第54卷第6期 大连理工大学学报 Vol.54, No.6
2014年11月 Journal of Dalian University of Technology Nov. 2014

文章编号：1000-8608(2014)06-0702-05

Hom-结合超代数的表示和上同调

南基洙[1]，王春月[1,2]，张庆成[*3]

(1.大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024；
2.吉林工程技术师范学院 应用理学院，吉林 长春 130052；
3.东北师范大学 数学与统计学院，吉林 长春 130024)

摘要： 结合超代数对代数结构研究具有重要意义.首先给出了Hom-结合超代数表示和双模的定义，并研究了它们的一些基本性质，进而利用此表示和双模给出了定理 $\delta^n_{\mathrm{Hom}}\delta^{n-1}_{\mathrm{Hom}}=0$，从而得到Hom-结合超代数上同调的定义.

关键词： Hom-结合超代数；表示；上同调

中图分类号： O152.5 **文献标识码：** A **doi：** 10.7511/dllgxb201406016

0 引言

结合超代数对很多代数结构研究都具有重要的作用.研究者对结合超代数的研究越来越感兴趣.Ayadi等研究了具有非退化、超对称、不变双线性型结合超代数的结构和双扩张[1].Montaner给出了结合超代数的理想与Lie超代数的理想之间的关系[2].Laliena等研究了具有超对合的结合超代数结构与具有反对称元素的Lie代数结构之间的关系[3].

Hom-代数结构首先出现在Lie代数拟形变中.近年来，关于Hom-代数结构已经涌现了很多研究结果[4-7].Ammar等给出了Hom-结合代数的上同调群[8].Makhlouf等研究了Hom-结合代数的低阶上同调群[9].而Ammar等在研究Hom-Lie超代数和Hom-Lie可许超代数的结构时提出了Hom-结合超代数的定义[10]，它对研究Hom-Lie超代数起着重要的作用.对于Hom-结合超代数还有许多问题值得研究.本文将Hom-结合代数的上同调群推广到Hom-结合超代数，主要研究Hom-结合超代数的表示和上同调.

1 基本概念

首先研究Hom-结合超代数的一些基本性质，给出Hom-结合超代数表示的定义.

本文中所有的超线性空间和超代数都是复数域上的超线性空间和超代数，齐次元素 x 的次数记为 $|x|$.

定义1[2] 设 A 是一个超线性空间，$\circ:A\times A\rightarrow A$ 是一个偶双线性映射，$\phi:A\rightarrow A$ 是一个偶线性映射.对任意的 $x,y,z\in A$，满足

$$(x\circ y)\circ\phi(z)=\phi(x)\circ(y\circ z)$$

则称 $(A,\circ,\phi)$ 是一个Hom-结合超代数.

设 $(A_1,\circ_1,\phi_1)$ 和 $(A_2,\circ_2,\phi_2)$ 是两个Hom-结合超代数，$f:A_1\rightarrow A_2$ 是一个偶线性映射.若 f 满足

$$f(x\circ_1 y)=f(x)\circ_2 f(y),\quad f\phi_1=\phi_2 f$$

称偶线性映射 f 是一个Hom-结合超代数的同态.

注 当 $\phi=id$ 时，Hom-结合超代数是结合超代数.若偶线性映射 $\phi:A\rightarrow A$ 满足 $\phi(x\circ y)=\phi(x)\circ\phi(y)$，则称 $(A,\circ,\phi)$ 是一个保运算的Hom-

收稿日期： 2014-01-04； **修回日期：** 2014-08-04.
基金项目： 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(201101647)；吉林省自然科学基金资助项目(20130101068).
作者简介： 南基洙(1965-)，男，教授，E-mail：jznan@163.com；王春月(1979-)，女，博士生，E-mail：wang1chun2yue3@163.com；张庆成*(1960-)，男，教授，E-mail：zhangqc569@nenu.edu.cn.

结合超代数.

下面定理给出了由一个结合超代数和一个偶的结合超代数自同态构造一个 Hom-结合超代数的方法.

定理 1　设 $(A, \circ)$ 是一个结合超代数，$\phi: A \to A$ 是一个偶的结合超代数自同态，任取 $x, y \in A$，定义运算 $x \circ_\phi y = \phi(x \circ y)$，则 $(A, \circ_\phi, \phi)$ 是一个 Hom-结合超代数.

