

频带约束下刚架结构优化问题可行域研究

倪长辉^{1,2}, 阎军^{*1,2}, 程耿东^{1,2}, 郭旭^{1,2}

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 大连理工大学 工程力学系, 辽宁 大连 116024)

摘要: 研究频带约束下刚架结构轻量化设计问题的可行域基本性质. 刚架结构中梁的断面积取为设计变量, 采用欧拉-伯努利梁的动力刚度法及 W-W 算法精确求解结构的固有频率值. 利用 W-W 算法的特征值计数原理, 研究了前述优化问题的可行域的形状和联通性, 发现可行域呈现复杂的形状, 由多块非联通子域组成, 并且部分可行域子域可以是低维的. 还以三杆梁的尺寸优化和拓扑优化为例, 给出了可行域的具体形状, 展示了这一优化问题的可行域具有“强奇异性”. 可行域的这一特点给基于梯度类的优化算法带来了极大的困难, 需要采用其他手段处理, 也使这类问题有望用于测试各类优化软件算法.

关键词: 奇异性; 优化; 可行域; W-W 算法

中图分类号: O39; TU323.5 **文献标识码:** A **doi:** 10.7511/dllgxb201404002

0 引言

刚架结构是土木、航空航天、机械工程中常见的一类承载结构, 经常会承受频率在一定范围内变化的动力荷载. 为了避免结构和设备的破坏及失效, 通常要求结构固有频率远离激振力的频率或频带, 以避免共振. 因此, 以频率或频带为约束的结构优化是很重要的一类优化问题, 包括基频最大化^[1-6]、多阶频率约束下的优化^[7-8]、多阶固有频率及振型节点位置约束下的结构优化^[9-10], 及考虑频带约束的结构优化.

结构动力优化以结构动力分析为基础, 优化设计在迭代寻优过程中需要大量的分析, 因而希望有高效的结构动力分析方法. 对于激振源位于杆件中部的刚架结构, 为了获得比较精确的动力响应和频率分布, 如果采用通常的三次多项式形函数建立梁单元刚度和质量矩阵, 必须将每根杆件划分为多个梁单元, 这无疑显著增加了计算量, 而且精度不能保证.

为此, 本文采用 Kolousek^[11] 和 Howson^[12] 提

出的动力刚度矩阵法建立刚架结构的动力学方程, 以 W-W 算法^[13-15] 高效求解结构频率并进行优化. 本文重点研究受到频带约束的刚架结构优化问题的可行域形状.

1 可行设计列式

考虑一个刚架结构, 假定结构中所有梁的断面积是均匀的, 以各根梁的横截面积作为设计变量, 采用动力刚度阵方法建立动力学方程, 受到频带约束的刚架结构轻量化问题数学列式如下:

$$\begin{aligned} \text{Find } \mathbf{A} &= (A_1 \ \cdots \ A_m)^T \in \mathbf{R}^m \\ \text{s. t. } \quad &\mathbf{K}(\omega, \mathbf{A})\mathbf{u} = \mathbf{0}; \\ &\omega_k \leq \omega_1, \ \omega_{k+1} \geq \omega_n; \ k = 0, 1, \dots \\ &0 \leq A_i^l \leq A_i; \ i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{A}$ 为刚架基结构中梁的横截面积向量, 同时也为待优化的设计变量向量; A_i^l 为第 i 根梁的单元横截面积下限值, 其中当下限值为 0 时即可实现刚架结构的拓扑改变; m 为框架结构中梁的数量. $\mathbf{K}(\omega, \mathbf{A})$ 和 $\mathbf{u}$ 分别为动力刚度阵及相应频率对应的特征向量; ω_k 和 ω_{k+1} 分别为结构的第 k 和 $k+1$

1 阶角频率, ω_u 和 ω_l 分别为频带区间的上下限值. 如果将上式的频率约束修改为 $\omega_l \geq \omega_u$, 该可行设计问题就是常见的基频约束下的结构设计. 由于梁的振动依赖于梁断面的面积及惯性矩, 这个动力设计问题的求解必须对惯性矩与断面积的关系作出假定. 本文中, 规定惯性矩和断面积的平方成正比. 常见的圆断面、方断面, 及断面形状只允许相似变化的矩形断面都符合这一要求. 对于其他情况, 下面的讨论只需适当修改便可应用.

