_i} u^t \mathrm{d}F_i(u) - hx\right\} \tag{11}$$

这里在第一个不等式中用到函数 $(\exp(hu) - 1)/u^t$ 在 $u > 0$ 上是单调递增的，在第二个不等式中用到了不等式 $1 + x \leqslant \exp(x)$ 对于任意的 $x > 0$ 都成立. 令 $h = \frac{1}{y}\log\left(xy^{t-1}\Big/\sum_{i=1}^{n}\int_0^{y_i} u^t \mathrm{d}F_i(u) + 1\right)$，将 h 代入式(11) 中，得

$$M\exp(-hx)\prod_{i=1}^{n} E\exp(h\widetilde{X}_i) \leqslant M\exp\left\{\frac{x}{y} - \frac{x}{y}\log\left(\frac{xy^{t-1}}{\sum_{i=1}^{n}\int_0^{y_i} u^t \mathrm{d}F_i(u)} + 1\right)\right\} \tag{12}$$

将式(12) 代入式(10) 中即可得到引理的结论. □

2 UEND 和 φ 混合随机变量的随机和的大偏差

定理 1 设 X 和 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 以及随机过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 满足假设条件 1、2、3，则对于任意固定的 $\gamma > 0$ 和 $\delta > 0$，当 $t \to \infty$ 时，对 $x \geqslant \gamma(\lambda(t))^{1+\delta}$ 一致地有

$$P(S(t) - E(S(t)) > x) \sim \lambda(t)\overline{F}(x)$$

证明 由命题 4，取 $\zeta(t) = N(t)/\lambda(t)$，则假设条件 3 意味着当 $t \to \infty$ 时有 $N(t)/\lambda(t) \xrightarrow{P} 1$. 对于任意的 $\delta > 0$，

$$P(S(t) - E(S(t)) > x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k)P(S_k - E(S(t)) > x) = \left(\sum_{k \leqslant (1+\delta)\lambda(t)} + \sum_{k > (1+\delta)\lambda(t)}\right)P(N(t) = k) \times P(S_k - E(S(t)) > x) = A + B \tag{13}$$

先来估计 A. 取满足式(3) 的 $\varepsilon(t)$，有

$$\sum_{k \leqslant (1+\delta)\lambda(t)} P(N(t) = k)P(S_k - E(S(t)) > x) = \left(\sum_{|k-\lambda(t)| < \epsilon(t)\lambda(t)} + \sum_{k-\lambda(t) < -\epsilon(t)\lambda(t)} + \sum_{\epsilon(t)\lambda(t) < k-\lambda(t) < \delta\lambda(t)}\right) \times P(N(t) = k)P(S_k - E(S(t)) > x) = A_1 + A_2 + A_3 \tag{14}$$

首先来估计 A_1. 对于任意的 $\delta_2 > 0$，当 t 充分大以后，由引理 1 可得

$$(1 - \delta_2)\lambda(t)\overline{\mu} \leqslant E(S(t)) \leqslant (1 + \delta_2)\lambda(t)\overline{\mu}$$

以及由假设条件 2 可知，对于 $|k - \lambda(t)| < \epsilon(t)\lambda(t)$，有

$$(1 - \delta_2)(1 - \epsilon(t))\lambda(t)\overline{\mu} \leqslant E(S_k) \leqslant (1 + \delta_2)(1 + \epsilon(t))\lambda(t)\overline{\mu}$$

一方面对于任意的 $\gamma > 0$ 和任意的 $\delta_3 > 0$，当 $t \to \infty$ 时，对 $x \geqslant \gamma(\lambda(t))^{1+\delta}$ 一致地有

$$A_1 = \sum_{|k-\lambda(t)| < \epsilon(t)\lambda(t)} P(N(t) = k)P(S_k - E(S_k) > x - E(S_k) + E(S(t))) \leqslant \sum_{|k-\lambda(t)| < \epsilon(t)\lambda(t)} P(N(t) = k)P(S_k - E(S_k) > x - (1 + \delta_2)(1 + \epsilon(t))\lambda(t)\overline{\mu} + (1 - \delta_2)\overline{\mu}\lambda(t)) = \sum_{|k-\lambda(t)| < \epsilon(t)\lambda(t)} P(N(t) = k)P(S_k - E(S_k) > x - (2\delta_2 + \delta_2\epsilon(t) + \epsilon(t))\lambda(t)\overline{\mu}) \leqslant (1 + \delta_3)(1 + \epsilon(t))\lambda(t)\overline{F}(x - (2\delta_2 + \delta_2\epsilon(t) + \epsilon(t))\lambda(t)\overline{\mu}) \sum_{|k-\lambda(t)| < \epsilon(t)\lambda(t)} P(N(t) = k) \leqslant (1 + \delta_4)(1 + \delta_3)(1 + \epsilon(t))\lambda(t) \times \overline{F}(x) \sum_{|k-\lambda(t)| < \epsilon(t)\lambda(t)} P(N(t) = k)$$

