第54卷第6期
2014年11月
大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology
Vol. 54, No. 6
Nov. 2014

文章编号: 1000-8608(2014)06-0676-06

基于全变差和P-Laplace模型的混合图像修复算法

李 丹*, 仲崇权, 王世强, 陈祖军

(大连理工大学 控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 图像修复是近年来图像处理研究的主要问题之一.在基于偏微分方程的修复算法中,全变差(total variation,TV)模型能够很好地保护图像边缘信息,但其各向异性扩散方式在平坦区域容易产生阶梯效应;而在图像平坦区域具有良好修复效果的P-Laplace模型,其各向同性扩散方式不适于修复图像边缘信息.将TV模型和P-Laplace模型有机结合起来,提出了一种混合图像修复算法.提出的扩散控制参数 k 能够根据待修复像素所在区域调节两种信息扩散方式的重要程度,实现混合图像修复.实验结果表明,所提算法获得了更好的修复结果.

关键词: 图像修复;全变差(TV)模型;P-Laplace模型

中图分类号: TN911.73　**文献标识码:** A　**doi:** 10.7511/dllgxb201406012

0 引 言

图像修复是数字图像处理的重要研究内容之一,具有广阔的应用领域,基于偏微分方程的修复算法是其中的一个重要分支[1].常用的全变差(total variation,TV)图像修复算法首先对破损的图像建立能量方程,通过极小化图像能量方程实现图像修复[2],该模型的保边性较好,但容易导致平坦区域过度平滑,产生阶梯效应[3-5].

针对全变差模型的阶梯效应问题,本文引入在图像的平坦区域梯度和梯度垂直的方向拥有相同扩散系数的P-Laplace模型,将其与TV模型有机结合起来,形成一种混合图像修复算法,在图像的边缘处和平坦区域都具有很好的修复效果,在保持图像边缘信息的同时能够减少阶梯效应对图像修复效果的影响,有利于对图像的更优修复.

1 TV模型和P-Laplace模型

1.1 TV模型修复原理

TV模型修复算法基本原理如图1所示,其能量方程为

$$R(u)=\int_{\Omega} r(|\nabla u|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

式中:r 为一个正的实函数;u 表示图像的像素值,且满足如下噪声约束条件:

$$\frac{1}{area(E)}\int(u-u_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sigma^2 \tag{2}$$

式中:$area(E)$ 表示破损区域的邻域面积,在空域中破损的图像会受到噪声污染,一般选取标准方差为 σ 的白噪声.u、u_0 分别表示修复后图像和原始图像的对应点像素值.采用Lagrange乘子法,可得使得 $R(u)$ 取得极小值的条件为

$$-\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)+\lambda(u-u_0)=0 \tag{3}$$

式中:∇为梯度算子.TV模型图像修复过程中常用差分方程的解近似偏微分方程的解[5-6].如图2所示,令 $\Lambda=(E,N,W,S)$ 为待修复点 O 的四邻域像素点,(e,n,w,s) 为四邻域半像素点.

令 p 代表四邻域点(E,N,W,S),记 $w_p=\dfrac{1}{|\nabla u_p|}$,$p\in\Lambda$,$h_{Op}=\dfrac{w_p}{\sum\limits_{p\in\Lambda}w_p+\lambda(O)}$,$h_{OO}=\dfrac{\lambda(O)}{\sum\limits_{p\in\Lambda}w_p+\lambda(O)}$.采用Gauss-Jacobi算法,则图像的像素值 u 的迭代公式为

$$u_O^{(n+1)}=\sum_{p\in\Lambda}h_{Op}^{(n)}u_p^{(n)}+h_{OO}^{(n)}u_O^{(n)} \tag{4}$$

收稿日期: 2014-03-13; **修回日期:** 2014-09-17.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61305034);大连理工大学基本科研业务费资助项目(DUT13JS03).
作者简介: 李 丹*(1977-),女,博士,副教授,E-mail:ldan@dlut.edu.cn.