证明　任取 $x, y, z \in A$，则

$$(x \circ_\phi y) \circ_\phi \phi(z) = \phi^2((x \circ y) \circ z) = \phi^2(x \circ (y \circ z)) = \phi(x) \circ_\phi (y \circ_\phi z)$$

因此 $(A, \circ_\phi, \phi)$ 是一个 Hom-结合超代数.

例 1　设 $(A, \circ)$ 是一个 2-维结合超代数，$\{e_0, e_1\}$ 是它的基，其中 $A_{\bar{0}} = span\{e_0\}$，$A_{\bar{1}} = span\{e_1\}$，并且它的乘法表如下：

$$e_0 \circ e_0 = k_1 e_0, e_0 \circ e_1 = k_1 e_1,$$

$$e_1 \circ e_0 = k_1 e_1, e_1 \circ e_1 = k_2 e_0;\ k_1, k_2 \neq 0$$

定义一个偶的结合超代数自同态 $\phi: A \to A$ 为 $\phi(e_0) = a e_0$，$\phi(e_1) = \frac{1}{a} e_1 (a \neq 0)$. 由定理 1 知 $(A, \circ_\phi, \phi)$ 是一个 Hom-结合超代数，并且它的乘法表如下：

$$e_0 \circ_\phi e_0 = k_1 a e_0, e_0 \circ_\phi e_1 = \frac{1}{a} k_1 e_1,$$

$$e_1 \circ_\phi e_0 = \frac{1}{a} k_1 e_1, e_1 \circ_\phi e_1 = k_2 a e_0$$

然而 $(A, \circ_\phi)$ 不是一个结合超代数. 事实上，当 $a \neq \pm 1$ 时，

$$(e_0 \circ_\phi e_0) \circ_\phi e_1 = k_1^2 e_1 \neq e_0 \circ_\phi (e_0 \circ_\phi e_1) = \frac{1}{a^2} k_1^2 e_1;$$

$$(e_0 \circ_\phi e_1) \circ_\phi e_1 = k_1 k_2 e_0 \neq e_0 \circ_\phi (e_1 \circ_\phi e_1) = a^2 k_1 k_2 e_0;$$

$$(e_1 \circ_\phi e_0) \circ_\phi e_0 = \frac{1}{a^2} k_1^2 e_1 \neq e_1 \circ_\phi (e_0 \circ_\phi e_0) = k_1^2 e_1;$$

$$(e_1 \circ_\phi e_1) \circ_\phi e_0 = a^2 k_1 k_2 e_0 \neq e_1 \circ_\phi (e_1 \circ_\phi e_0) = k_1 k_2 e_0$$

命题 1　设 $(A_1, \circ_1, \phi_1)$ 和 $(A_2, \circ_2, \phi_2)$ 是两个 Hom-结合超代数，对任意 $a_1, a_2 \in A_1$，$b_1, b_2 \in A_2$，定义一个偶双线性映射：

$$\circ: (A \oplus B) \times (A \oplus B) \to (A \oplus B)$$

$$(a_1 + b_1) \circ (a_2 + b_2) = a_1 \circ_1 a_2 + b_1 \circ_2 b_2$$

对任意 $a \in A_1$，$b \in A_2$，定义一个偶映射

$$(\phi_1 + \phi_2): A_1 \oplus A_2 \to A_1 \oplus A_2$$

$$(\phi_1 + \phi_2)(a + b) = \phi_1(a) + \phi_2(b)$$

则 $(A_1 \oplus A_2, \circ, \phi_1 + \phi_2)$ 是一个 Hom-结合超代数.

证明　显然 $A_1 \oplus A_2$ 是一个超线性空间，$\phi_1 + \phi_2$ 是一个偶线性映射. 任取 $a_1, a_2, a_3 \in A_1$，$b_1, b_2, b_3 \in A_2$，由 $(A_1, \circ_1, \phi_1)$ 和 $(A_2, \circ_2, \phi_2)$ 是两个 Hom-结合超代数，则有

$$((a_1 + b_1) \circ (a_2 + b_2)) \circ ((\phi_1 + \phi_2)(a_3 + b_3)) =$$
$$(a_1 \circ_1 a_2) \circ_1 \phi_1(a_3) + (b_1 \circ_2 b_2) \circ_2 \phi_2(b_3) =$$
$$\phi_1(a_1) \circ_1 (a_2 \circ_1 a_3) + \phi_2(b_1) \circ_2 (b_2 \circ_2 b_3) =$$
$$((\phi_1 + \phi_2)(a_1 + b_1)) \circ ((a_2 + b_2) \circ (a_3 + b_3))$$

因此 $(A_1 \oplus A_2, \circ, \phi_1 + \phi_2)$ 是一个 Hom-结合超代数.

