第54卷第4期
2014年7月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 54, No. 4
July 2014

应用数学

文章编号：1000-8608(2014)04-0482-05

一致变化尾的随机和局部精确大偏差

冯敬海， 宋立新*， 包莹莹

（大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024）

摘要： 基于带 O 正则变化独立同分布随机变量的部分和的局部精确大偏差的相关结论，将其对应的随机和分为3个部分，利用次指数函数的相互关系以及控制收敛定理，分别证明每个部分的渐近性. 最后证明了在随机变量的密度函数是一致变化尾时，其随机和的局部精确大偏差的渐近性.

关键词： 局部精确大偏差；渐近性；一致变化尾；随机和

中图分类号： O211　　**文献标识码：** A　　**doi：** 10.7511/dllgxb201404017

0 引 言

在介绍基本理论之前，先给出关于渐近的定义. 这个定义在本文以后的论述中将反复出现. 若两个正函数 $A(n,x)$ 和 $B(n,x)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\sup\sup_{x\in\Delta}\left|\frac{A(n,x)}{B(n,x)}-1\right|=0$$

则称在 $x\in\Delta$ 且 $n\to\infty$ 时，$A(n,x)\sim B(n,x)$ 一致成立. 精确大偏差的主流研究大多是基于全局情况的，例如 Klüppelberg 等[1]证明了随机变量满足 ERV 时，其非随机和及随机和的精确大偏差. 之后 Ng 等[2]将这个结论扩展到一致变化尾，并且在更宽泛的假设下得到了相同的结论. 然而，也有许多学者致力于局部精确大偏差. Baltrūnas[3]研究了当随机变量是独立同分布且为整值时的局部大偏差概率. Lin[4]证明了单边大偏差极限定理. 最近，Yang 等[5]证明了带 O 正则变化的独立同分布随机变量的部分和的局部精确大偏差. 基于以上相关研究背景，可以看到关于全局情况下部分和及随机和的大偏差理论是比较全面的，但是局部大偏差中的大部分研究都以部分和为主，关于随机和的相关结论，并没有较多文献涉及. 由于 Yang 等[5]给出了部分和的局部精确大偏差定理，本文对其结果进行扩展，并证明其随机和的局部精确大偏差.

1 相关定义

定义 1 如果对每个固定的 $y\in\mathbf{R}$，正可测函数 f 满足

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+y)}{f(x)}=1$$

则称 $f\in Ld$.

另一个重要的正则密度函数是带 O 正则变化密度函数.

定义 2 如果对每个固定的 $\lambda>0$，正可测函数 f 满足

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{f(x)}<\infty$$

则称 $f\in OR$.

下面给出密度函数属于次指数类的定义.

定义 3 如果正可测函数 $f\in Ld$，且满足

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{*2}(x)}{f(x)}=2$$

则称 $f\in Sd$.

本文主要研究的是一致变化尾密度函数，其定义如下：

定义 4 如果正可测函数 f 满足

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{x\to\infty}\frac{\inf\limits_{(1-\varepsilon)x\leqslant z\leqslant(1+\varepsilon)x}f(z)}{f(x)}=$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{x\to\infty}\frac{\sup\limits_{(1-\varepsilon)x\leqslant z\leqslant(1+\varepsilon)x}f(z)}{f(x)}=1$$

则称 $f\in Cd$.

收稿日期： 2013-06-16； **修回日期：** 2013-12-18.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(61175041,11101061)；大连理工大学前沿交叉学科基金资助项目(DUT10JS06)；高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(2010041110036).

作者简介： 冯敬海(1968-)，男，博士，教授，博士生导师，E-mail：jhfeng_dlut@163.com；宋立新*(1966-)，男，教授，博士生导师，E-mail：lxsong@dlut.edu.cn.

显然，可以得到如下关系：$Cd \subset Ld \cap OR$. 关于 Sd 与其他函数类的关系将在后面的引理中给出. 下面给出几乎处处递减的定义.

定义 5　如果一个可测函数 f 满足

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\sup_{u\geqslant x} f(u)}{f(x)} < \infty$$

那么称其是几乎处处递减的.

2　必要的引理及其证明

为了使定理的证明更加简洁、明确，在这里先给出两个引理. 本文均设 $\gamma > \max\{0, -\mu\}$ 是任意一个固定的正常数.