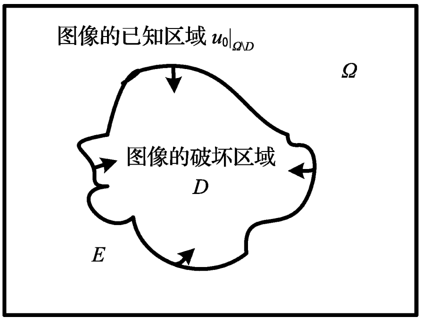

图 1　图像修复示意图

Fig. 1　Schematic diagram of image restoration

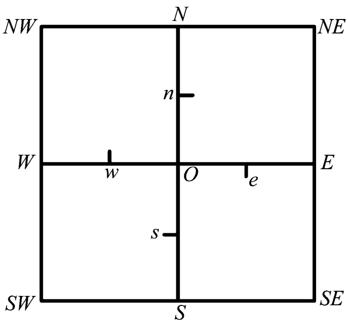

图 2　待修复像素点 O 及其邻域像素点示意图

Fig. 2　Schematic diagram of the object pixel point O and its neighborhood pixel point

1.2　P-Laplace 模型

为了解决待修复图像在平坦区域的邻域信息扩散问题，文献[7]中给出了 P-Laplace 模型：

$$\begin{cases}\Delta u_p - \lambda(u-u_0)=0, 1<p<\infty; & \text{在 } \Omega \text{ 上} \\ u=0; & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}\end{cases} \tag{5}$$

其中 $u_0 = u + N$，为含有加性噪声的图像模型. 其能量泛函方程为

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla u|^p \mathrm{d}\sigma + \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega\backslash D}(u-u_0)^2 \mathrm{d}\sigma \tag{6}$$

本文重点讨论 $p=2$ 时对应的 P-Laplace 模型：

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}\sigma + \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega\backslash D}(u-u_0)^2 \mathrm{d}\sigma \tag{7}$$

用变分的方法可推导出相应的 Euler 方程为

$$-\nabla\cdot(\nabla u) + \lambda(u-u_0) = \Delta u + \lambda(u-u_0) = 0 \tag{8}$$

2　混合模型的提出

从上述讨论可以看出，TV 模型能够在边缘处实现很好的扩散，对边缘信息有很好的保护效果[8-9]，但在平坦区域容易产生阶梯效应；而 P-Laplace 模型，在边缘方向和梯度方向的扩散系数是相同的，虽然可以在图像的平坦区域实现各向同性扩散，但对图像的边缘区域修复不佳. 最理想的方法就是既能很好地保护图像的边缘信息，又能在图像的平坦区域得到很好的扩散. 由此本文将两种模型有机结合起来，提出的混合修复模型如下：

$$J(u) = k\int_{\Omega} |\nabla u| \mathrm{d}\sigma + \frac{1-k}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}\sigma + \lambda\int_{\Omega\backslash D}(u-u_0)^2 \mathrm{d}\sigma \tag{9}$$

其中 $k \in [0,1]$ 是控制参数，其 Euler 方程为

$$-k\,\nabla\cdot\left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right] - \frac{1-k}{2}\nabla\cdot(\nabla u) + \lambda(u-u_0) = 0 \tag{10}$$

显然，通过控制参数 k，混合模型能够将 TV 模型与 P-Laplace 模型有机结合起来. 控制参数 k 的计算如下：

$$k = 1 - \frac{1}{1+|\nabla I|^2} \tag{11}$$

定义中控制参数 k 决定了在混合模型中两种算法对像素点进行修复时的相对重要程度，因而破损图像的不同区域所得扩散系数有所不同，达到对不同的区域实现更佳的修复效果. 考虑 k 的两种特殊情况，讨论在这两种特殊情况下的修复效果.

（1）当 $k=1$ 时，表示梯度模值 $|\nabla I| \to \infty$，即此像素位于非常突出的边缘部分，则该边缘是需要保护的. 此时，所提混合模型退化为 TV 模型，能够对边缘实现很好的保护.

（2）当 $k=0$ 时，表示梯度模值 $|\nabla I| \to 0$，即此像素位于图像的平坦区域，只需要一个简单快速的扩散就可以了. 此时，所提混合模型退化为 P-Laplace 模型，它是一个各向同性的扩散方程，由于在各个方向的扩散速度是一样的，其修复速度要快于 TV 模型. 同时在平坦区域使用各向同性扩散方式可以避免各向异性扩散带来的阶梯效应的影响. 所以在平坦区域使用各向同性的扩散方程在效果上要优于 TV 模型.

可以看出，参数 k 可用于控制等照度线切线方向和垂直方向的扩散系数. 从以上分析可知，由于参数 k 的加入，所提混合模型可以根据待修复像素点的所在区域决定 TV 模型和 P-Laplace 模型在修复过程中的重要程度，使得修复效果达到最佳.