2 W-W 算法及频带约束下框架设计可行域分析

2.1 动力刚度法及 W-W 算法简介

动力刚度阵是 Kolousek^[11] 和 Howson^[12] 在 20 世纪 70 年代提出的, 对于欧拉-伯努利梁, 在局部坐标下单根梁的动力刚度矩阵形式如下:

$$k^e = \begin{pmatrix} B_1 \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -B_2 \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & T \frac{EI}{l^3} & Q \frac{EI}{l^2} & 0 & -R \frac{EI}{l^3} & H \frac{EI}{l^2} \\ 0 & Q \frac{EI}{l^2} & S \frac{EA}{l} & 0 & -H \frac{EI}{l^2} & C \frac{EA}{l} \\ -B_2 \frac{EA}{l} & 0 & 0 & B_1 \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -R \frac{EI}{l^2} & -H \frac{EI}{l^2} & 0 & T \frac{EI}{l^3} & -Q \frac{EI}{l^2} \\ 0 & H \frac{EI}{l^2} & C \frac{EA}{l} & 0 & -Q \frac{EI}{l^2} & S \frac{EA}{l} \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中: E 、 ρ 分别为材料的弹性模量和密度, A 、 I 分别为梁的横截面积和惯性矩, ω 为结构角频率, l 为杆长.

$$\begin{aligned} \lambda &= l \sqrt[4]{\rho A \omega^2 / EI}; \quad \nu = \omega l \sqrt{\rho / E}; \\ \Phi &= 1 - \cosh \lambda \cos \lambda; \quad B_1 = \nu \cot \nu; \quad B_2 = \nu \csc \nu; \\ T &= \frac{\lambda^3}{\Phi} (\sin \lambda \cosh \lambda + \cos \lambda \sinh \lambda); \\ R &= \frac{\lambda^3}{\Phi} (\sinh \lambda + \sin \lambda); \quad Q = \frac{\lambda^2}{\Phi} \sin \lambda \sinh \lambda; \\ H &= \frac{\lambda^2}{\Phi} (\cosh \lambda - \cos \lambda); \\ S &= \frac{\lambda}{\Phi} (\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda); \\ C &= \frac{\lambda}{\Phi} (\sinh \lambda - \sin \lambda) \end{aligned} \quad (3)$$

结构的总刚度矩阵可以由单根梁的刚度矩阵 (2) 经过适当坐标变换和组装^[16] 而成, 进而得到形式如下的非线性特征值方程:

$$K(\omega)u = 0 \quad (4)$$

K 是 ω 的超越函数, u 是相应频率对应的特征向量. 由于动力刚度阵的形函数是根据均匀梁的振动微分方程的精确解构造的, 对于刚架结构中的每根梁, 均只需要采用一个单元, 就可求得刚架结构的精确频率值. 为了求解这组方程 (4), 本文采用了 Williams 和 Wittrick^[13-15] 提出的 W-W 算法, 该方法可以保证某阶频率的精确求解, 而不会发生丢根、漏根的现象.

W-W 算法不直接计算结构的频率, 而是基于特征值计数技术, 首先计算出结构低于某个给定频率值 ω^* 的频率个数 J , 它由下面表达式给出:

$$J = J_0 + J_k; \quad J_0 = J_0(\omega^*), \quad J_k = s\{K(\omega^*)\} \quad (5)$$

其中 J_0 是当所有单元的两端固定 (本文中是将结构中每根梁的两端固定) 时, 结构的频率值小于 ω^* 的个数; $s\{K(\omega^*)\}$ 表示采用 Gauss 消元法或者 LDLT 分解将 $K(\omega^*)$ 变换成上三角阵后, 主对角线上负元素的个数. 利用这个结果就可以计算任意频率范围内的结构频率个数, 进而, 采用二分法或牛顿法就可精确地求出特定阶的频率值. 关于 W-W 算法的更多细节可以参考文献 [13-15].

