第54卷第4期 大连理工大学学报 Vol. 54, No. 4
2014年7月 Journal of Dalian University of Technology July 2014

文章编号: 1000-8608(2014)04-0469-08

星图 S_4 的交叉数

吕　波，徐喜荣*，杨元生，张　科，郑百功

（大连理工大学 电子信息与电气工程学部 计算机科学与技术学院，辽宁 大连　116024）

摘要：研究网络拓扑结构图星图 S_4 的交叉数问题. 首先构造星图 S_4 好的画法，得到了 S_4 交叉数的上界，然后给出了 S_4 交叉数下界的数学证明，最终得到 S_4 的交叉数的精确值为 8. 同时给出了与其具有同构关系的图 $S_{4,3}$ 和图 $A_{4,3}$ 的交叉数.

关键词：交叉数；画法；Star 图；(n,k)-Star 图；Arrangement 图
中图分类号：O157.9；TP302　　**文献标识码**：A　　**doi**：10.7511/dllgxb201404015

0 引 言

图 G 的交叉数 $cr(G)$ 表示在图 G 所有的平面画法中边的交叉点数目的最小值. 在图论界中，交叉数问题具有较为悠久的历史，并且吸引了诸如 Erdös、Guy 等著名数学家参与其研究工作[1-2]. 图的交叉数是研究图的非平面性的重要度量，在计算几何学、超大规模集成电路设计，以及计算机科学理论研究等方面有着广泛的应用[3-4]. 概括地讲，计算一个给定图的交叉数是非常困难的. 实际上，确定一个图的交叉数是 NP 完全问题[5]，而在通常情况下，只能给出图的交叉数的上下界[6-8]，目前仅仅确定了一些具有严格类型的图的交叉数. 对于一个给定图，可以很容易获得一个好的画法，且很难减少这种画法的交叉点的数目，但是，想要证明这个画法确实拥有最少的交叉点是非常困难的. 因此，不难发现，仅有较少图族的交叉数被确定，且确定这些图的交叉数需要较强地依赖于图本身的结构[9-10].

Star 图是一种著名的互联网拓扑结构，其拥有一些较好的性质[11]，如点对称、边对称以及最大容错性等. n 维 Star 图 S_n 在并行计算机的设计中已经被认为是一个比较理想的多处理器网络的拓扑结构. 本文给出 S_4 的交叉数为 8 的数学证明，并给出与其具有同构关系的 $S_{4,3}$ 和 $A_{4,3}$ 的交叉数.

1 定义与引理的证明

定义 1　Star 图

n 维 Star 图由 Akers 和 Krishnamurthy 提出[12]，记作 S_n. 共有 $n!$ 个顶点，其顶点集为在集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 上的长度为 n 的序列，标号为 $n!$ 个集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 上的组合变换. 顶点 i 与 j 有边相关联，当且仅当 i 和 j 的第一位与另外一位不同. 图 1 所示为 Star 图 S_2、S_3 和 S_4.

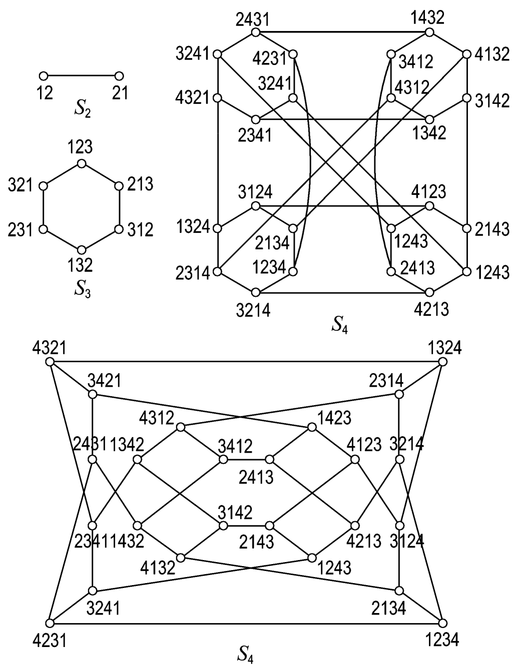

图 1　S_n 的一些画法

Fig. 1　Some drawings of S_n

收稿日期：2013-01-15；　**修回日期**：2014-06-02.
基金项目：国家自然科学基金资助项目（61170303，60973014，10671191）.
作者简介：吕　波(1983-)，男，硕士，E-mail：lvbo20909323@163.com；徐喜荣*(1967-)，女，博士，副教授，E-mail：xirongxu@dlut.edu.cn.

引理1 令 D 表示图 G_{12} 任意一个好的画法，那么 $\nu_D(G_{12})\geqslant 2$（如图2所示）.

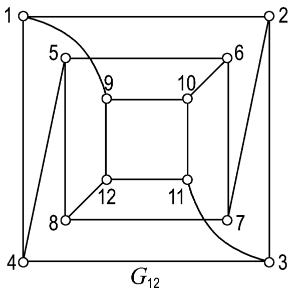

图2 图 G_{12} 的一个好的画法

Fig. 2 A good drawing of graph G_{12}

证明 令 G_{12}^* 表示 G_{12} 在最少删除 m 条边后所形成的最大平面子图，那么，G_{12}^* 有12个顶点，$18-m$ 条边. 再令 D_{12}^* 表示 G_{12}^* 的一个平面画法，p 表示 D_{12}^* 中面的个数. 对 D_{12}^* 应用Euler恒等式，有

$$12-(18-m)+p=2,\ p=8-m$$

由于在 G_{12} 中，除去3个4-圈外，剩余所有圈的长度至少为6，那么，计算 D_{12}^* 中所有面的边的个数，可以得到如下不等式：

$$3\times 4+(8-m-3)\times 6\leqslant 2\times(18-m);$$
$$4m\geqslant 6$$

可知 $m\geqslant 2$，因此 $\nu_D(G_{12})\geqslant 2$.

对于 $i=1,2,3$，令 $C_i^4=C_{v_{4i-3}v_{4i-2}v_{4i-1}v_{4i}v_{4i-3}}$.

引理2 令 D 表示 G_{12} 一个好的画法，并且至少有一对4-圈相交，那么 $\nu_D(G_{12})\geqslant 3$.