引理 1　假设可测函数 $f \in OR$，那么对任意的 $\gamma > \max\{0, -\mu\}$，存在两个正常数 C_1 和 C_2，使得对所有的 $x \geqslant \gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t 都有

$$C_1 f(x) \leqslant f(x+\mu\lambda(t)) \leqslant C_2 f(x)$$

证明　分两个部分证明引理. 令 $\hat{\alpha} = \max\{\alpha(f), 0\} + 1$，$\hat{\beta} = \min\{\beta(f), 0\} - 1$，其中

$$\alpha(f) = \lim_{y\to\infty} \frac{\log\left(\limsup_{x\to\infty} \frac{f(xy)}{f(x)}\right)}{\log y}$$

$$\beta(f) = \lim_{y\to\infty} \frac{\log\left(\liminf_{x\to\infty} \frac{f(xy)}{f(x)}\right)}{\log y}$$

当 $\mu > 0$ 时，利用文献[6]中引理 2.2.1 的不等式，则有对任意的 $x \geqslant \gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t，存在正常数 M_1、M_2 和 D_1，使得 $x + \mu\lambda(t) \geqslant x \geqslant D_1$ 且

$$\begin{aligned} M_1(1+\mu/\gamma)^{\hat{\beta}} \leqslant M_1((x+\mu\lambda(t))/x)^{\hat{\beta}} \leqslant \\ f(x+\mu\lambda(t))/f(x) \leqslant \\ M_2((x+\mu\lambda(t))/x)^{\hat{\alpha}} \leqslant \\ M_2(1+\mu/\gamma)^{\hat{\alpha}} \end{aligned}$$

记 $C_1 = M_1(1+\mu/\gamma)^{\hat{\beta}}$，$C_2 = M_2(1+\mu/\gamma)^{\hat{\alpha}}$，那么即可得到对所有的 $x \geqslant \gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t，$C_1 f(x) \leqslant f(x+\mu\lambda(t)) \leqslant C_2 f(x)$ 一致成立. 利用同样的方法可得到 $\mu < 0$ 时的结果，这样，就完成了上述引理的证明.

此外，下面的这个关系对于本文是十分重要的.

引理 2　假设一个可测密度函数 $f: \mathbf{R} \to [0, \infty)$ 是几乎处处递减的，且 $f \in Ld \cap OR$，那么 $f \in Sd$.

证明　由于 f 是几乎处处递减的密度函数，存在常数 M_3 使得对充分大的 x，有

$$\frac{f(x-y)}{f(x)} I_{\{y\leqslant x/2\}} < \frac{\sup_{z\geqslant x/2} f(z)}{f(x/2)} \frac{f(x/2)}{f(x)} \leqslant M_3 \frac{f(x/2)}{f(x)} \tag{1}$$

进一步，因为 $f \in OR$，所以存在一个常数 M_4 使得对充分大的 x，有

$$f(x/2)/f(x) \leqslant M_4 \tag{2}$$

这样，结合不等式(1)和(2)，对充分大的 x，有

$$\frac{f(x-y)}{f(x)} I_{\{y\leqslant x/2\}} \leqslant M_3 M_4 < \infty$$

因此，由控制收敛定理得

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f^{*2}(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \Big\{ \Big(\int_{-\infty}^{x/2} f(x-y) F(\mathrm{d}y) + \\ \int_{x/2}^{+\infty} f(x-y) F(\mathrm{d}y) \Big) \Big/ f(x) \Big\} = \\ \lim_{x\to\infty} 2\int_{-\infty}^{x/2} \frac{f(x-y)}{f(x)} F(\mathrm{d}y) = \\ 2\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x-y)}{f(x)} I_{\{y\leqslant x/2\}} F(\mathrm{d}y) = 2 \end{aligned}$$

其中，最后一个等式成立是因为 $f \in Ld$. 综上，得到 $f \in Sd$.

3　定理及其证明

在介绍本文的主要定理之前，需要给出随机过程 $(N(t))_{t\geqslant 0}$ 的两个必要假设，其中，当 $t \to \infty$ 时，$\lambda(t) = E(N(t)) \to \infty$.