2.2 频带约束下单根梁横截面积的不可行区

采用式 (5) 计算刚架结构在指定频率禁区为 (ω_l, ω_u) 的频率数, 其中 J_0 的计算方法为对于结构中所有梁, 将它们两端固定, 依次计算第 i 根梁在指定频率禁区为 (ω_l, ω_u) 的频率数 J_{0i} , $J_0 = \sum_{i=1}^m J_{0i}$, m 为框架结构中梁的数量.

单根梁在两端固定的边界条件下的频率值可以由以下表达式^[17] 求出:

$$\omega = \frac{\lambda^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (6)$$

其中 λ 分别为 4.730、7.835、 $(2j+1)\pi/2$ ($j \geq 3$).

以下讨论都假定梁横截面为实心圆, 则 $I = A^2/4\pi$, 则 (令 $\alpha^2 = \sqrt{E/\rho}/l^2$)

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (4.730\alpha)^2 \sqrt{\frac{I}{A}} = (4.730\alpha)^2 \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \\ \omega_2 &= (7.835\alpha)^2 \sqrt{\frac{I}{A}} = (7.835\alpha)^2 \sqrt{\frac{A}{4\pi}} \quad (7) \\ \omega_j &= \left[\frac{(2j+1)\pi\alpha}{2}\right]^2 \sqrt{\frac{I}{A}} = \\ &\quad \left[\frac{(2j+1)\pi\alpha}{2}\right]^2 \sqrt{\frac{A}{4\pi}}; j \geqslant 3\end{aligned}$$

对于指定频率禁区为 (ω_1, ω_u) ，则有以下情况：

情况 1 如果一阶频率落入禁区，则横截面积应满足

$$\omega_1 \leqslant (4.730\alpha)^2 \sqrt{A/4\pi} \leqslant \omega_u$$

换言之，当 $\frac{4\pi}{(4.730\alpha)^4}\omega_1^2 \leqslant A \leqslant \frac{4\pi}{(4.730\alpha)^4}\omega_u^2$ 时，梁的一阶频率将落入该频率禁区，因此这是一个不可行区。

情况 2 如果二阶频率落入禁区，则横截面积应满足

$$\omega_1 \leqslant (7.835\alpha)^2 \sqrt{A/4\pi} \leqslant \omega_u$$

或

$$\frac{4\pi}{(7.835\alpha)^4}\omega_1^2 \leqslant A \leqslant \frac{4\pi}{(7.835\alpha)^4}\omega_u^2$$

此区域为第 2 阶不可行区。落入该不可行区的断面积更靠近于远点，换言之，断面积更小。但是如果第 1 阶不可行区的下端点与第 2 阶不可行区的上端点相等，即 $\frac{4\pi}{(7.835\alpha)^4}\omega_u^2 = \frac{4\pi}{(4.730\alpha)^4}\omega_1^2$ ，也就是 $\omega_u = 2.74\omega_1$ 时，这两个不可行区连在一起。此时的不可行区为

$$\frac{4\pi}{(7.835\alpha)^4}\omega_1^2 \leqslant A \leqslant \frac{4\pi}{(4.730\alpha)^4}\omega_u^2$$

情况 3 如果 $j(j \geqslant 3)$ 阶频率落入禁区，则横截面积应满足

$$\omega_1 \leqslant \left[\frac{(2j+1)\pi\alpha}{2}\right]^2 \sqrt{A/4\pi} \leqslant \omega_u$$

或

$$\frac{64\pi}{[(2j+1)\pi\alpha]^4}\omega_1^2 \leqslant A \leqslant \frac{64\pi}{[(2j+1)\pi\alpha]^4}\omega_u^2$$