证明 反证法. 假设 $\nu_D(G_{12})\leqslant 2$. 那么，仅有一对4-圈相交，不妨设 C_1^4、C_2^4 相交. 因为 $\nu_D(G_{12})\leqslant 2$，故所有的4-圈都不自交，并且边 v_1v_9、v_3v_{11}、v_6v_{10} 和 v_8v_{12} 都是干净的，点 v_1、v_3、v_6 和 v_8 必须落在同一区域的边界上. 则边 v_1v_9、v_3v_{11}、v_6v_{10} 和 v_8v_{12} 中至少有一边被交，且使 $\nu_D(G_{12})\geqslant 3$，与假设矛盾（如图3(a)所示）.

引理3 令 D 表示 G_{12} 一个好的画法，任意一对4-圈都不相交，并且任意一对4-圈落在由第3个4-圈划分的同一区域中，那么 $\nu_D(G_{12})\geqslant 3$.

证明 反证法. 假设 $\nu_D(G_{12})\leqslant 2$.

情形1 至少有一个4-圈自交，不妨设 C_1^4 自交. 不失一般性地，假设边 v_1v_4 与 v_2v_3 相交. 因为 $\nu_D(G_{12})\leqslant 2$，所以两圈 $C_{v_1v_9v_{10}v_6v_7v_2v_1}$ 和 $C_{v_3v_{11}v_{12}v_8v_5v_4v_3}$ 中至少有一个圈不自交，不妨设 $C_{v_1v_9v_{10}v_6v_7v_2v_1}$ 不自交. 同时，两圈 $C_{v_4v_3v_{11}v_{10}v_9v_1v_4}$ 和 $C_{v_3v_4v_5v_6v_7v_2v_3}$ 中至少有一个圈不自交，不妨设 $C_{v_4v_3v_{11}v_{10}v_9v_1v_4}$ 不自交. 因为在边集 $\{v_{12}v_{11},v_{12}v_9,v_{12}v_8,v_8v_7\}$ 中至少有一边被交，那么，圈 $C_{v_3v_4v_5v_6v_7v_2v_3}$ 也不自交. 又因为 $\nu_D(G_{12})\leqslant 2$，且路径 $P_{v_5v_8v_{12}v_{11}}$ 至多只能被交一次，所以边 v_8v_{12} 只能落在圈 $C_{v_5v_4v_3v_{11}v_{10}v_6v_5}$ 的外部，致使边 $v_{12}v_9$ 和 v_8v_7 同时被交，且 $\nu_D(G_{12})\geqslant 3$，与假设矛盾（如图3(b)所示）.

情形2 所有4-圈都不自交. 因为 $\nu_D(G_{12})\leqslant 2$，不失一般性地，假设边 v_2v_7 和 v_4v_5 不与圈 C_1^4 和 C_2^4 相交，两边 v_2v_7 和 v_4v_5 也不相交，并且点 v_3 和 v_6 落在圈 $C_{v_1v_2v_7v_8v_5v_4v_1}$ 的内部（如图3(c)所示）. 因为，任意一对4-圈都不相交，并且任意两个4-圈落在由第3个4-圈划分的同一区域中，4-圈 C_3^4 必须落在圈 $C_{v_2v_7v_6v_5v_4v_3v_2}$ 的内部或者圈 $C_{v_2v_7v_6v_5v_4v_3v_2}$ 的外部. 根据对称性，假设4-圈 C_3^4 落在圈 $C_{v_2v_7v_6v_5v_4v_3v_2}$ 的外部，那么，边 v_3v_{11} 和 v_6v_{10} 都被交. 因为 $\nu_D(G_{12})\leqslant 2$，所以边 v_1v_9 和 v_8v_{12} 都是干净的. 导致两条边 v_3v_{11} 和 v_6v_{10} 中至少有一条边被交两次，$\nu_D(G_{12})\geqslant 3$，与假设矛盾.

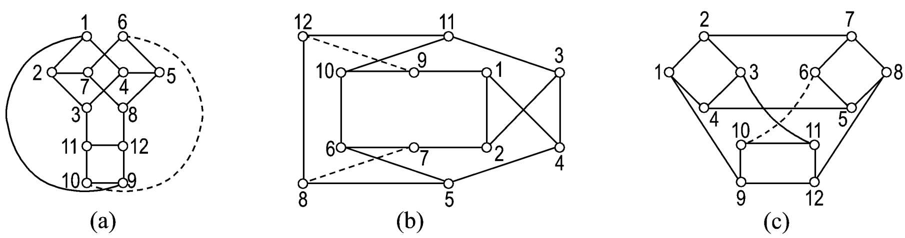

图3 G_{12} 的一些画法

Fig. 3 Some drawings of G_{12}

2　S_4 的交叉数证明

如图 4 所示,这里给出了一个 S_4 有 8 个交叉点的好的画法. 因此,可以得到如下引理.

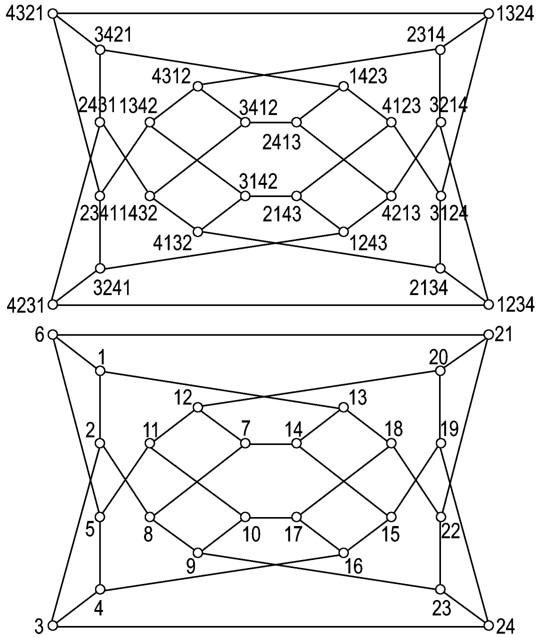

图 4　S_4 有 8 个交叉点的好的画法

Fig. 4　A good drawing of S_4 with 8 crossings

引理 4　$cr(S_4) \leqslant 8$.