假设 1　当 $t \to \infty$ 时，

$$\frac{N(t)}{\lambda(t)} \xrightarrow{p} 1$$

假设 2　对每个固定的 δ，存在正常数 $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ 使得

$$\sum_{k>(1+\delta)\lambda(t)} P(N(t) > k)(1+\varepsilon)^k \to 0$$

如果随机过程 $(N(t))_{t\geqslant 0}$ 是一个泊松过程，同时 $\lambda(t) \to \infty$，那么 $(N(t))_{t\geqslant 0}$ 满足假设 1 和假设 2.

定理 1　令 $X, X_1, X_2, \cdots$ 是一组独立同分布的随机变量，其密度函数 f 几乎处处递减，且独立于非负整值随机过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$. F 是随机变量 X 的分布函数. 假设对某个 $r > 1$，$E(X) = \mu < \infty$ 且 $E(X^+)^r < \infty$. 进一步，假设 $(N(t))_{t\geqslant 0}$ 满足假设 1 和假设 2. 记 $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$. 令 $\gamma > \max\{0, -\mu\}$ 和 T 是任意固定的正常数. 如果 $f \in Cd$，那么对于所有的 $x \geqslant \gamma\lambda(t)$ 在 $t \to \infty$ 时，

$$P(x < S(t) - \mu\lambda(t) \leqslant x + T) \sim T\lambda(t) f(x)$$

一致成立.

证明　记 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

$$\begin{aligned} P(x < S(t) - \mu\lambda(t) \leqslant x + T) = \\ \Big(\sum_{|n-\lambda(t)|\leqslant\varepsilon(t)\lambda(t)} + \sum_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)} + \\ \sum_{n-\lambda(t)>\varepsilon(t)\lambda(t)} \Big) P(x < S_n - \mu\lambda(t) \leqslant x + T) \times \\ P(N(t) = n) =: K_1 + K_2 + K_3 \end{aligned}$$

其中，当 $t\to\infty$，$\varepsilon(t)\to 0$. 首先，估计 K_1. 通过文献[5]中推论3.2对于非随机和的结论，可以得到对所有的 $x\geqslant\frac{\gamma}{2}n$，在 $n\to\infty$ 时，$P(x<S_n-\mu n\leqslant x+T)\sim n(F(x+T)-F(x))$ 一致成立. 当 $|n-\lambda(t)|\leqslant\varepsilon(t)\lambda(t)$ 时，对所有的 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t，

$$\begin{aligned}x-\mu(n-\lambda(t))&\geqslant x-|\mu|\varepsilon(t)\lambda(t)\geqslant\\&(\gamma-|\mu|\varepsilon(t))\lambda(t)\geqslant\\&\frac{\gamma-|\mu|\varepsilon(t)}{1+\varepsilon(t)}n\geqslant\frac{\gamma}{2}n\end{aligned}$$

一致成立. 因此，当 $0<\delta<1$ 是任意小时，对所有的 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t，

$$\begin{aligned}1-\delta\leqslant&\{P(x-\mu(n-\lambda(t))<S_n-\mu n\leqslant\\&x-\mu(n-\lambda(t))+T)\}/\{n(F(x-\\&\mu(n-\lambda(t))+T)-F(x-\\&\mu(n-\lambda(t))))\}\leqslant 1+\delta\end{aligned}\tag{3}$$

一致成立. 因此，对这样的 t 和 x，有

$$\begin{aligned}&\sum_{|n-\lambda(t)|\leqslant\varepsilon(t)\lambda(t)}(P(x<S_n-\mu\lambda(t)\leqslant x+T)\times\\&P(N(t)=n))\leqslant\\&\sum_{|n-\lambda(t)|\leqslant\varepsilon(t)\lambda(t)}((1+\delta)n(F(x-\mu(n-\lambda(t))+\\&T)-F(x-\mu(n-\lambda(t))))P(N(t)=n))\leqslant\\&\sum_{|n-\lambda(t)|\leqslant\varepsilon(t)\lambda(t)}((1+\delta)^2nTf(x-\mu(n-\lambda(t)))\times\\&P(N(t)=n))\leqslant\\&(1+\delta)^3(1+\varepsilon(t))T\lambda(t)f(x)\end{aligned}\tag{4}$$