显然这是第 $j(j \geqslant 3)$ 阶不可行区。与第 1 阶和第 2 阶不可行区分析相同，如果第 3 阶不可行区和第 2 阶不可行区连通，需要满足 $\omega_u = 1.97\omega_1$ 。

如果第 j 阶与第 $j+1(j \geqslant 3)$ 阶不可行区连通，则需要满足

$$\frac{64\pi}{[(2j+1)\pi\alpha]^4}\omega_1^2 \leqslant \frac{64\pi}{[(2j+3)\pi\alpha]^4}\omega_u^2$$

或

$$\omega_u \geqslant \left(\frac{2j+3}{2j+1}\right)^2 \omega_1 \quad (8)$$

而且可以看出，如果条件(8) 成立，则从 j 至无穷阶频率对应的不可行区全部连通，即不可行区为

$$0 \leqslant A \leqslant \frac{4\pi}{[(2j+1)\pi\alpha]^4}\omega_u^2; j \geqslant 3$$

综上所述可以看出，对于结构中的单根梁而言，其在频率禁区 (ω_1, ω_u) 的约束下，一定存在一个值 $A_{\text{lim}} = \frac{4\pi}{(4.730\alpha)^4}\omega_u^2$ ，使得断面积大于此值时，梁的所有局部振动频率都大于此禁区的上界。可以看出，此值的大小只取决于材料、杆长和频率禁区的上限；同时可以看出在材料确定的情况下，频带的上限越大，该值也越大，为了使刚架结构以单根梁为主的局部振动频率高于频率禁区，梁的断面积必须大于此值。而在断面积大于零并小于这个值的区域内，断面积的不可行区是由多段不连通的线段组成的；不连通的不可行区线段的个数与材料及梁长度完全无关，只与梁的横截面形状及频率禁区的上下限值有关。进一步分析，由式(8) 可以求出

$$j \geqslant \frac{3-\mu}{2\mu-2}; \mu = \sqrt{\frac{\omega_u}{\omega_1}} > 1 \quad (9)$$

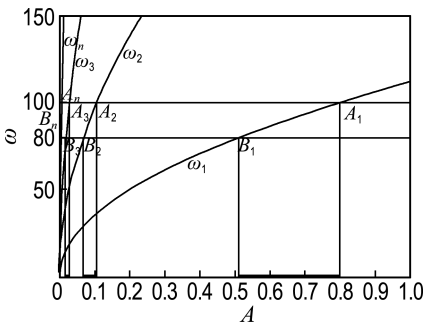
式(9) 中对 j 向上取整得整数 J ，则很容易就得到在 $j \geqslant J$ 后，所有的不可行区将完全连通起来，也就是说在横截面积 $0 \leqslant A < \frac{64\pi}{[(2J+1)\pi\alpha]^4}\omega_1^2$ 的区域全部为不可行区。

例如，对于量纲一化的梁， $E = 1, L = 1, \rho = 1$ ，如果频率禁区为 $[4, 5]$ ，则按照前面的推导 $J = 8$ ，在 $(3.954 \times 10^{-4}, 0.628)$ 有 7 个不连通的线段可行子域， $0 \leqslant A \leqslant 3.954 \times 10^{-4}$ 为不可行区， $A \geqslant 0.628$ 为可行区。

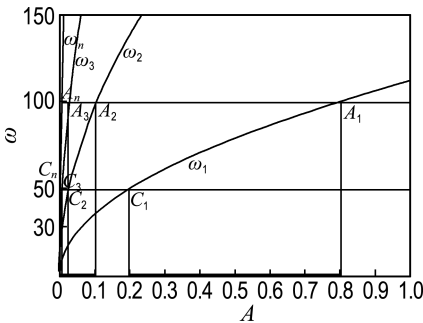
为了进一步说明上面的讨论，这里采用量纲一化参数，取 $E = \pi \times 10^2, L = 1, \rho = 1$ ，式(6) 为 $\omega = 5\lambda^2 \sqrt{A}$ ，频率随横截面积的变化关系如图 1 所示。这里定义 $\widehat{A_1 B_1}$ 表示 A_1 到 B_1 的弧线段， $\overline{A_1 B_1}$ 表示点 A_1 和 B_1 在横坐标 A 上的投影连成的线段。从图 1(a) 中可以看出当频率禁区为 $[80,$