证明 S_4 的交叉数 $cr(S_4)$ 为 8. 如图 4 所示,对 S_4 所有点进行重新编号.

对于 $i = 1,2,3,4$,令

$C^i_{S_4} = C_{v_{6i-5}v_{6i-4}v_{6i-3}v_{6i-2}v_{6i-1}v_{6i}v_{6i-5}}$,

$V^i_{S_4} = V(C^i_{S_4})$,

$E^i_{S_4} = E(C^i_{S_4})$,

$E^{i,j}_{S_4} = \{uv : u \in V^i_{S_4} \wedge v \in V^j_{S_4}\}$,

$E'^i_{S_4} = E^i_{S_4} \cup \bigcup_{(1\leqslant j\leqslant 4)\wedge j\neq i} E^{i,j}_{S_4}$,

$\overline{E'^i_{S_4}} = E(S_4) - E'^i_{S_4}$

为方便表述,做如下简写:

$C_i = C^i_{S_4}$, $V_i = V^i_{S_4}$, $E_i = E^i_{S_4}$,

$E_{i,j} = E^{i,j}_{S_4}$, $E'_i = E'^i_{S_4}$, $\overline{E'_i} = \overline{E'^i_{S_4}}$

由图 5 可知,$[\overline{E'_i}]$ 同胚于 G_{12}.

根据引理 1、2 和 3,可以得到:

引理 5　对于 $i = 1,2,3,4$,

(1) 令 D 表示$[\overline{E'_i}]$任意一个好的画法,那么 $\nu_D([\overline{E'_i}]) \geqslant 2$.

(2) 令 D 表示$[\overline{E'_i}]$一个好的画法,并且至少有一对 6- 圈相交,那么 $\nu_D([\overline{E'_i}]) \geqslant 3$.

(3) 令 D 表示$[\overline{E'_i}]$一个好的画法,任意一对 6- 圈都不相交,并且任意一对 6- 圈落在由第 3 个 6- 圈划分的同一区域中,那么 $\nu_D([\overline{E'_i}]) \geqslant 3$.

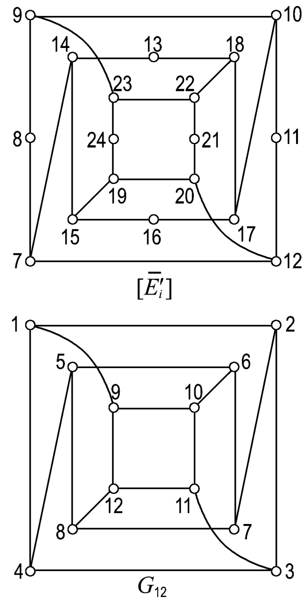

图 5　$[\overline{E'_i}]$同胚于 G_{12}

Fig. 5　$[\overline{E'_i}]$ homeomorphic to G_{12}

引理 6　令 D 表示 S_4 一个好的画法,并且至少有 3 对 6- 圈相交,那么 $\nu_D(S_4) \geqslant 8$.

证明　反证法. 假设 $\nu_D(S_4) \leqslant 7$. 因为每一对 6- 圈相交产生至少两个交叉点,那么现在,只可能有 3 对 6- 圈相交. 根据对称性,可分为 3 种情形:

情形 1　C_1 同时与 C_2、C_3 和 C_4 相交(如图 6(a) 所示). 根据引理 2,$\nu_D([\overline{E'_1}]) \geqslant 2$,那么,可得 $\nu_D(S_4) \geqslant 6 + 2 = 8$,与假设矛盾.

情形 2　C_1 与 C_2 相交、C_2 与 C_3 相交、C_3 与 C_4 相交. 根据对称性,不妨设 C_4 落在 C_2 的外部(如图 6(b) 所示). 根据引理 2,$\nu_D([\overline{E'_3}]) \geqslant 3$,并且 $\nu_D([\overline{E'_2}]) \geqslant 3$. 因为 $\nu_D(S_4) \leqslant 7$,所以 C_2 和 C_3 都不自交,且 $\bigcup_{j=1,2,4} E_{3,j} \cup \bigcup_{j=1,3,4} E_{2,j}$ 中的所有边都是干净的,那么,$E_{1,4}$ 中任何一条边都不与 $E_2 \cup E_3$ 中的边相交,并且两个 6- 圈 C_1 和 C_4 中至少有一个圈不自交,不妨设 C_1 不自交. 那么,$E_{1,4}$ 中至少有一条边与 E_1 的边相交,此时 C_4 必不自交,且 $E_{2,4}$ 中至少有一条边被交,可得 $\nu_D(S_4) \geqslant 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$, 与假设矛盾(如图 6(c)所示).

情形 3　C_1 与 C_2 和 C_3 相交, 且 C_2 和 C_3 也相交. 根据引理 2,对于 $i = 1,2,3$,有 $\nu_D([\overline{E'_i}]) \geqslant 3$.

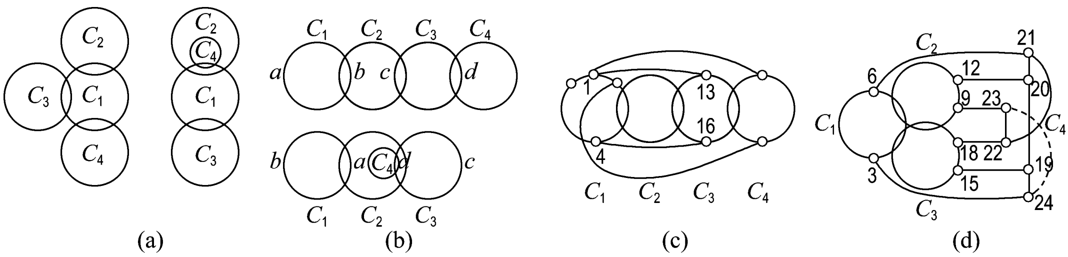

图6 至少有3对6-圈相交时 S_4 的一些画法

Fig. 6 Some drawings of S_4 where at least three pairs of 6-cycles cross each other