定义 2　设 $(A, \circ, \phi_A)$ 是一个 Hom-结合超代数，V 是一个超线性空间，$\phi_V: V \to V$ 是 V 的一个偶线性映射. 在 V 上定义线性运算 $\cdot: A \times V \to V$，$(x, v) \mapsto x \cdot v$，使得下列条件成立：任取 $x, y \in A$，$v \in V$，

(1) $x \cdot v \in V_{\theta+\mu}$，$\forall x \in A_\theta$，$\forall v \in V_\mu$；

(2) $\phi_V(x \cdot v) = \phi_A(x) \cdot \phi_V(v)$；

(3) $(x \circ y) \cdot \phi_V(v) = \phi_A(x) \cdot (y \cdot v)$

称 $(V, \cdot, \phi_V)$ 是一个 Hom-左 A-模.

同样可以定义 Hom-右 A-模.

定义 3　设 $(A, \circ, \phi_A)$ 是一个 Hom-结合超代数，V 是一个超线性空间，$\phi_V: V \to V$ 是 V 的一个偶线性映射. 在 V 上定义线性运算 $\cdot: V \times A \to V$，$(v, x) \mapsto v \cdot x$，使得下列条件成立：任取 $x, y \in A$，$v \in V$，

(1) $v \cdot x \in V_{\theta+\mu}$，$\forall x \in A_\theta$，$\forall v \in V_\mu$；

(2) $\phi_V(v \cdot x) = \phi_V(v) \cdot \phi_A(x)$；

(3) $\phi_V(v) \cdot (x \circ y) = (-1)^{|x||y|} (v \cdot y) \cdot \phi_A(x)$

称 $(V, \cdot, \phi_V)$ 是一个 Hom-右 A-模.

若 $(V, \cdot, \phi_V)$ 既是一个 Hom-左 A-模又是一个 Hom-右 A-模，且满足

$$\phi_A(x) \cdot (v \cdot y) = (x \cdot v) \cdot \phi_A(y)$$

则称 $(V, \cdot, \phi_V)$ 是一个 Hom-A-双模.

例 2 $(A,\circ,\phi_A)$ 是一个 Hom-A-双模.

例 3 设 A 是一个结合超代数,$(V,\cdot)$ 是一个 A-双模,则 $(V,\cdot)$ 也是一个 Hom-A-双模. 事实上,相当于 $\phi_V = id_V$.

定义 4 设 $(A,\circ,\phi_A)$ 是一个 Hom-结合超代数,V 是一个超线性空间,$\phi_V:V\to V$ 是一个偶线性映射. 如果偶线性映射 $\rho_{\phi_V}:A\to gl(V)$ 满足下列条件:

(1) $\rho_{\phi_V}(\phi_A(x))\phi_V = \phi_V\rho_{\phi_V}(x)$;

(2) $\rho_{\phi_V}(x\circ y)\phi_V = \rho_{\phi_V}(\phi_A(x))\rho_{\phi_V}(y)$

则称 ρ_{ϕ_V} 是关于 ϕ_V 的 $(A,\circ,\phi_A)$ 在 V 上的一个表示.

如果定义 $\rho_{\phi_V}(x)(v) = x\cdot v$ (或 $\rho_{\phi_V}(x)(v) = (-1)^{|x||v|}v\cdot x$),则 Hom-左(右)$A$-模 (V,ϕ_V) 与表示 ρ_{ϕ_V} 一一对应.

命题 2 设 $(A_1,\circ_1,\phi_1)$ 和 $(A_2,\circ_2,\phi_2)$ 是两个 Hom-结合超代数,$\varphi:A_2\to A_1$ 是一个偶的 Hom-结合超代数的同态,$(V,\cdot,\phi_V)$ 是任意一个 Hom-A_1-双模. 任取 $a_2\in A_2$,$v\in V$,定义

$$a_2\cdot' v = \varphi(a_2)\cdot v,\quad v\cdot' a_2 = v\cdot\varphi(a_2)$$

则 $(V,\cdot',\phi_V)$ 是一个 Hom-A_2-双模.