利用 $f\in Ld$ 得到 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{Tf(x)}{F(x+T)-F(x)}=1$，因此第二个不等式成立. 又因为 $f\in Cd$ 且 $|n-\lambda(t)|\leqslant\varepsilon(t)\lambda(t)$，所以，对所有的 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t，$f(x-\mu(n-\lambda(t)))<(1+\delta)f(x)$ 一致成立，这样就得到了第三个不等式. 利用与式(3)和(4)相似的方法，即得到 $K_1\geqslant(1-\delta)^4(1-\varepsilon(t))T\lambda(t)f(x)$，这里只需注意对充分大的 t，利用假设1，则有 $P(|N(t)-\lambda(t)|\leqslant\varepsilon(t)\lambda(t))\geqslant 1-\delta$. 因此，令 $\delta\downarrow 0$，得到

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma\lambda(t)}\left|\frac{K_1}{T\lambda(t)f(x)}-1\right|=0\tag{5}$$

其次，估计 K_2. 记 $v=v(x)=-\log f(x)$，那么很容易得到 $v(x)$ 是慢变的且 $\lim\limits_{x\to\infty}v(x)=\infty$，详见文献[5]中第五部分. 又记 $\widetilde{X}=XI_{\{X<(x+\mu\lambda(t))/v^4\}}$；$\widetilde{X}_i=X_iI_{\{X_i<(x+\mu\lambda(t))/v^4\}}$，$i=1,2,\cdots$；$\widetilde{S}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\widetilde{X}_k$，$n=1,2,\cdots$. 令 $\eta=\eta(n,x)$ 是 $X_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 在 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 中满足 $X_i>(x+\mu\lambda(t))/v^4$ 的个数，即 $\eta=\sum\limits_{i=1}^{n}I_{\{X_i>(x+\mu\lambda(t))/v^4\}}$，那么

$$K_2=\sum_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}(J_0+J_1+J_2)P(N(t)=n)$$

其中 $J_i=P(x<S_n-\mu\lambda(t)\leqslant x+T,\eta=i)$，$i=0,1$；$J_2=P(x<S_n-\mu\lambda(t)\leqslant x+T,\eta\geqslant 2)$. 于是，这里将分3步，按照 J_0、J_1 和 J_2 分别得到 K_2 的估计.

步骤1 估计 J_0. 令 $\mu_+=EXI_{\{X\geqslant 0\}}$ 且 $\mu_-=EXI_{\{X\leqslant 0\}}$. 用 $x+\mu\lambda(t)$ 代替文献[5]中式(5.3)～(5.6)的 x，即可得到，对 $h>0$，

$$\begin{aligned}\frac{J_0}{f(x)}\leqslant\exp\{&-h(x+\mu\lambda(t))+v(x)+nh[(1+\\&\tau(h))\mu_-+\exp(h(x+\mu\lambda(t))/v^4)\mu_+]\}\end{aligned}\tag{6}$$

其中，当 $h\downarrow 0$ 时，$\tau(h)\to 0$. 又因为函数 $v(x)$ 是慢变的，所以，当 $x\to\infty$ 时，$v(x)/x$ 也趋于零. 若令 $h=\frac{Mv(x)}{x+\mu\lambda(t)}$ 且 $M=\max\left\{\frac{2(\gamma+\mu)}{\gamma},2\right\}$，则显然有当 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 且 $t\to\infty$ 时，$h\to 0$. 因此

$$\begin{aligned}&\frac{\sum\limits_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}J_0P(N(t)=n)}{T\lambda(t)f(x)}\leqslant\\&\sum_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}\Big(\frac{1}{T\lambda(t)}\times\\&\exp\{-v(x)G(x,t,n)\}P(N(t)=n)\Big)\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $G(x,t,n)=M-1-\frac{Mn}{x+\mu\lambda(t)}((1+\tau(h))\mu_-+\exp(M/v^3)\mu_+)$. 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\tau(h))\mu_-+\exp(M/v^3)\mu_+=\mu$，这里需要分类讨论. 当 $\mu>0$ 时，对所有的 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$，充分大的 t 和任意小的 δ，其中 $0<\delta<\gamma/2$，有

$$\begin{aligned}G(x,t,n)\geqslant&M-1-\frac{Mn}{x+\mu\lambda(t)}(\mu+\delta)\geqslant\\&M-1-\frac{M(1-\varepsilon(t))}{\gamma+\mu}(\mu+\delta)\geqslant\\&M-1-\frac{M}{\gamma+\mu}(\mu+\delta)>0\end{aligned}\tag{8}$$