类似于 TV 模型，混合模型的数值实现如下：

$$|\nabla u_e|=\sqrt{\left(\frac{u_E-u_O}{h}\right)^2+\left(\frac{u_{NE}-u_{SE}+u_N-u_S}{4h}\right)^2} \tag{12}$$

$$|\nabla u_w|=\sqrt{\left(\frac{u_W-u_O}{h}\right)^2+\left(\frac{u_{NW}-u_{SW}+u_N-u_S}{4h}\right)^2} \tag{13}$$

$$|\nabla u_n|=\sqrt{\left(\frac{u_N-u_O}{h}\right)^2+\left(\frac{u_{NE}-u_{NW}+u_E-u_W}{4h}\right)^2} \tag{14}$$

$$|\nabla u_s|=\sqrt{\left(\frac{u_S-u_O}{h}\right)^2+\left(\frac{u_{SE}-u_{SW}+u_E-u_W}{4h}\right)^2} \tag{15}$$

由式(10) 以及式(11) ～ (15) 可得混合模型的修复公式为

$$u(i,j)=\frac{k\sum\limits_{m\in Q,n\in q}\frac{u_m}{|\nabla u_n|}}{b}+\frac{\frac{1-k}{2}\sum\limits_{m\in Q}u_m}{b}+\lambda\frac{u_0}{b} \tag{16}$$

其中 $b=2(1-k)+k\sum\limits_{m\in Q,n\in q}\frac{1}{|\nabla u_n|}+\lambda$.

3　实验结果及分析

3.1　实验结果

如图 3～8 所示，本文选取 Lena 文字破损图像、Lena 划痕图像、摄影师文字破损图像、摄影师划痕图像，以及辣椒文字破损图像、辣椒划痕图像，对 6 幅图像分别采用 P-Laplace 模型、TV 模型及所提混合模型进行修复实验，并给出其峰值信噪比. 峰值信噪比是评价图像修复结果的参数之一，该值越大说明修复效果越好，其计算公式如下：

$$P_{\mathrm{SNR}}=10\times\log 10\left[(255\times255)\Big/\frac{1}{M\times N}\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}(U(i,j)-U_0(i,j))^2\right] \tag{17}$$

式中：M、N 分别表示一幅图像的行数和列数.

3.2　实验结果分析

根据以上讨论的情况可知，TV 模型能够对边缘进行很好的保护，但是在平坦区域采用单一方向的扩散方式，使得修复效果失真；而 P-Laplace模型虽然可以在边缘方向和梯度方向进行相同系数的扩散，在平坦区域抑制阶梯效应，但是对图像的边缘不能进行很好的保护.

为了更清楚直观地体现修复效果，在修复结果图上进行部分区域的标记，如图 3 中 Lena 眼部破损区域、图 4 中 Lena 唇部划痕区域，以及图 5 和图 6 中的像素平坦区域. 从上述标记区域可以看出，在对破损区域进行修复时，本文提出算法的修复效果在各幅图像上均优于 TV 模型和 P-Laplace模型，能够更有效地对破损信息进行修复，使得修复结果更能满足人类的视觉效果.

(a)文字破损图像　(b)P-Laplace模型　(c)TV模型　(d)混合模型

图 3　Lena 文字破损图像修复结果

Fig. 3　Restoration results of Lena image damaged by text

(a)划痕图像　(b)P-Laplace模型　(c)TV模型　(d)混合模型

图 4　Lena 划痕图像修复结果

Fig. 4　Restoration results of Lena image damaged by scratch

(a)文字破损图像　(b)P-Laplace模型　(c)TV模型　(d)混合模型

图 5　摄影师文字破损图像修复结果

Fig. 5　Restoration results of Photographer image damaged by text

(a)划痕图像　(b)P-Laplace模型　(c)TV模型　(d)混合模型

图 6　摄影师划痕图像修复结果

Fig. 6　Restoration results of Photographer image damaged by scratch

(a)文字破损图像　(b)P-Laplace模型　(c)TV模型　(d)混合模型

图 7　辣椒文字破损图像修复结果

Fig. 7　Restoration results of Peppers image damaged by text

(a)划痕图像　(b)P-Laplace模型　(c)TV模型　(d)混合模型

图 8　辣椒划痕图像修复结果

Fig. 8　Restoration results of Peppers image damaged by scratch

客观评价方面，从表 1～6 中的数据可以看出，相同迭代次数条件下，混合模型的 P_{SNR} 值在各幅图像上均大于 TV 模型和 P-Laplace 模型，说明了本文提出的图像修复算法的可行性和优越性. 这也证明本文提出的混合模型能够将 TV 模型对边缘信息的保护和 P-Laplace 模型在平坦区域的各向同性扩散的优点结合起来，能够达到图像修复的理想效果.