证明 任取 $v\in V$,$a_2,b_2\in A_2$,则有

$$\begin{aligned}\phi_V(a_2\cdot' v) &= \phi_V(\varphi(a_2)\cdot v) = \\ &\phi_1(\varphi(a_2))\cdot\phi_V(v) = \\ &\varphi(\phi_2(a_2))\cdot\phi_V(v) = \\ &\phi_2(a_2)\cdot'\phi_V(v);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a_2\circ_2 b_2)\cdot'\phi_V(v) &= \varphi(a_2\circ_2 b_2)\cdot\phi_V(v) = \\ &(\varphi(a_2)\circ_1\varphi(b_2))\cdot\phi_V(v) = \\ &\phi_2(a_2)\cdot'(b_2\cdot' v)\end{aligned}$$

因此 $(V,\cdot',\phi_V)$ 是一个 Hom-左 A_2-模.

同理可证 $(V,\cdot',\phi_V)$ 是一个 Hom-右 A_2-模.

又因为

$$\begin{aligned}\phi_2(a_2)\cdot'(v\cdot' b_2) &= \varphi(\phi_2(a_2))\cdot(v\cdot\varphi(b_2)) = \\ &\phi_1(\varphi(a_2))\cdot(v\cdot\varphi(b_2)) = \\ &(\varphi(a_2)\cdot v)\cdot\phi_1(\varphi(b_2)) = \\ &(\varphi(a_2)\cdot v)\cdot\varphi(\phi_2(b_2)) = \\ &(a_2\cdot' v)\cdot'\phi_2(b_2)\end{aligned}$$

所以 $(V,\cdot',\phi_V)$ 是一个 Hom-A_2-双模.

2 Hom-结合超代数的上同调

下面将给出 Hom-结合超代数上同调的定义. 本章中所有的 Hom-结合超代数都是保运算的 Hom-结合超代数. 对所有齐次元素 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A^n$,记

$$|(a_1,a_2,\cdots,a_n)| = |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$$

定义 5 设 $(A,\circ,\phi_A)$ 是一个 Hom-结合超代数,$(V,\cdot,\phi_V)$ 是一个 Hom-A-双模. 如果齐次 n-线性映射 $f:\otimes^n A\to V$ 满足

(1) $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in V_\alpha$,其中 $|f|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n| = \alpha$;

(2) $f(a_1,a_2,\cdots,a_i,a_{i+1},\cdots,a_n) = -(-1)^{|a_i||a_{i+1}|}f(a_1,a_2,\cdots,a_{i+1},a_i,\cdots,a_n)$;

(3) $\phi_V(f(a_1,a_2,\cdots,a_n)) = f(\phi_A(a_1),\phi_A(a_2),\cdots,\phi_A(a_n))$

称 f 为 $(A,\circ,\phi_A)$ 在 $(V,\cdot,\phi_V)$ 中的 Hom-n-维超上链. $(A,\circ,\phi_A)$ 在 $(V,\cdot,\phi_V)$ 中的所有 Hom-n-维超上链 f 的集合记为 $C^n_{\phi_A,\phi_V}(A;V)$.

令当 $n<0$ 时,$C^n_{\phi_A,\phi_V}(A;V)=0$;当 $n=0$ 时,$C^n_{\phi_A,\phi_V}(A;V)=V$.

定义 6 设 $(A,\circ,\phi_A)$ 是一个 Hom-结合超代数,$(V,\cdot,\phi_V)$ 是一个 Hom-A-双模. 定义一个偶线性映射

$$\delta^n_{\mathrm{Hom}}:C^n_{\phi_A,\phi_V}(A;V)\to C^{n+1}_{\phi_A,\phi_V}(A;V)$$

为

$$\begin{aligned}&\delta^n_{\mathrm{Hom}}(f)(a_0,a_1,\cdots,a_n) = \\ &(-1)^{|f||a_0|}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot f(a_1,a_2,\cdots,a_n) + \\ &\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(\phi_A(a_0),\cdots,a_{i-1}\circ a_i,\cdots,\phi_A(a_n)) + \\ &(-1)^{n+1}f(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\cdot\phi_A^{n-1}(a_n)\end{aligned}$$

这里 $n\geqslant 1$,$f\in C^n_{\phi_A,\phi_V}(A;V)$,$a_0,a_1,\cdots,a_n\in A$,则称 δ^n_{Hom} 为 Hom-n-维超上边缘算子.