100] 时,不可行域段 $\overline{A_k B_k} (k = 1, 2, 3, \text{图中横坐标轴上的粗直线段})$ 没有重叠的部分,也就是说这 3 段是孤立的不可行区,从前面的分析式(8)可知,此时 $J \geq 8$ 后对应的不可行区才全部连通。

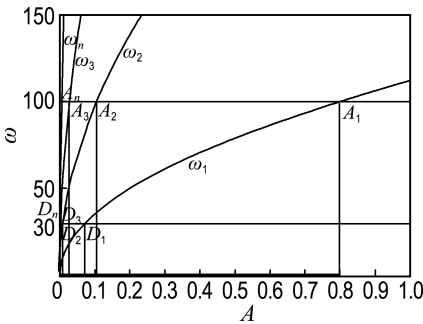
如果频率禁区为[50, 100], 不可行区 $\overline{A_3 C_3}$ 与 $\overline{A_2 C_2}$ 首尾相连(如图 1(b) 所示),这与由式(8)得到的 $J \geq 3$ 后不可行区将开始连通相吻合。当禁区变为[30, 100], $\overline{A_1 D_1}$ 与 $\overline{A_2 D_2}$ 交叉,也就是说此时第 1 阶频率之后的不可行区将全部连通(图 1(c)中的粗直线段),即出现了前面讨论的第二种情况,此时可行区退化为基频大于 100 的基频约束可行区。



(a) 频率禁区为[80,100]



(b) 频率禁区为[50,100]



(c) 频率禁区为[30,100]

图 1 不同频率禁区下频率随横截面积的变化
Fig.1 Frequency vs. cross sectional area under different frequency forbidden zone

综上所述,由前面讨论情况 2 可知,当 $\omega_u \geq 2.74\omega_1$ 时,该频带约束和以 ω_u 为基频约束的问题等价。

因此,对于确定的材料以及结构,可以根据频率禁区的上下界的比值,确定结构中每根杆件不可行区的分布,而一般地说,不可行区就会连接起来直到横截面积为零。通常刚架结构中有多个梁,也就是有多个设计变量,注意到每个设计变量不可行区的上述分布特征,可以知道在多维设计空间中,不可行域就构成一个个分离的超立方域。如图 2 所示的两杆梁模型,按照单梁振动决定的不可行域示意图如图 3 所示,图中白色区域为不可行域,但是, W-W 算法指出,频率的个数还取决于 $s\{\mathbf{K}(\omega^*)\}$, 因此,图 3 中的阴影区域是否可行,还需要进一步结合结构整体响应进行分析。

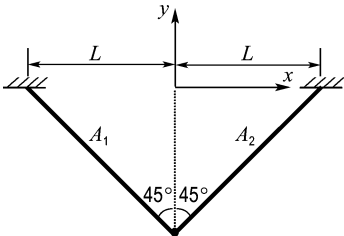


图 2 两杆梁模型

Fig. 2 Two-beam model

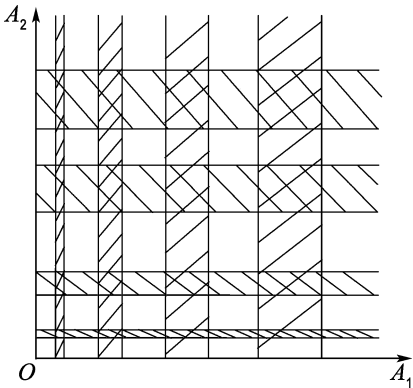


图 3 两杆刚架结构单梁振动的不可行域 (白色区域为不可行域)