因为 $\nu_D(S_4)\leqslant 7$，所以 C_1、C_2 和 C_3 都不自交，并且 $\bigcup\limits_{j=1,2,3} E_{4,j}$ 中的所有边都是干净的．那么，两条路径 $P_{v_{21}v_{20}v_{19}v_{24}}$ 和 $P_{v_{21}v_{22}v_{23}v_{24}}$ 中至少有一条不自交，假设 $P_{v_{21}v_{20}v_{19}v_{24}}$ 不自交，这将致使边 $v_{21}v_{22}$ 和 $v_{24}v_{23}$ 同时被交，与假设矛盾(如图6(d)所示)．

引理7 令 D 表示 S_4 一个好的画法，有且仅有两对6-圈相交，那么 $\nu_D(S_4)\geqslant 8$．

证明 反证法．假设 $\nu_D(S_4)\leqslant 7$．根据对称性，可分为两种情形：

情形1 C_1 同时与 C_2 和 C_3 相交．根据 C_4 的位置，又可分为两种子情形．

情形1.1 C_4 落在 C_2 和 C_3 的外部．可区分为两种可能性，一种为 v_3 和 v_6 落在 C_1 不同的弧上(如图7(a)所示)，另一种为 v_3 和 v_6 落在 C_1 同一段弧上(如图7(b)所示)．根据引理2，$\nu_D([\overline{E'_1}])\geqslant 3$，因为 $\nu_D(S_4)\leqslant 7$，所以 C_1 不自交，$\bigcup\limits_{j=2,3,4} E_{1,j}$ 中的所有边都是干净的，且 E_1 中的任何边都不与 $E_{2,3}\cup E_{2,4}\cup E_{3,4}$ 中的边相交．那么，边 v_7v_{14} 和 $v_{10}v_{17}$ 中至少有一条必须落在 C_1 的内部，假设 v_7v_{14} 必须落在 C_1 的内部．这将导致边 $v_{15}v_{19}$ 与 E_1 的边相交，这与 E_1 中的任何边都不与 $E_{2,3}\cup E_{2,4}\cup E_{3,4}$ 中的边相交相矛盾．

情形1.2 C_4 落在 $C_3(C_2)$ 的内部(如图7(c)、(d)所示)．$E_{4,2}$ 中的每一条边与 E_3 的边至少相交一次．根据引理2，$\nu_D([\overline{E'_3}])\geqslant 3$，因为 $\nu_D(S_4)\leqslant 7$，所以 C_3 不自交，且 E_3 中的任何边都不与 $E_{1,2}\cup E_{1,4}$ 的边相交．那么，点 v_3 和 v_6 必须落在 C_3 的内部．$E_{1,2}$ 中至少有一条边与 E_3 的边相交，这与 E_3 中的任何边都不与 $E_{1,2}\cup E_{1,4}$ 的边相交相矛盾．

情形2 C_1 与 C_2 相交、C_3 和 C_4 相交．根据对称性，只需要考虑 C_3 和 C_4 落在 C_1 与 C_2 外部的情况(如图7(e)所示)．因为 $\nu_D(S_4)\leqslant 7$，所以可以得到：

$$\nu_D(E_1\cup E_3\cup E_{1,3})+$$
$$\nu_D(E_1\cup E_3\cup E_{1,3},E_{1,2}\cup E_{1,4}\cup E_{3,2}\cup E_{3,4})+$$
$$\nu_D(E_2\cup E_4\cup E_{2,4})+$$
$$\nu_D(E_2\cup E_4\cup E_{2,4},E_{1,2}\cup E_{1,4}\cup E_{3,2}\cup E_{3,4})\leqslant 3$$

不失一般性地，假设

$$\nu_D(E_1\cup E_3\cup E_{1,3})+$$
$$\nu_D(E_1\cup E_3\cup E_{1,3},E_{1,2}\cup E_{1,4}\cup E_{3,2}\cup E_{3,4})\leqslant$$
$$\nu_D(E_2\cup E_4\cup E_{2,4})+$$
$$\nu_D(E_2\cup E_4\cup E_{2,4},E_{1,2}\cup E_{1,4}\cup E_{3,2}\cup E_{3,4})$$

那么，可得

$$\nu_D(E_1\cup E_3\cup E_{1,3})+$$
$$\nu_D(E_1\cup E_3\cup E_{1,3},E_{1,2}\cup E_{1,4}\cup E_{3,2}\cup E_{3,4})\leqslant 1$$

两个6-圈 C_1 和 C_3 中至少有一个不自交，假设 C_1 不自交．那么，$E_{1,4}$ 中至少有一条边与 $E_1\cup E_3\cup E_{1,3}$ 的边相交，这将导致 C_3 不自交，且 $E_{3,2}$ 中至少有一条边与 $E_1\cup E_3\cup E_{1,3}$ 的边相交．这与 $\nu_D(E_1\cup E_3\cup E_{1,3})+\nu_D(E_1\cup E_3\cup E_{1,3},E_{1,2}\cup E_{1,4}\cup E_{3,2}\cup E_{3,4})\leqslant 1$ 相矛盾(如图7(f)所示)．

引理8 令 D 表示 S_4 一个好的画法，有且仅有一对6-圈相交，那么 $\nu_D(S_4)\geqslant 8$．

证明 反证法．假设 $\nu_D(S_4)\leqslant 7$，根据对称性，只需要考虑 C_3 落在 C_1 与 C_2 外部的情况．根据 C_4 的位置，可分为3种情形：

情形1 C_4 落在 C_3 的内部(如图8(b)所示)．$E_{4,1}$ 的每一条边至少与 E_3 的边交一次，$E_{4,2}$ 的每一条边至少与 E_3 的边交一次．根据引理2，$\nu_D([\overline{E'_3}])\geqslant 3$，又因为 $\nu_D(S_4)\leqslant 7$，所以 C_3 不自交，$\bigcup\limits_{j=1,2,4} E_{3,j}$ 中的所有边都是干净的．那么，边 v_1v_{13} 和 v_4v_{16} 是干净的．现在，$E_{3,2}$ 中至少有一条边被交，这与 $\bigcup\limits_{j=1,2,4} E_{3,j}$ 中的所有边都是干净的相矛盾．