定理 2 设 $(A,\circ,\phi_A)$ 是一个 Hom-结合超代数,$(V,\cdot,\phi_V)$ 是一个 Hom-A-双模,$\delta^{n-1}_{\mathrm{Hom}}:C^{n-1}_{\phi_A,\phi_V}(A;V)\to C^n_{\phi_A,\phi_V}(A;V)$ 是 Hom-n-维超上边缘算子,则 $\delta^n_{\mathrm{Hom}}\delta^{n-1}_{\mathrm{Hom}} = 0\ (n\geqslant 1)$.

证明　任取 $f\in C^{n-1}_{\phi_A,\phi_V}(A;V)a_0,a_1,\cdots,a_n\in A$,则有

$\delta^n_{\mathrm{Hom}}\delta^{n-1}_{\mathrm{Hom}}(f)(a_0,a_1,\cdots,a_n)=$
$(-1)^{|f||a_0|}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot\delta^{n-1}_{\mathrm{Hom}}(f)(a_1,a_2,\cdots,a_n)+$
$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\delta^{n-1}_{\mathrm{Hom}}(f)(\phi_A(a_0),\cdots,a_{i-1}\circ a_i,\cdots,$
$\phi_A(a_n))+(-1)^{n+1}\delta^{n-1}_{\mathrm{Hom}}(f)(a_0,\cdots,a_{n-1})\cdot$
$\phi_A^{n-1}(a_n)=(-1)^{|f|(|a_0|+|a_1|)}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot$
$(\phi_A^{n-2}(a_1)\cdot f(a_2,\cdots,a_n))+(-1)^{|f||a_0|}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot$
$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k f(\phi_A(a_1),\cdots,a_k\circ a_{k+1},\cdots,\phi_A(a_n))+$
$(-1)^{|f||a_0|+n}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot(f(a_1,\cdots,a_{n-1})\cdot$
$\phi_A^{n-2}(a_n))-\delta^{n-1}_{\mathrm{Hom}}(f)(a_0\circ a_1,\phi_A(a_2),\cdots,\phi_A(a_n))+$
$\delta^{n-1}_{\mathrm{Hom}}(f)(\phi_A(a_0),a_1\circ a_2,\cdots,\phi_A(a_n))+\cdots+$
$(-1)^n\delta^{n-1}_{\mathrm{Hom}}(f)(\phi_A(a_0),\phi_A(a_1),\cdots,a_{n-1}\circ a_n)-$
$(-1)^{n+|f||a_0|}(\phi_A^{n-2}(a_0)\cdot f(a_1,\cdots,a_{n-1}))\cdot$
$\phi_A^{n-1}(a_n)-(-1)^n\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\cdot(f(\phi_A(a_0),\cdots,$
$a_{j-1}\circ a_j,\cdots,\phi_A(a_{n-1})))\cdot\phi_A^{n-1}(a_n)-(f(a_0,a_1,\cdots,$
$a_{n-2})\cdot\phi_A^{n-2}(a_{n-1}))\cdot\phi_A^{n-1}(a_n)=(-1)^{|f|(|a_0|+|a_1|)}\cdot$
$\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot(\phi_A^{n-2}(a_1)\cdot f(a_2,\cdots,a_n))+$
$(-1)^{|f||a_0|}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k f(\phi_A(a_1),\cdots,$
$a_k\circ a_{k+1},\cdots,\phi_A(a_n))+(-1)^{|f||a_0|+n}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot$
$(f(a_1,\cdots,a_{n-1})\cdot\phi_A^{n-2}(a_n))-(-1)^{|f|(|a_0|+|a_1|)}\cdot$
$\phi_A^{n-2}(a_0\circ a_1)\cdot f(\phi_A(a_2),\cdots,\phi_A(a_n))+$
$f((a_0\circ a_1)\circ\phi_A(a_2),\cdots,\phi_A^2(a_n))+\cdots+$
$(-1)^n f(\phi_A(a_0\circ a_1),\phi_A^2(a_2),\cdots,\phi_A(a_{n-1})\circ\phi_A(a_n))-$
$(-1)^n f(a_0\circ a_1,\phi_A(a_2),\cdots,\phi_A(a_{n-1}))\cdot\phi_A^{n-1}(a_n)+$
$(-1)^{|f||a_0|}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot$
$f(a_1\circ a_2,\cdots,\phi_A(a_n))-f(\phi_A(a_0)\circ(a_1\circ a_2),\cdots,$
$\phi_A^2(a_n))+\cdots+(-1)^{n+|f||a_0|}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot f(\phi_A(a_1),\cdots,$
$a_{n-1}\circ a_n)-(-1)^n f(\phi_A(a_0)\circ\phi_A(a_1),\phi_A^2(a_2),\cdots,$