Fig. 3 The infeasible domain of single beam of two-beam rigid frame structure (the white domain is infeasible)

3 频带约束下平面框架结构可行域分析

由式(5)可知,结构频率的个数除了来自单根

梁外,还取决于结构刚度阵 LDLT 分解或者高斯消元之后对角线上负元素的个数,即 $s\{\mathbf{K}(\omega^*)\}$. 为了进一步研究可行区的情况,以图 4 所示的三杆刚架模型研究列式(1)的可行区形状,其长为 1 m,质量为 0.5 kg,弹性模量为 210 GPa,密度为 7 800 kg/m³. 注意,列式(1)中当设计变量下限值 A_i^l 不为 0 时,该列式为只允许修改结构断面积的尺寸优化,当下限值为 0 时则为拓扑优化.

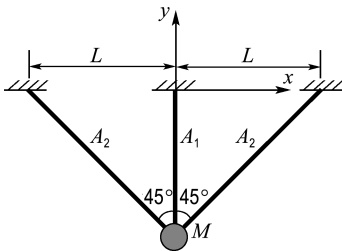


图 4 三杆梁模型
Fig. 4 Three-beam model

在图 4 三杆梁模型中,外侧两根梁属性相同,考虑频率禁区为 [80, 100] Hz 时,梁横截面积的下限值大于 0. 则此优化问题的可行域如图 5 所示,图中阴影区域为基频大于 100 Hz 的可行区域,4 种颜色(咖啡色、绿色、红色和紫色,全文受印刷条件所限,仅见深浅度变化)对应的区域也都是可行域,这些域内的设计中,频率禁区 [80, 100] Hz 位于该结构的 k 阶和 $k+1$ 阶之间,4 种颜色依次对应于 $k=1, 2, 3, 4$.

从图中可以看出频率禁区位于第 1 阶和第 2 阶之间时,可行区由咖啡色的两块独立不连通可行域组成. 随着 k 的增大,孤立可行域的数量也随着增加,并且这些可行域不断地向两个坐标轴逼近,这与前面一维的情况是相似的. 因为随着频率阶数的增加,要满足相同的频率值杆件会越来越细. 而图 5 中蓝色线 ($\omega_3 \leq 80$ Hz 等值线) 与坐标轴之间的空白区域内还存在 $k > 5$ 以后的众多可行域. 从一维分析的式(9)可以看出, k 大于某个值之后的区域都是不可行的,而这个值的大小与频带的上下限比值有关. 从图 5 中可以看出列式(1)的可行域由多个不连通的子域组成,并且具有非凸非凹性. 这样的优化可行域将会给基于梯度类的搜索可行解或最优解算法带来极大的困难,可能出现优化不能收敛的情况或者初值依赖性等现象.

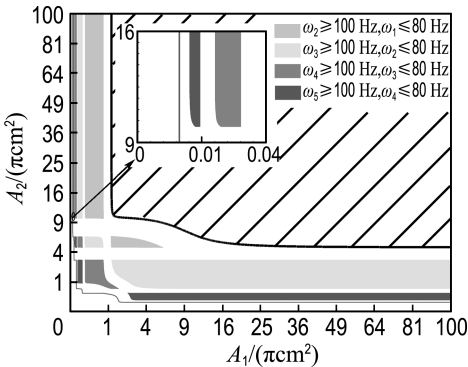


图 5 尺寸优化可行域形状 ($k \leq 4$)
Fig. 5 Feasible domain shape of size optimum problem ($k \leq 4$)

如果列式(1)的下限值为 0,则优化问题变成拓扑优化问题,由前文一维情况讨论,可行域还应该包括两个坐标轴上的可行域,如图 6 所示.