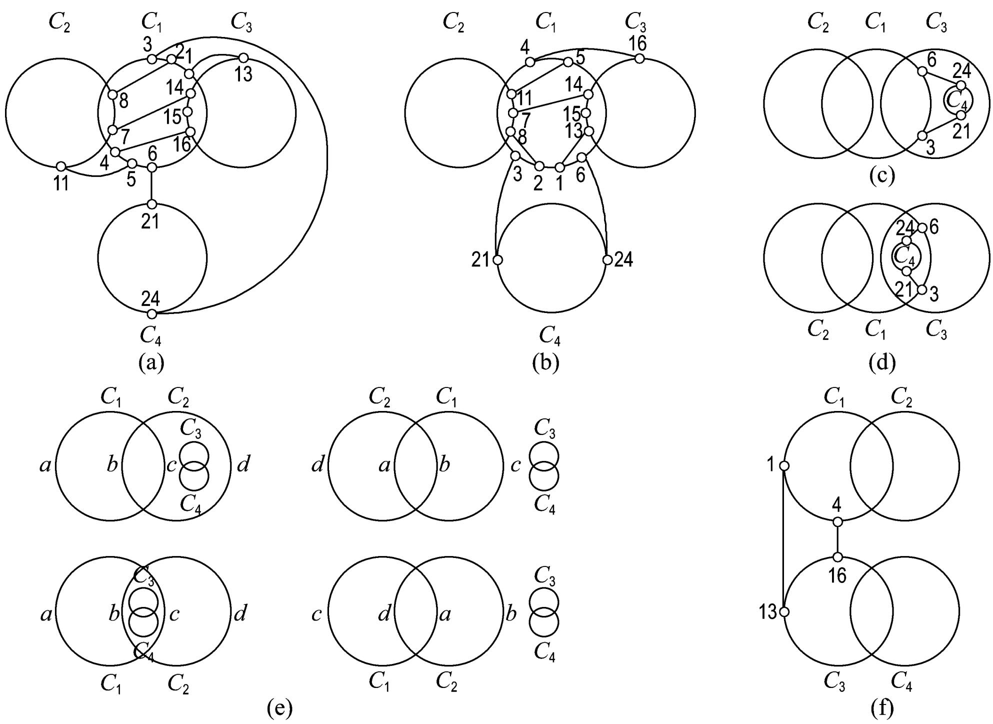

图 7　有且仅有两对 6-圈相交时 S_4 的一些画法

Fig. 7　Some drawings of S_4 where just two pairs of 6-cycles cross each other

情形 2　C_4 落在 C_2 的内部，但在 C_1 的外部（如图 8(c) 所示）. $E_{4,3}$ 的每一条边至少与 E_2 的边交一次. 根据引理 2，$\nu_D([\overline{E'_2}]) \geqslant 3$，又因为 $\nu_D(S_4) \leqslant 7$，所以 C_2 不自交，E_2 中的任何边都不与 $E_{1,3} \cup E_{1,4}$ 的边相交. 那么，点 v_3 和 v_6 必须落在 C_2 的内部. 导致 $E_{1,3}$ 的一条边至少与 E_2 的边交一次，这与 E_2 中的任何边都不与 $E_{1,3} \cup E_{1,4}$ 的边相交相矛盾.

情形 3　C_4 落在 C_2 和 C_1 的内部（如图 8(d) 所示）. $E_{4,3}$ 的每一条边至少与 E_1 的边交一次，且与 E_2 的边交一次. 根据引理 2，$\nu_D([\overline{E'_4}]) \geqslant 3$，又因为 $\nu_D(S_4) \leqslant 7$，所以 C_4 不自交，$\bigcup_{j=1,2} E_{4,j}$ 中的所有边都是干净的. 那么，边 $v_{21}v_3$ 和 $v_{24}v_6$ 都是干净的. 现在，$E_{4,2}$ 中至少有一条边被交，这与 $\bigcup_{j=1,2} E_{4,j}$ 中的所有边都是干净的相矛盾.

情形 4　C_4 落在 C_1、C_2 和 C_3 的外部. 因为 $\nu_D(S_4) \leqslant 7$，所以可以得到

$$\nu_D(E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}) +$$
$$\nu_D(E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}, E_{1,2} \cup E_{1,4} \cup E_{3,2} \cup E_{3,4}) +$$
$$\nu_D(E_2 \cup E_4 \cup E_{2,4}) +$$
$$\nu_D(E_2 \cup E_4 \cup E_{2,4}, E_{1,2} \cup E_{1,4} \cup E_{3,2} \cup E_{3,4}) \leqslant 5$$

不失一般性地，假设

$$\nu_D(E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}) +$$
$$\nu_D(E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}, E_{1,2} \cup E_{1,4} \cup E_{3,2} \cup E_{3,4}) \leqslant$$
$$\nu_D(E_2 \cup E_4 \cup E_{2,4}) +$$
$$\nu_D(E_2 \cup E_4 \cup E_{2,4}, E_{1,2} \cup E_{1,4} \cup E_{3,2} \cup E_{3,4})$$

那么，可得

$$\nu_D(E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}) +$$
$$\nu_D(E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}, E_{1,2} \cup E_{1,4} \cup E_{3,2} \cup E_{3,4}) \leqslant 2$$

情形 4.1　C_3 不自交（如图 8(e) 所示）. $E_{3,2}$ 中至少有一条边与 $E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}$ 的边相交，且 $E_{3,4}$ 中至少有一条边与 $E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}$ 的边相交. 那么，C_1 不自交，并且 $E_{1,4}$ 中至少有一条边与 $E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}$ 的边相交，这与

$$\nu_D(E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}) +$$
$$\nu_D(E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}, E_{1,2} \cup E_{1,4} \cup E_{3,2} \cup E_{3,4}) \leqslant 2$$

相矛盾.

情形 4.2　C_3 自交.

情形 4.2.1　C_1 不自交. $E_{1,4}$ 中至少有一条边与 $E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}$ 的边相交. 因此，$E_{3,2} \cup E_{3,4}$ 中的任何边不能与 $E_1 \cup E_3 \cup E_{1,3}$ 的边相交. 那么，如图 8(f) 所示，$E_{1,4}$ 的两条边总共至少被交 3 次. 根据引理 2，$\nu_D([\overline{E'_1}]) \geqslant 3$，那么，可得 $\nu_D(S_4) \geqslant 3 + 2 + 3 = 8$，与假设矛盾.