通过以上比较可知：本文提出的混合图像修复算法，能够将 TV 模型的各向异性扩散和

表 1　Lena 文字破损图像修复结果比较

Tab. 1　Restoration results comparison of Lena image damaged by text

迭代次数	T/s			P_{SNR}		
	TV 模型	P-Laplace 模型	混合模型	TV 模型	P-Laplace 模型	混合模型
1 000	1.17	1.07	1.64	88.04	77.06	89.86
2 000	2.17	2.10	4.58	87.91	77.07	89.85
3 000	3.34	3.11	7.03	87.80	77.11	89.82
4 000	4.28	4.23	9.40	88.23	77.27	89.82
5 000	5.30	5.87	11.46	87.92	77.10	89.86

表2 Lena划痕图像修复结果比较

Tab.2 Restoration results comparison of Lena image damaged by scratch

迭代次数	T/s			P_{SNR}		
	TV模型	P-Laplace模型	混合模型	TV模型	P-Laplace模型	混合模型
1 000	1.12	1.07	5.50	79.46	77.06	79.88
2 000	2.93	2.10	11.40	79.29	77.07	79.98
3 000	4.29	3.11	16.52	79.34	77.11	79.88
4 000	5.66	4.23	21.87	79.31	77.27	79.90
5 000	7.36	5.87	27.68	79.24	77.10	79.89

表3 摄影师文字破损图像修复结果比较

Tab.3 Restoration results comparison of Photographer image damaged by text

迭代次数	T/s			P_{SNR}		
	TV模型	P-Laplace模型	混合模型	TV模型	P-Laplace模型	混合模型
1 000	1.94	1.70	5.33	78.84	66.60	80.74
2 000	3.81	3.52	11.08	78.64	66.53	80.71
3 000	5.62	5.27	16.25	78.38	66.67	80.75
4 000	7.53	7.25	21.33	78.36	66.62	80.74
5 000	9.30	8.83	27.22	78.37	69.75	80.72

表4 摄影师划痕图像修复结果比较

Tab.4 Restoration results comparison of Photographer image damaged by scratch

迭代次数	T/s			P_{SNR}		
	TV模型	P-Laplace模型	混合模型	TV模型	P-Laplace模型	混合模型
1 000	1.75	1.47	3.45	84.70	78.75	87.66
2 000	3.45	2.97	6.89	84.18	78.70	87.65
3 000	5.08	4.49	10.30	83.28	78.76	87.68
4 000	6.63	5.96	13.45	83.76	78.84	87.66
5 000	8.96	7.47	17.10	83.70	78.81	87.66

表5 辣椒文字破损图像修复结果比较

Tab.5 Restoration results comparison of Peppers image damaged by text

迭代次数	T/s			P_{SNR}		
	TV模型	P-Laplace模型	混合模型	TV模型	P-Laplace模型	混合模型
1 000	4.01	7.75	8.10	75.36	72.08	75.74
2 000	8.00	15.39	15.67	75.37	72.08	75.76
3 000	11.73	22.68	23.36	75.37	72.06	75.76
4 000	15.53	30.89	30.63	75.37	72.06	75.72
5 000	19.44	38.95	38.12	75.37	70.05	75.76

表6 辣椒划痕图像修复结果比较

Tab.6 Restoration results comparison of Peppers image damaged by scratch

迭代次数	T/s			P_{SNR}		
	TV模型	P-Laplace模型	混合模型	TV模型	P-Laplace模型	混合模型
1 000	3.97	7.08	7.48	77.20	74.49	78.32
2 000	7.69	13.77	14.21	77.20	74.47	78.36
3 000	11.32	20.85	21.06	77.20	74.47	78.32
4 000	15.18	27.73	27.97	77.20	74.49	78.40
5 000	18.98	34.30	35.03	77.20	74.49	78.44

P-Laplace模型的各向同性扩散有机结合，在控制参数k的调节下，实现在对破损图像的修复中，像素信息的扩散方式随着图像信息特征的改变而灵活运用.这种根据像素的特征信息的变化来选取不同的修复模型的方法，可以获得比单一的修复算法更好的修复效果.实验结果表明，本文提出的基于TV模型和P-Laplace模型的改进图形修复算法是合理而且高效的.