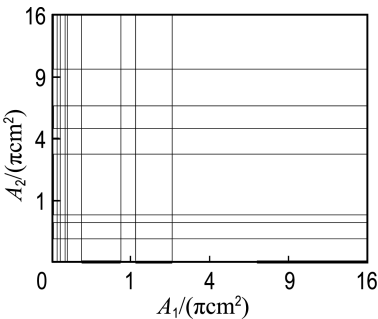


图 6 三杆刚架模型坐标轴上可行域 ($k \leq 4$)
Fig. 6 Feasible domain in axis of 3-beam rigid frame model ($k \leq 4$)

图 6 中,红色和蓝色线段分别为横轴与纵轴上的可行域一维子域. 可以看出,对三杆刚架模型的拓扑可行域除了图 5 所示的区域外,还包含图 6 所示的一维坐标轴上的孤立一维子域. 归纳上面的讨论可以看出,对于一个由 n 根梁组成的刚架结构,其 n 维空间上的可行域将包含众多的不连通可行子域,其中还有低维的退化子域,如果最优解在低维子域上的话,传统的基于梯度的优化算法对于这样的问题求解将比较困难,很难求得全局最优解;这种奇异现象是一种新型的拓扑优化奇异最优解现象,称为频带约束下结构拓扑优化问题的强奇异性^[18].

所以,框架结构受到频带约束的优化问题是具有奇异性的优化问题,这与 Cheng 等^[19-21]发现的应力奇异性现象不同. 因为应力奇异性中其可

行域虽然有低维子域存在,但是可行域是连通的;本文中的可行域是由不连通的几个子域(可能具有低维特征)组成,具有强奇异性,传统的基于梯度的搜索算法不容易得到可行解或最优解,因此需要考虑采用其他方法进行求解.这里需要特别指出的是,本文所发现的强奇异性的特例——基频约束下的框架结构轻量化问题,Liu 等^[22]采用遗传算法进行了优化设计,得到了最优解.一种新方法——PLMP 方法^[23]被发展出以处理基频约束下的奇异最优解.

4 结 语

基于欧拉-伯努利梁的动力刚度法及 W-W 算法精确分析框架结构的频率值,只需将一根梁作为一个单元计算就能够快速准确地求出任何指定阶数的结构频率值,而不需要将每根梁划分成很多单元,特别是对于高阶频率的求解,此方法具有快速准确的特点.这一方法的另一优点是,根据其频率计数方法,可以清晰地研究受到频带约束的框架结构的优化问题的可行域.通过研究发现,尺寸优化时,其可行域由多个不连通的子域组成;而拓扑优化时,其可行域除了多个不连通子域外,还包含退化的低维子域.考虑频带约束的结构拓扑优化问题具有强奇异性,这样的优化问题有望成为各类智能优化算法的标准考题.

参考文献:

- [1] Zarghamee M S. Frequency optimization [J]. **AIAA**, 1968, **6**(4):749-750.
- [2] Fox R, Kapoor M P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors [J]. **AIAA**, 1968, **6**(12):2426-2429.
- [3] Taylor J E. Optimum design of a vibrating bar with specified minimum cross section [J]. **AIAA**, 1968, **6**(7):1379-1381.
- [4] Elway M H S, Barr A D S. Some optimization problem in torsional vibration [J]. **Journal of Sound and Vibration**, 1978, **57**(1):1-33.
- [5] Wang B P, Chang Y K, Lawrence K L, *et al.* Optimum design of multiple configuration structures for frequency constraints [J]. **AIAA**, 1991, **29**(10):1761-1762.
- [6] Niu B, Yan J, Cheng G. Optimum structure with homogeneous optimum cellular material for maximum fundamental frequency [J]. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2009, **39**(2): 115-132.
- [7] 陈 前. 结构系统多频率优化技术 [J]. 振动与冲击, 1984(3):25-34.
CHEN Qian. Optimization technique for correction of the eigen-frequencies of structural system multifrequency [J]. **Vibration and Impact**, 1984(3):25-34. (in Chinese)
- [8] Mills-Curran W C, Schmit L A. Structural optimization with dynamic behavior constraints [J]. **AIAA**, 1985, **23**(1):132-138.
- [9] CHEN Ting-yu. Minimum weight structure subjected to both frequency and frequency response constraints [C] // **Proceedings of 9th International Modal Analysis Conference (IMAC)**. Florence: IMAC, 1991:261-267
- [10] 周传荣, 向锦武, 张阿舟. 有频率与振型节线位置要求的结构动力学设计 [J]. 振动、测试与诊断, 1994, **14**(3):1-7.
ZHOU Chuan-rong, XIANG Jin-wu, ZHANG A-zhou. Structural dynamical design with demands of natural frequencies and locations of nodal line of modal shape [J]. **Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis**, 1994, **14**(3):1-7. (in Chinese)
- [11] Kolousek V. **Dynamics in Engineering Structures** [M]. London:Butterworths, 1973.
- [12] Howson W P. A compact method for computing the eigenvalues of plane frames [J]. **Advances in Engineering Software**, 1979, **1**(4):181-190.
- [13] Williams F W, Wittrick W H. An automatic computational procedure for calculating nature frequencies of skeletal structures [J]. **International Journal of Mechanical Sciences**, 1970, **12**(9):781-791.
- [14] Wittrick W H, Williams F W. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures [J]. **Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, 1971, **24**(3): 263-284.
- [15] Wittrick W H, Williams F W. An algorithm for