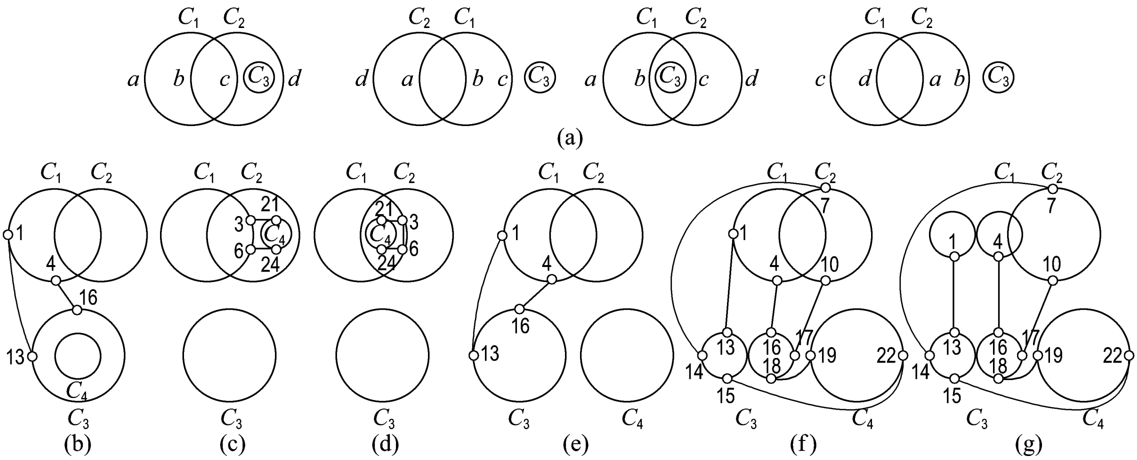

图 8 只有一对 6-圈相交时 S_4 的一些画法

Fig. 8 Some drawings of S_4 where just one pair of 6-cycles cross each other

情形 4.2.2 C_1 自交. $E_{1,4}\cup E_{3,2}\cup E_{3,4}$ 中的任何一条边不能与 $E_1\cup E_3\cup E_{1,3}$ 的边相交. 那么，如图 8(g) 所示，$E_{1,4}$ 中每条边至少与 $E_2\cup E_{2,3}$ 的边相交一次. 根据引理 2，$\nu_D([\overline{E'_1}])\geqslant 3$，那么，可得 $\nu_D(S_4)\geqslant 1+2+2+3=8$，与假设矛盾.

引理 9 令 D 表示 S_4 一个好的画法，任何一对 6- 圈都不相交，那么 $\nu_D(S_4)\geqslant 8$.

证明 反证法. 假设 $\nu_D(S_4)\leqslant 7$，令

$C'_1=C_{v_1v_{13}v_{18}v_{22}v_{21}v_6v_1}$，$C'_3=C_{v_2v_8v_9v_{23}v_{24}v_3v_2}$，

$C'_2=C_{v_{12}v_{20}v_{19}v_{15}v_{14}v_7v_{12}}$，$C'_4=C_{v_{11}v_{10}v_{17}v_{16}v_4v_5v_{11}}$，

$C^*_1=C_{v_1v_2v_8v_7v_{14}v_{13}v_1}$，$C^*_3=C_{v_6v_5v_{11}v_{12}v_{20}v_{21}v_6}$，

$C^*_2=C_{v_{16}v_{15}v_{19}v_{24}v_3v_4v_{16}}$，$C^*_4=C_{v_{17}v_{10}v_9v_{23}v_{22}v_{18}v_{17}}$

对于 $i=1,2,3,4$，令 $E'_i=E(C'_i)$，$E^*_i=E(C^*_i)$（如图 9 所示）.

因为 $\nu_D(S_4)\leqslant 7$，根据引理 3～5，可知 $v_1v_2\in E_1$ 不与 $E_2\cup E_3\cup E_4$ 中的任何边相交，且 $v_1v_2\in E^*_1$ 不与 $E^*_2\cup E^*_3\cup E^*_4$ 中的任何边相交. 因此，v_1v_2 只可能与边集 $\{v_4v_5, v_7v_{14}\}$ 中的边相交，而不能与 $E(S_4)$ 中其他任何边相交. 使用类似的讨论方法，可以找到，对于 $E(S_4)$ 中的任意一边 e，只能与表 1 中的两边相交，而不能与 $E(S_4)$ 中其他任何边相交.

根据对称性，可分为两种情形：

情形 1 C_2 落在 C_1 的内部，且 C_3 和 C_4 落在 C_1 的外部.

情形 1.1 C_4 落在 C_3 的内部（如图 10(a) 所示）. $E_{2,4}$ 的每一条边至少与 E_1 的边交一次，且与 E_3 的边交一次，$E_{2,3}$ 的每一条边至少与 E_1 的边交一次，$E_{4,1}$ 的每一条边至少与 E_3 的边交一次. 那么，可得 $\nu_D(S_4)\geqslant 4+2+2=8$，与假设矛盾.