$\phi_A(a_{n-1}\circ a_n))+(-1)^n f(\phi_A^2(a_0),\phi_A(a_1)\circ\phi_A(a_2),\cdots,$
$\phi_A(a_{n-1}\circ a_n))+\cdots-f(\phi_A^2(a_0),\cdots,\phi_A^2(a_{n-3}),$
$\phi_A(a_{n-2})\circ(a_{n-1}\circ a_n))+f(\phi_A(a_0),\cdots,\phi_A(a_{n-2}))\cdot$
$\phi_A^{n-2}(a_{n-1}\circ a_n)-(-1)^{n+|f||a_0|}(\phi_A^{n-2}(a_0)\cdot f(a_1,\cdots,$
$a_{n-1}))\cdot\phi_A^{n-1}(a_n)-(-1)^n\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j(f(\phi_A(a_0),\cdots,$
$a_{j-1}\circ a_j,\cdots,\phi_A(a_{n-1})))\cdot\phi_A^{n-1}(a_n)-(f(a_0,a_1,\cdots,$
$a_{n-2})\cdot\phi_A^{n-2}(a_{n-1}))\cdot\phi_A^{n-1}(a_n)=(-1)^{|f|(|a_0|+|a_1|)}\cdot$
$\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot(\phi_A^{n-2}(a_1)\cdot f(a_2,\cdots,a_n))-(-1)^{|f||a_0|}\cdot$
$\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot f(a_1\circ a_2,\phi_A(a_3),\cdots,\phi_A(a_n))+$
$(-1)^{|f||a_0|}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot f(\phi_A(a_1),a_2\circ a_3,\cdots,$
$\phi_A(a_n))+\cdots-(-1)^{|f||a_0|+n}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot f(\phi_A(a_1),\cdots,$
$a_{n-1}\circ a_n)+(-1)^{|f||a_0|+n}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot(f(a_1,\cdots,a_{n-1})\cdot$
$\phi_A^{n-2}(a_n))-(-1)^{|f|(|a_0|+|a_1|)}\phi_A^{n-2}(a_0\circ a_1)\cdot$
$f(\phi_A(a_2),\cdots,\phi_A(a_n))\cdot\phi_A^{n-2}(a_n))+$
$f((a_0\circ a_1)\circ\phi_A(a_2),\cdots,\phi_A^2(a_n))+\cdots+$
$(-1)^n f(\phi_A(a_0\circ a_1),\phi_A^2(a_2),\cdots,\phi_A(a_{n-1})\circ\phi_A(a_n))-$
$(-1)^n f(a_0\circ a_1,\phi_A(a_2),\cdots,\phi_A(a_{n-1}))\cdot\phi_A^{n-1}(a_n)+$
$(-1)^{|f||a_0|}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot f(a_1\circ a_2,\phi_A(a_3),\cdots,\phi_A(a_n))-$
$f(\phi_A(a_0)\circ(a_1\circ a_2),\cdots,\phi_A^2(a_n))+\cdots-$
$(-1)^n f(\phi_A^2(a_0),\phi_A(a_1\circ a_2),\cdots,\phi_A(a_{n-1})\circ\phi_A(a_n))+$
$(-1)^n f(\phi_A(a_0),a_1\circ a_2,\cdots,\phi_A(a_{n-1}))\cdot$
$\phi_A^{n-1}(a_n)+\cdots+(-1)^{|f||a_0|+n}\phi_A^{n-1}(a_0)\cdot$
$f(\phi_A(a_1),\cdots,a_{n-1}\circ a_n)-(-1)^n f(\phi_A(a_0)\circ\phi_A(a_1),$
$\phi_A^2(a_2),\cdots,\phi_A(a_{n-1})\circ\phi_A(a_n))+(-1)^n f(\phi_A^2(a_0),$
$\phi_A(a_1)\circ\phi_A(a_2),\cdots,\phi_A(a_{n-1}\circ a_n))+\cdots-$
$f(\phi_A^2(a_0),\cdots,\phi_A^2(a_{n-3}),\phi_A(a_{n-2})\circ(a_{n-1}\circ a_n))+$
$f(\phi_A(a_0),\cdots,\phi_A(a_{n-2}))\cdot\phi_A^{n-2}(a_{n-1}\circ a_n)-$
$(-1)^{n+|f||a_0|}(\phi_A^{n-2}(a_0)\cdot f(a_1,\cdots,a_{n-1}))\cdot$
$\phi_A^{n-1}(a_n)+(-1)^n f(a_0\circ a_1),\phi_A(a_2),\cdots,\phi_A(a_{n-1}))\cdot$
$\phi_A^{n-1}(a_n)-(-1)^n f(\phi_A(a_0),a_1\circ a_2,\cdots,\phi_A(a_{n-1}))\cdot$
$\phi_A^{n-1}(a_n)+\cdots+f(\phi_A(a_0),\cdots,\phi_A(a_{n-3}),a_{n-2}\circ a_{n-1})\cdot$
$\phi_A^{n-1}(a_n)-(f(a_0,\cdots,a_{n-2})\cdot\phi_A^{n-2}(a_{n-1}))\cdot$
$\phi_A^{n-1}(a_n)=0.$