这里第二个不等式由命题 3 得到. 在最后的不等式中，由 $F \in \mathscr{C}$ 知，对于任意固定的 $\gamma > 0$ 和任意的 $\delta_4 > 0$，当 $t \to \infty$ 时，对 $x \geqslant \gamma(\lambda(t))^{1+\delta}$ 一致地有

$$\frac{\overline{F}(x-(2\delta_2+\delta_2\epsilon(t)+\epsilon(t))\lambda(t)\,\overline{\mu})}{\overline{F}(x)}\leqslant 1+\delta_4$$

另一方面，同理可得对于任意的 $\gamma>0$ 和任意的 $\delta_5>0$，当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+\delta}$ 一致地有

$$A_1\geqslant(1-\delta_5)(1-\delta_3)(1-\epsilon(t))\lambda(t)\times\overline{F}(x)\sum_{|k-\lambda(t)|<\epsilon(t)\lambda(t)}P(N(t)=k)$$

又由假设条件 3 知，当 $t\to\infty$ 时，有

$$\sum_{|k-\lambda(t)|<\epsilon(t)\lambda(t)}P(N(t)=k)=P(|N(t)-\lambda(t)|<\epsilon(t)\lambda(t))\to 1$$

令 $\delta_3\downarrow 0$、$\delta_4\downarrow 0$ 和 $\delta_5\downarrow 0$，对于任意固定的 $\gamma>0$，当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+\delta}$ 一致地有

$$A_1\sim\lambda(t)\,\overline{F}(x)\tag{15}$$

其次估计 A_2. 记 $m=(1-\epsilon(t))\lambda(t)$，由假设条件 2 知对于任意的 $\delta_6>0$，当 t 充分大以后有

$$(1-\delta_6)m\,\overline{\mu}\leqslant E(S_m)\leqslant(1+\delta_6)m\,\overline{\mu}$$

根据式(2)，当 $t\to\infty$ 时有

$$\sum_{k-\lambda(t)<-\epsilon(t)\lambda(t)}P(N(t)=k)\leqslant P(N(t)-\lambda(t)\leqslant-\epsilon(t)\lambda(t))=o(1)$$

所以对于任意的 $\gamma>0$ 和任意的 $\delta_7>0$，当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+\delta}$ 一致地有

$$\begin{aligned}A_2&\leqslant P(S_m-E(S_m)>x-E(S_m)+E(S(t)))\sum_{k-\lambda(t)<-\epsilon(t)\lambda(t)}P(N(t)=k)\leqslant\\&P(S_m-E(S_m)>x-(1+\delta_6)m\,\overline{\mu}+(1-\delta_2)\,\overline{\mu}\lambda(t))\sum_{k-\lambda(t)<-\epsilon(t)\lambda(t)}P(N(t)=k)\leqslant\\&(1+\delta_7)(1+\delta_6)(1-\epsilon(t))\lambda(t)\,\overline{F}(x)\times\sum_{k-\lambda(t)<-\epsilon(t)\lambda(t)}P(N(t)=k)=\\&(1+\delta_7)(1+\delta_6)(1-\epsilon(t))\lambda(t)\,\overline{F}(x)o(1)=\\&o(\lambda(t)\,\overline{F}(x))\end{aligned}\tag{16}$$

采用类似估计 A_2 的方法来估计 A_3，同理可知对于任意固定的 $\gamma>0$，当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+\delta}$ 一致地有

$$A_3=o(\lambda(t)\,\overline{F}(x))\tag{17}$$

最后估计 B. 利用式(4)、假设条件 1 及引理 2，设 $t=1$，$y_i=\dfrac{x}{2v}$，$v>1$，$y=\dfrac{x}{v}\left(y>\max\limits_i\{y_i\}\right)$，对于任意的 δ_1，$\delta_8>0$，当 n 充分大时，可以得到

$$\begin{aligned}P(S_n\geqslant x)&\leqslant\sum_{i=1}^{n}P\left(X_i\geqslant\frac{x}{2v}\right)+M\exp\left(v-v\ln\left(\frac{x}{n\,\overline{\mu}(1+\delta_1)}\right)\right)=\\&(1+\delta_8)n\,\overline{F}\left(\frac{x}{2v}\right)+M\exp\left(v+\ln\left(\frac{x}{n\,\overline{\mu}(1+\delta_1)}\right)^{-v}\right)=\\&(1+\delta_8)n\,\overline{F}\left(\frac{x}{2v}\right)+Me^{v}(n\,\overline{\mu}(1+\delta_1))^{v}x^{-v}\end{aligned}$$

所以当 $t\to\infty$ 时，B 的表达式可以表述为

$$\begin{aligned}B&\leqslant\sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)}P(N(t)=k)P(S_k>x)\leqslant\\&(1+\delta_8)\,\overline{F}\left(\frac{x}{2v}\right)\sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)}kP(N(t)=k)+\\&M(e\overline{\mu}(1+\delta_1))^{v}x^{-v}\sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)}k^{v}P(N(t)=k)\\&=B_1+B_2\end{aligned}\tag{18}$$