computing critical buckling loads of elastic structures [J]. **Journal of Structural Mechanics**, 1973, **1**(4):497-518.

[16] Cook R D, Malkus D S, Plesha M E, *et al.* **Concepts and Applications of Finite Element Analysis** [M]. New York:Wiley, 2007.

[17] 张亚辉,林家浩. 结构动力学基础[M]. 大连:大连理工大学出版社, 2007.

ZHANG Ya-hui, LIN Jia-hao. **Fundamentals of Structural Dynamics** [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2007. (in Chinese)

[18] YAN Jun, NI Chang-hui, CHENG Geng-dong, *et al.* Singular phenomenon of integrated size and topology optimization of frame structures with exact frequency constraints [C] // **23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM2012)**. Beijing:ICTAM, 2012.

[19] CHENG Geng-dong, JIANG Zheng. Study on topology optimization with stress constraints [J]. **Engineering Optimization**, 1992, **20**(2):129-148.

[20] CHENG Geng-dong, GUO Xu. Epsilon-relaxed approach in structural topology optimization [J]. **Structural Optimization**, 1997, **13**(4):258-266.

[21] GUO Xu, CHENG Geng-dong, Olhoff N. Optimum design of truss topology under buckling constraints [J]. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2005, **30**(3):169-180.

[22] LIU Xiao-feng, CHENG Geng-dong, YAN Jun, *et al.* Singular optimum topology of skeletal structures with frequency constraints by AGGA [J]. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2012, **45**(3):451-466.

[23] NI Chang-hui, YAN Jun, CHENG Geng-dong, *et al.* Integrated size and topology optimization of skeletal structures with exact frequency constraints [J]. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2014:DOI 10.1007/s00158-013-1035-1.

Research on feasible domain of optimization problem
of rigid frame structures with frequency band constraints

NI Chang-hui^{1,2}, YAN Jun^{*1,2}, CHENG Geng-dong^{1,2}, GUO Xu^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The feasible domain of minimum weight designs of rigid frame structures with frequency band constraints is studied, in which the cross sectional area of beam is chosen as design variable. The natural frequencies of frame structures are solved with the dynamic stiffness method and W-W algorithm for Euler-Bernoulli beam. Then, the shape and connectivity of the feasible domain of the optimization problem are described exactly by eigenvalue counting technology. It is found that the feasible domain of the optimization problem is complex and disjointed, and some disjointed domains are low dimensional. The shape and connectivity of the feasible domain of the size and topology optimization problem of 3-beam model are studied, and results show that the singularity is very strong, which brings about great difficulties for the process of classical gradient-based optimization searching algorithm, and other way is needed. It also provides a bench mark problem for the test of soft optimum algorithm.

Key words: singularity; optimization; feasible domain; W-W algorithm