当 $\mu\leqslant 0$ 时，对所有的 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t，有

$$\begin{aligned}G(x,t,n)\geqslant&M-1-\frac{Mn}{x+\mu\lambda(t)}(\mu-\delta)\geqslant\\&M-1>0\end{aligned}\tag{9}$$

因此，结合式(7)～(9)以及 M 的定义，有

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma\lambda(t)}\frac{\sum\limits_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}J_0P(N(t)=n)}{T\lambda(t)f(x)}=0\tag{10}$$

步骤2 估计 J_2. 用 $x+\mu\lambda(t)$ 代替文献[5]中式(5.8)～(5.10)的 x，并且记 $q:=\max\{-\beta(f),J_f^+\}+1<\infty$. 那么，存在正常数 R_1 和充分大的 t，当 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 时，$J_2\leqslant R_1Tf(x+\mu\lambda(t))n^2v^{8q}\overline{F}(x+\mu\lambda(t))$. 利用引理1，存在正常数 R_2，对所有的 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t，$J_2\leqslant$

$R_1R_2Tf(x)n^2v^{8q}\overline{F}(x+\mu\lambda(t))$. 于是，对所有的 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t，可以得到

$$\frac{\sum\limits_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}J_2P(N(t)=n)}{T\lambda(t)f(x)}\leqslant$$

$$\frac{\sum\limits_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}R_1R_2n^2v^{8q}\overline{F}(x+\mu\lambda(t))P(N(t)=n)}{\lambda(t)}\leqslant$$

$$\frac{R_1R_2}{\gamma}\frac{v^{8q}}{x^{r-1}}x^r\overline{F}(x+\mu\lambda(t))\times$$

$$P(N(t)-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t))$$

当 $v=v(x)$ 是慢变的且 $r>1$ 时，$v^{8q}/x^{r-1}\to 0$. 另一方面，由 $E(X^+)^r<\infty$ 很显然可以得到，当 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 时，$\lim\limits_{t\to\infty}x^r\overline{F}(x+\mu\lambda(t))=0$. 因此，

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma\lambda(t)}\frac{\sum\limits_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}J_2P(N(t)=n)}{T\lambda(t)f(x)}=0\qquad(11)$$

步骤 3　估计 J_1. 用 $x+\mu\lambda(t)$ 代替文献[5]中式(5.14)的 x. 然而，这里需要一个不同的划分. 对任意固定的 $\theta\in\left(\max\left\{\frac{\mu}{\gamma+\mu},0\right\},1\right)$，记

$$A=\left\{x+\mu\lambda(t)<S_n\leqslant x+\mu\lambda(t)+T,\right.$$
$$\left.X_n>\frac{x+\mu\lambda(t)}{v^4},\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}X_i\leqslant\frac{x+\mu\lambda(t)}{v^4}\right\}$$

则 $J_1=nP(A)=nP(A,S_{n-1}\leqslant\theta(x+\mu\lambda(t)))+nP(A,S_{n-1}>\theta(x+\mu\lambda(t)))=:J_{11}+J_{12}$. 首先，

$$\begin{aligned}J_{11}\leqslant{}&nP(x+\mu\lambda(t)<S_{n-1}+X_n\leqslant x+\mu\lambda(t)+\\&T,S_{n-1}\leqslant\theta(x+\mu\lambda(t)))\leqslant\\&n\sup_{u\leqslant\theta(x+\mu\lambda(t))}P(x+\mu\lambda(t)-\mu<X_n\leqslant x+\\&\mu\lambda(t)-\mu+T)\leqslant\\&n\sup_{z\geqslant(1-\theta)(x+\mu\lambda(t))}f(z)T\end{aligned}$$