先来估计 B_1. 由假设条件 3 知，当 $t\to\infty$ 时有

$$\sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)}kP(N(t)=k)=o(\lambda(t))$$

根据命题 1 的(2) 知，对于任意固定的 $\gamma>0$，当 $t\to\infty$ 时，存在某个常数 $C'>0$，对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+\delta}$ 一致地有

$$\frac{\overline{F}(x/2v)}{\overline{F}(x)}\leqslant C'$$

由此可得

$$\begin{aligned}B_1&\leqslant C'(1+\delta_8)\,\overline{F}(x)\sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)}kP(N(t)=k)=\\&C'(1+\delta_8)\,\overline{F}(x)o(\lambda(t))=o(\lambda(t)\,\overline{F}(x))\end{aligned}\tag{19}$$

接下来估计 B_2. 由命题 1 的(1) 知，取 $v=p>\gamma_F$，当 $x\to\infty$ 时有 $x^{-v}=o(\overline{F}(x))$，再由假设条件 3 知，对于任意固定的 $\gamma>0$，当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+\delta}$ 一致地有

$$\begin{aligned}B_2&=M(e\overline{\mu}(1+\delta_1))^{v}x^{-v}\sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)}k^{v}P(N(t)=k)=\\&O(\lambda(t))(e\,\overline{\mu}(1+\delta_1))^{v}x^{-v}=\\&o(\lambda(t)\,\overline{F}(x))\end{aligned}\tag{20}$$

将式(14) ～ (20) 代入到式(13) 中可知定理结论成立. □

3　结　语

本文利用已知的关于独立随机变量的随机和的大偏差的求解方法，在随机变量之间引入

UEND 和 φ 混合的相依关系，得到了带有这样两种相依关系的、服从重尾分布的随机变量的随机和的尾概率的结论，它将独立不同分布的随机变量的随机和的大偏差形式推广到相依不同分布的随机变量的随机和的大偏差形式上，建立了带有 *UEND* 和 φ 混合的相依关系的不同分布的随机变量的随机和的一致渐近公式.

参考文献：

[1] Klüppelberg C, Mikosch T. Large deviations of heavy-tailed random sums with applications in insurance and finance [J]. **Journal of Applied Probability**, 1997, **34**:293-308.

[2] Ng K W, TANG Qi-he, YAN Jia-an, *et al*. Precise large deviations for sums of random variables with consistently varying tails [J]. **Journal of Applied Probability**, 2004, **41**:93-107.

[3] Skučaitë A. Large deviations for sums of independent heavy-tailed random variables [J]. **Lithuanian Mathematical Journal**, 2004, **44**(2):198-208.

[4] 陈 琳，刘维奇. 重尾分布族及其关系图[J]. 高校应用数学学报，2009，**24**(2):166-174.
CHEN Lin, LIU Wei-qi. Classes of heavy-tailed distribution and Venn diagrams of their relations [J]. **Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities (Ser A)**, 2009, **24**(2):166-174. (in Chinese)

[5] Bingham N H, Goldie C M, Teugels J L. **Regular Variation** [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

[6] Athreya K B, Pantula S G. Mixing properties of Harris chains and autoregressive processes [J]. **Journal of Applied Probability**, 1986, **23**:880-892.

[7] Bradley R C. On the φ-mixing condition for stationary random sequences [J]. **Transactions of the American Mathematical Society**, 1983, **276**(1):55-66.

[8] Fryzlewicz P, Subba R S. Mixing properties of ARCH and time-varying ARCH processes [J]. **Bernoulli**, 2011, **17**(1):320-346.

[9] CHEN Yi-qiang, CHEN An-yue, Ng K W. The strong law of large numbers for extended negatively dependent random variables [J]. **Journal of Applied Probability**, 2010, **47**:908-922.

[10] 薛留根. 混合序列强大数定律的收敛速度[J]. 系统科学与数学，1994，**14**(3):213-221.
XUE Liu-gen. Convergence rates of the strong law of large numbers for a mixing sequence [J]. **Systems Science and Mathematical Science**, 1994, **14**(3):213-221. (in Chinese)

Precise large deviations for random sum of *UEND* and φ-mixing random variables

HUA Zhi-qiang*[1,2], SONG Li-xin[1], FENG Jing-hai[1]

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. College of Mathematics, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao 028000, China)

Abstract: The *UEND* and φ-mixing dependent random variables are introduced, and the issue of tail probability of random sum of *UEND* and φ-mixing random variables is investigated. By using a method of the precise large deviation of random sum of dependent random variables, the asymptotic behavior of random sum of heavy-tailed random variables is obtained. The conclusions are extended from independent non-identical distributed random variables to dependent and non-identical distributed random variables.

Key words: upper extended negative dependence; φ-mixture; random sum; precise large deviation