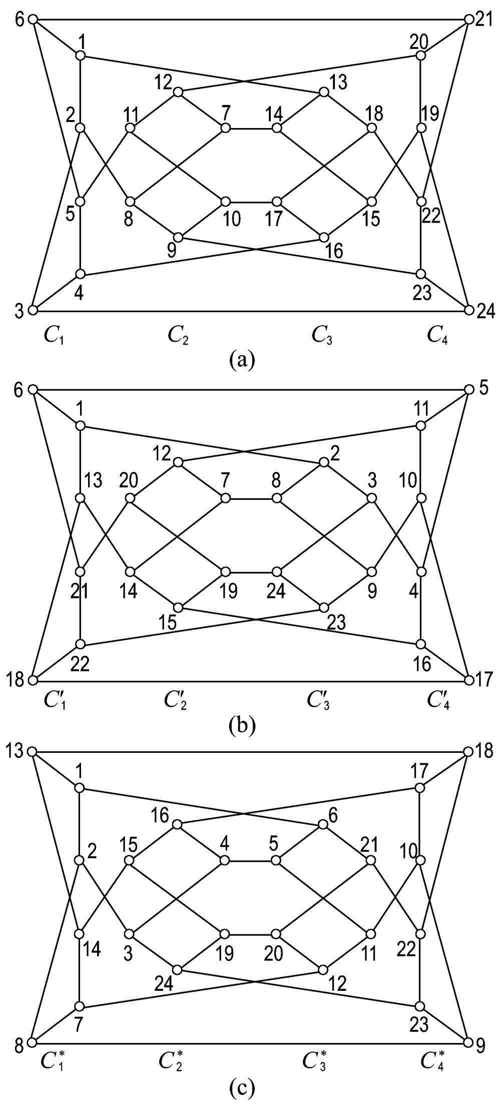

图 9 S_4 的 3 种画法

Fig. 9 Three drawings of S_4

表 1　只能与 C_e 中的两边相交，而不能与 $E(S_4)$ 中其他任何边相交的任意一边 e

Tab. 1　Each edge e which can not cross any edge of $E(S_4)$ except two edges of C_e

e	C_e	e	C_e	e	C_e
v_1v_2	$\{v_4v_5, v_7v_{14}\}$	v_1v_6	$\{v_3v_4, v_{18}v_{22}\}$	v_1v_{13}	$\{v_7v_8, v_{21}v_{22}\}$
v_2v_3	$\{v_5v_6, v_9v_{23}\}$	v_2v_8	$\{v_{13}v_{14}, v_{23}v_{24}\}$	v_3v_4	$\{v_1v_6, v_{15}v_{19}\}$
v_3v_{24}	$\{v_8v_9, v_{15}v_{16}\}$	v_4v_5	$\{v_1v_2, v_{10}v_{17}\}$	v_4v_{16}	$\{v_{10}v_{11}, v_{19}v_{24}\}$
v_5v_6	$\{v_2v_3, v_{12}v_{20}\}$	v_5v_{11}	$\{v_{16}v_{17}, v_{20}v_{21}\}$	v_6v_{21}	$\{v_{11}v_{12}, v_{13}v_{18}\}$
v_7v_8	$\{v_1v_{13}, v_{10}v_{11}\}$	v_7v_{12}	$\{v_9v_{10}, v_{15}v_{19}\}$	v_7v_{14}	$\{v_1v_2, v_{19}v_{20}\}$
v_8v_9	$\{v_3v_{24}, v_{11}v_{12}\}$	v_9v_{10}	$\{v_7v_{12}, v_{18}v_{22}\}$	v_9v_{23}	$\{v_2v_3, v_{17}v_{18}\}$
$v_{10}v_{11}$	$\{v_4v_{16}, v_7v_8\}$	$v_{10}v_{17}$	$\{v_4v_5, v_{22}v_{23}\}$	$v_{11}v_{12}$	$\{v_6v_{21}, v_8v_9\}$
$v_{12}v_{20}$	$\{v_5v_6, v_{14}v_{15}\}$	$v_{13}v_{14}$	$\{v_2v_8, v_{16}v_{17}\}$	$v_{13}v_{18}$	$\{v_6v_{21}, v_{15}v_{16}\}$
$v_{14}v_{15}$	$\{v_{12}v_{20}, v_{17}v_{18}\}$	$v_{15}v_{16}$	$\{v_3v_{24}, v_{13}v_{18}\}$	$v_{15}v_{19}$	$\{v_3v_4, v_7v_{12}\}$
$v_{16}v_{17}$	$\{v_5v_{11}, v_{13}v_{14}\}$	$v_{17}v_{18}$	$\{v_9v_{23}, v_{14}v_{15}\}$	$v_{18}v_{22}$	$\{v_1v_6, v_9v_{10}\}$
$v_{19}v_{20}$	$\{v_7v_{14}, v_{22}v_{23}\}$	$v_{19}v_{24}$	$\{v_4v_{16}, v_{21}v_{22}\}$	$v_{20}v_{21}$	$\{v_5v_{11}, v_{23}v_{24}\}$
$v_{21}v_{22}$	$\{v_1v_{13}, v_{19}v_{24}\}$	$v_{22}v_{23}$	$\{v_{10}v_{17}, v_{19}v_{20}\}$	$v_{23}v_{24}$	$\{v_2v_8, v_{20}v_{21}\}$

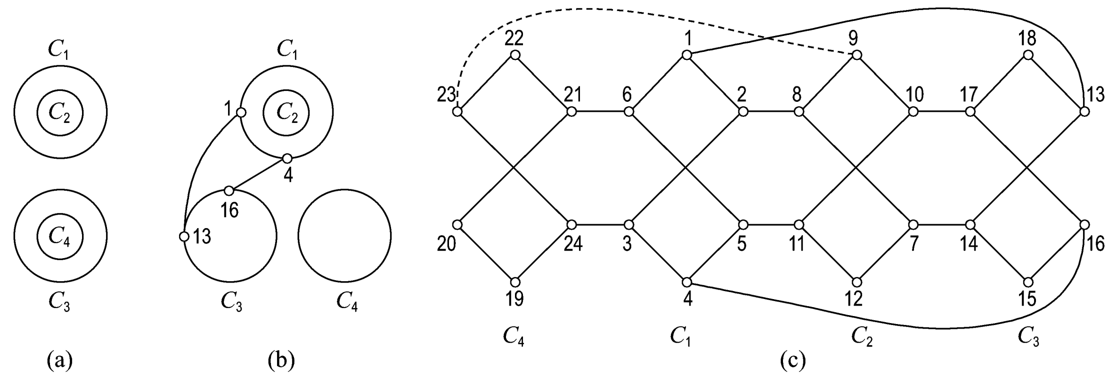

图 10　不同情形下 S_4 的 3 种画法

Fig. 10　Three drawings of S_4 under different conditions

情形 1.2　C_4 落在 C_3 的外部. $E_{2,3}$ 中的每一条边至少与 E_1 的边交一次，$E_{2,4}$ 中的每一条边至少与 E_1 的边交一次，根据引理 2，$\nu_D([\overline{E_1'}]) \geqslant 3$，又因为 $\nu_D(S_4) \leqslant 7$，所以 C_1 不自交，$\bigcup\limits_{j=2,3,4} E_{1,j}$ 中的所有边都是干净的. 那么，边 v_1v_{13} 和 v_4v_{16} 都是干净的. 现在，$E_{1,4}$ 中至少有一条边被交，这与 $\bigcup\limits_{j=2,3,4} E_{1,j}$ 中的所有边都是干净的相矛盾（如图 10(b)所示）.