4 结 语

本文针对基于偏微分方程的图像修复算法进行了研究，将TV模型边缘部分保持和P-Laplace模型在平坦区域各向同性扩散的优点有机结合在一起，提出了混合图像修复算法.实验结果表明，混合修复算法在效果上优于TV模型和P-Laplace模型，实现了对图像边缘信息的保护和防止在平坦区域产生阶梯效应，能够得到更优的图像修复效果.

参考文献：

[1] QIN Chuan, WANG Shuo-zhong, ZHANG Xin-peng. Simultaneous inpainting for image structure and texture using anisotropic heat transfer model [J]. **Multimedia Tools and Applications**, 2012, **56**(3):469-483.

[2] Chan R H, YANG Jun-feng, YUAN Xiao-ming. Alternating direction method for image inpainting in wavelet domains [J]. **SIAM Journal on Imaging Sciences**, 2011, **4**(3):807-826.

[3] 王旭东，冯象初，霍雷刚. 去除乘性噪声的重加权各向异性全变差模型[J]. 自动化学报，2012，**38**(3)：444-451.

WANG Xu-dong，FENG Xiang-chu，HUO Lei-gang. Iteratively reweighted anisotropic-TV based multiplicative noise removal model [J]. **Acta Automatica Sinica**，2012，**38**(3)：444-451.（in Chinese）

[4] LI Sheng-feng，WANG Ru-jing，XIE Jin，*et al*. Exemplar image inpainting by means of curvature-driven method [C] // **Proceedings — 2012 International Conference on Computer Science and Electronics Engineering，ICCSEE 2012**. Piscataway：IEEE Computer Society，2012：326-329.

[5] 何 坤，琚生根，林 涛，等. TV 数值计算的图像去噪[J]. 电子科技大学学报，2013，**42**(3)：459-463.

HE Kun，JU Sheng-gen，LIN Tao，*et al*. Image denoising on TV numerical computation [J]. **Journal of University of Electronic Science and Technology of China**，2013，**42**(3)：459-463.（in Chinese）

[6] 娄静涛，李永乐，谭树人，等. 基于全变分的全向图像稀疏重构算法[J]. 电子学报，2014，**44**(2)：243-249.

LOU Jing-tao，LI Yong-le，TAN Shu-ren，*et al*. Sparse reconstruction for omnidirectional image based on total variation [J]. **Acta Electronica Sinica**，2014，**44**(2)：243-249.（in Chinese）

[7] 边 策，钟 桦，焦李成. 基于非下采样 Contourlet 变换和双变量模型的图像去噪[J]. 电子与信息学报，2009，**31**(3)：561-565.

BIAN Ce，ZHONG Hua，JIAO Li-cheng. Image denoising based on nonsubsampled contourlet transform and bivariate model [J]. **Journal of Electronics & Information Technology**，2009，**31**(3)：561-565.（in Chinese）

[8] 赵颜伟，李象霖. 一种基于 TV 模型的快速图像修复算法[J]. 微电子学与计算机，2009，**26**(6)：253-260.

ZHAO Yan-wei，LI Xiang-lin. A rapid image inpainting algorithm based on TV model [J]. **Microelectronics & Computer**，2009，**26**(6)：253-260.（in Chinese）

[9] Paul G，Cardinale J，Sbalzarini I F. Coupling image restoration and segmentation：A generalized linear model/Bregman perspective [J]. **International Journal of Computer Vision**，2013，**104**(1)：69-93.

Hybrid image restoration algorithm based on total variation and P-Laplace models

LI Dan*，ZHONG Chong-quan，WANG Shi-qiang，CHEN Zu-jun

（School of Control Science and Engineering，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China）

Abstract：Image restoration is one of the major problems of image processing research in recent years. In the image restoration algorithms based on partial differential equation，the total variation（TV）model can well protect the image edge information，but in the flat areas，the anisotropic diffusion TV model can easily generate ladder effect. While the isotropic diffusion P-Laplace model can obtain good restoration results in the flat areas，but it is not suitable to restore the image edge information. Based on the TV and P-Laplace models，a hybrid image restoration algorithm is proposed，in which the control parameter k can adjust the importance degree of the two diffusion methods according to the image areas，and realize hybrid image restoration. Experimental results show that the proposed algorithm can obtain better restoration results.

Key words：image restoration；total variation（TV）model；P-Laplace model