由于 f 是几乎处处递减的，利用引理 1 和文献[6]命题 2.2.1 可知，存在常数 R_3、R_4 和 R_5，对所有的 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t，有

$$\begin{aligned}\sup_{z\geqslant(1-\theta)(x+\mu\lambda(t))}f(z)\leqslant{}&R_3f((1-\theta)(x+\mu\lambda(t)))\leqslant\\&R_3R_4f(x+\mu\lambda(t))\leqslant\\&R_3R_4R_5f(x)\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}&\sum_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}J_{11}P(N(t)=n)\Big/T\lambda(t)f(x)\leqslant\\&\left\{(1-\varepsilon(t))\sup_{z\geqslant(1-\theta)(x+\mu\lambda(t))}f(z)\Big/f(x)\right\}\times\\&P(N(t)-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t))\leqslant\\&R_3R_4R_5P(N(t)-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t))\end{aligned}$$

利用假设 1，得到

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma\lambda(t)}\frac{\sum\limits_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}J_{11}P(N(t)=n)}{T\lambda(t)f(x)}=0\quad(12)$$

其次，

$$\begin{aligned}J_{12}\leqslant{}&nP\Big(S_{n-1}>\theta(x+\mu\lambda(t)),\\&\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}X_i\leqslant\frac{x+\mu\lambda(t)}{v^4}\Big)\leqslant\\&nP(\widetilde{S}_{n-1}>\theta(x+\mu\lambda(t)))\end{aligned}$$

利用与 J_0 中式(6)相同的方法，令 $M'=\max\left\{\frac{2(\gamma+\mu)}{(\gamma+\mu)\theta-\mu},\frac{2}{\theta}\right\}$ 且 $h'=\frac{M'v(x)}{x+\mu\lambda(t)}$，则

$$\begin{aligned}&\frac{P(\widetilde{S}_{n-1}>\theta(x+\mu\lambda(t)))}{f(x)}\leqslant\\&\exp\{-\theta(x+\mu\lambda(t))h'+v(x)+(n-1)\times\\&h'[(1+\tau(h'))\mu_-+\exp(h'(x+\\&\mu\lambda(t))/v^4)\mu_+]\}=\exp\{-v(x)g(x,t,n)\}\end{aligned}$$

其中 $g(x,t,n)=\theta M'-1-\frac{M'}{x+\mu\lambda(t)}(n-1)((1+\tau(h'))\mu_-+\exp(M'/v^3)\mu_+)$. 因此，对 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t，有

$$\begin{aligned}&\frac{\sum\limits_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}J_{12}P(N(t)=n)}{T\lambda(t)f(x)}\leqslant\\&\sum_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}\Big(\frac{1-\varepsilon(t)}{T}\exp\{-v(x)g(x,t,n)\}\times\\&P(N(t)=n)\Big)\end{aligned}$$

利用与 $G(x,t,n)$ 相同的讨论方法，可以很容易地得到对 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t，有 $g(x,t,n)>0$. 因此，

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma\lambda(t)}\frac{\sum\limits_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}J_{12}P(N(t)=n)}{T\lambda(t)f(x)}=0\quad(13)$$

于是，利用对 J_{11} 和 J_{12} 的估计，由式(12)和(13)得

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma\lambda(t)}\frac{\sum\limits_{n-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}J_1P(N(t)=n)}{T\lambda(t)f(x)}=0\quad(14)$$

所以，结合式(10)、(11)和(14)，即得到关于 K_2 的估计：

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma\lambda(t)}\frac{K_2}{T\lambda(t)f(x)}=0\qquad(15)$$

最后，估计 K_3. 对任意小的 $0<\delta<1$，当 $(1+\varepsilon(t))\lambda(t)<n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)$ 时，利用与 K_1 中式(4)相似的方法，得

$$\begin{aligned}&\sum_{(1+\varepsilon(t))\lambda(t)<n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)}(P(x<S_n-\mu\lambda(t)\leqslant x+T)\times\\&P(N(t)=n))\Big/(T\lambda(t)f(x))\leqslant\\&(1+\delta)^4P((1+\varepsilon(t))\lambda(t)<N(t)\leqslant\\&(1+\delta)\lambda(t))\end{aligned}$$

因此，由假设 1，

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma\lambda(t)}\Big\{\sum_{(1+\varepsilon(t))\lambda(t)<n\leqslant(1+\delta)\lambda(t)}(P(x<S_n-\mu\lambda(t)\leqslant$$

$$x+T)P(N(t)=n))\Big/(T\lambda(t)f(x))\Big\}=0 \quad (16)$$

此外,利用文献[7]中的引理 4.1,对任意 $\varepsilon>0$,存在 $x_0=x_0(\varepsilon)$ 和 $V(\varepsilon)>0$,使得对 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t,有

$$\frac{\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)} P(x<S_n-\mu\lambda(t)\leqslant x+T)P(N(t)=n)}{T\lambda(t)f(x)}=$$