情形 2　任意一个 C_i 落在其他 3 个 C_j $(1 \leqslant j \leqslant 4, j \neq i)$ 的外部. 根据表 1，$E_{1,2}$ 中的任意一条边不与 $E_1 \cup E_2$ 中的任何边相交，$E_{2,3}$ 中的任意一条边不与 $E_2 \cup E_3$ 中的任何边相交，$E_{1,3}$ 中的任意一条边不与 $E_1 \cup E_3$ 中的任何边相交. 那么，边 v_2v_3 必须与边 v_5v_6 相交，边 v_7v_8 必须与边 $v_{10}v_{11}$ 相交，边 $v_{13}v_{14}$ 必须与边 $v_{16}v_{17}$ 相交. 根据表 1，$E_{1,4}$ 中的任意一条边不与 $E_1 \cup E_4$ 中的任何边相交，$E_{2,4}$ 中的任意一条边不与 $E_2 \cup E_4$ 中的任何边相交，$E_{3,4}$ 中的任意一条边不与 $E_3 \cup E_4$ 中的任何边相交. 所以，边 $v_{20}v_{21}$ 必须与边 $v_{23}v_{24}$ 相交，这将导致 $v_9v_{23} \in E_4^*$ 与 E_1^* 的边至少相交一次（如图 10(c) 所示），与引理 3 ~ 5 相矛盾.

根据引理 1、3、4、5，可以得到

定理 1　$cr(S_4) = 8$.

3　推　论

前文的论述证明了 S_4 的交叉数为 8，而对于 (n,k)-Star 图和 Arrangement 图，因为 $S_{4,3} \cong S_4$ 以及 $A_{4,3} \cong S_4$，根据定理 1，可以得到

推论 1　$cr(S_{4,3}) = 8$.

推论 2　$cr(A_{4,3}) = 8$.

4　结　语

交叉数问题是图论难解问题之一，并被证明是 NP 完全问题，目前仅有较少图族的交叉数被

确定.本文首先构造星图 S_4 好的画法,得到 S_4 交叉数的上界,然后给出 S_4 交叉数下界的数学证明,从而得到 S_4 的交叉数.对于顶点个数较少的图的交叉数证明,正确区分证明情形是解决问题的关键.在下界的证明过程中,本文利用 S_4 的结构特性,将 S_4 中4个6-圈的圈交次数作为区分情形的条件,并首先选取图 G_{12} 作为研究对象,得到 G_{12} 的相关性质;而后利用 G_{12} 与$[\overline{E_i'}]$的同胚特性,得到相关引理,并在后续证明中反复运用该引理,从而缩小了讨论范围,简化了证明篇幅,最终得到 S_4 交叉数的确定值为8;同时给出了与其具有同构关系的 $S_{4,3}$ 和 $A_{4,3}$ 的交叉数.

参考文献:

[1] Erdös P, Guy R K. Crossing number problems [J]. **American Mathematical Monthly**, 1973, **80**:52-58.

[2] Guy R K. A combinatorial problem [J]. **Bulletin of the Malayan Mathematical Society**, 1960, **7**:68-72.

[3] Bhatt S N, Leighton F T. A framework for solving VLSI graph layout problems [J]. **Journal of Computer and System Sciences**, 1984, **28**:300-343.

[4] Bienstock D. Some provably hard crossing number problems [J]. **Discrete & Computational Geometry**, 1991, **6**(1):443-459.

[5] Garey M R, Johnson D S. Crossing numbers is NP-complete [J]. **SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods**, 1983, **4**(3):312-316.

[6] LIN Xiao-hui, YANG Yuan-sheng, ZHENG Wei-ping, *et al*. The crossing numbers of generalized Petersen graphs with small order [J]. **Discrete Applied Mathematics**, 2009, **157**(5):1016-1023.

[7] 杨元生,孙艳春,陆维明. 不超过9个顶点的所有图的交叉数[J]. 小型微型计算机系统, 2003, **24**(6):954-958.
YANG Yuan-sheng, SUN Yan-chun, LU Wei-ming. Crossing numbers of graphs with at most nine vertices [J]. **Mini-Micro Systems**, 2003, **24**(6):954-958. (in Chinese)

[8] 杨元生,王 丹,陆维明. 四正则图的交叉数[J]. 软件学报, 2002, **13**(12):2259-2266.
YANG Yuan-sheng, WANG Dan, LU Wei-ming. The crossing number of 4-regular graphs [J]. **Journal of Software**, 2002, **13**(12):2259-2266. (in Chinese)

[9] Dean A M, Richter R B. The crossing number of $C_4 \times C_4$ [J]. **Journal of Graph Theory**, 1995, **19**(1):125-129.

[10] PAN Sheng-jun, Richter R B. The crossing number of K_{11} is 100 [J]. **Journal of Graph Theory**, 2007, **56**(2):128-134.

[11] Li Tseng-kuei. Cycle embedding in Star graphs with edge faults [J]. **Applied Mathematics and Computation**, 2005, **167**(2):891-900.

[12] Akers S B, Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks [J]. **IEEE Transactions on Computers**, 1989, **38**(4):555-566.

Crossing number of Star graph S_4

LÜ Bo, XU Xi-rong*, YANG Yuan-sheng, ZHANG Ke, ZHENG Bai-gong

(School of Computer Science and Technology, Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The problem of the crossing number about network topological structure graph S_4 is studied. Firstly, by constructing a good drawing of Star graph S_4, an upper bound of the crossing number of S_4 is obtained. Then, the lower bound of the crossing number of S_4 is obtained by mathematical proof. Lastly, the conclusion is drawn that the exact value of the crossing number of S_4 is 8. Meanwhile, the crossing numbers of graph $S_{4,3}$ and graph $A_{4,3}$, which are isomorphic to S_4, are given.

Key words: crossing number; drawing; Star graph; (n,k)-Star graph; Arrangement graph