$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}\int_{x+\mu\lambda(t)}^{x+T+\mu\lambda(t)}\frac{f^{*n}(y)}{T\lambda(t)f(x)}\mathrm{d}yP(N(t)=n)\leqslant$$

$$\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}\int_{x+\mu\lambda(t)}^{x+T+\mu\lambda(t)}\frac{V(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n f(y)}{T\lambda(t)f(x)}\mathrm{d}yP(N(t)=n)\leqslant$$

$$\frac{\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)} V(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n \sup_{y>x+\mu\lambda(t)} f(y)P(N(t)=n)}{\lambda(t)f(x)}$$

由几乎处处递减的定义以及引理 1 知,存在常数 R_6 和 R_7,对 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t,有

$$\sup_{y>x+\mu\lambda(t)} f(y)\leqslant R_6 f(x+\mu\lambda(t))\leqslant R_6R_7 f(x)$$

因此,对 $x\geqslant\gamma\lambda(t)$ 和充分大的 t,有

$$\frac{\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)} P(x<S_n-\mu\lambda(t)\leqslant x+T)P(N(t)=n)}{T\lambda(t)f(x)}\leqslant$$

$$R_6R_7V(\varepsilon)\frac{E(1+\varepsilon)^{N(t)}I_{\{N(t)>(1+\delta)\lambda(t)\}}}{\lambda(t)}$$

由假设 2 得

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma\lambda(t)}\Big\{\sum_{n>(1+\delta)\lambda(t)}(P(x<S_n-\mu\lambda(t)\leqslant x+T)P(N(t)=n))\Big/(T\lambda(t)f(x))\Big\}=0 \quad (17)$$

因此,结合式(16)和(17),有

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma\lambda(t)}\frac{K_3}{T\lambda(t)f(x)}=0 \quad (18)$$

综上,结合 K_1、K_2 和 K_3 的结论,即式(5)、(15)和(18),就可以完成整个定理的证明.

4 结 语

本文以随机变量的非随机和局部精确大偏差为基础,将其扩展为随机和的情形,证明了当随机变量满足一致变化尾时,其随机和的局部大偏差渐近定理.

参考文献:

[1] Klüppelberg C, Mikosch T. Large deviations of heavy-tailed random sums with applications in insurance and finance [J]. **Journal of Applied Probability**, 1997, **34**(2):293-308.

[2] Ng K W, TANG Qi-he. Asymptotic behavior of tail and local probabilities for sums of subexponential random variables [J]. **Journal of Applied Probability**, 2004, **41**(1):108-116.

[3] Baltrūnas A. A local limit theorem on one-sided large deviations for dominated-variation distributions [J]. **Lithuanian Mathematical Journal**, 1996, **36**(1):1-7.

[4] LIN Jian-xin. A one-sided large deviation local limit theorem [J]. **Statistics & Probability Letters**, 2008, **78**(16):2679-2684.

[5] YANG Yang, Leipus R, Šiaulys J. Local precise large deviations for sums of random variables with O-regularly varying densities [J]. **Statistics & Probability Letters**, 2010, **80**(19-20):1559-1567.

[6] Bingham N H, Goldie C M, Teugels J L. **Regular Variation** [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

[7] YU Chang-jun, WANG Yue-bao, YANG Yang. The closure of the convolution equivalent distribution class under convolution roots with applications to random sums [J]. **Statistics & Probability Letters**, 2010, **80**(5-6):462-472.

Local precise large deviations for random sums with consistently varying tail

FENG Jing-hai, SONG Li-xin*, BAO Ying-ying

(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Based on the local precise large deviations for non-random sum results of random variables with O-regularly varying densities, the random sums of independent identical distribution random variables are divided into three parts and the asymptotic behavior of each part is proved by the relationship of subexponential functions and control convergence theorem. Finally, the asymptotic behavior of local precise large deviations for random sums with consistently varying tail is proved.

Key words: local precise large deviations; asymptotic behavior; consistently varying tail; random sums