定义 7

$Z^n_{\mathrm{Hom}}(A;V):=\ker\delta^n_{\phi_A,\phi_V}(n\geqslant 1)$,

$B^n_{\mathrm{Hom}}(A;V):=\mathrm{Im}\ \delta^n_{\phi_A,\phi_V}(n\geqslant 1)$,

$H^n_{\mathrm{Hom}}(A;V):=Z^n_{\mathrm{Hom}}(A;V)/B^{n-1}_{\mathrm{Hom}}(A;V)(n\geqslant 1)$

称 $H^n_{\mathrm{Hom}}(A;V)$ 为 A 在 V 中的 n-阶上同调.

例 4　在例1中取 $k_1=1,k_2=-1,a=2$,设 f 为奇的 Hom-n-维超上链，通过计算可得 $Z^1_{\mathrm{Hom}}(A;A)=\{f\mid f(e_0)=0,f(e_1)=0\}$, $B^0_{\mathrm{Hom}}(A;A)=0$,于是

$$H_{\mathrm{Hom}}^{1}(A;A)=Z_{\mathrm{Hom}}^{1}(A;A)/B_{\mathrm{Hom}}^{0}(A;A)=Z_{\mathrm{Hom}}^{1}(A;A)$$

3 结 语

本文给出了Hom-结合超代数的表示和双模的定义,并以此研究了Hom-结合超代数的上同调.

参考文献:

[1] Ayadi I, Benayadi S. Associative superalgebras with homogeneous symmetric structures [J]. **Communication in Algebra**, 2012, **40**(4): 1234-1259.

[2] Montaner F. On the Lie structure of associative superalgebras [J]. **Communication in Algebra**, 1998, **26**(7):2337-2349.

[3] Laliena J, Sacristan S. On certain semiprime associative superalgebras [J]. **Communication in Algebra**, 2009, **37**(10):3548-3552.

[4] Makhlouf A, Silvestrov S. Hom-algebra structure [J]. **Journal of Generalized Lie Theory and Applications**, 2008, **2**(2):51-64.

[5] SHENG Yun-he. Representations of Hom-Lie algebras [J]. **Algebras and Representation Theory**, 2012, **15**(6):1081-1098.

[6] Yau D. Hom-algebras and homology [J]. **Journal of Lie Theory**, 2009, **19**(2):409-421.

[7] Yau D. Enveloping algebras of Hom-Lie algebras [J]. **Journal of Generalized Lie Theory and Applications**, 2008, **2**(2):95-108.

[8] Ammar F, Ejbehi Z, Makhlouf A. Cohomology and deformations of Hom-algebras [J]. **Journal of Lie Theory**, 2011, **21**(4):813-836.

[9] Makhlouf A, Silvestrov S. Notes on formal deformations of Hom-associative and Hom-Lie algebra [EB/OL]. (2007-12-19) [2013-12-15]. http://arXiv.org/abs/0712.3130v1.

[10] Ammar F, Makhlouf A. Hom-Lie superalgebras and Hom-Lie admissible superalgebras [J]. **Journal of Algebra**, 2010, **324**(7):1513-1528.

Representation and cohomology of Hom-associative superalgebras

NAN Ji-zhu[1], WANG Chun-yue[1,2], ZHANG Qing-cheng[*3]

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. School of Applied Sciences, Jilin Teachers' Institute of Engineering and Technology, Changchun 130052, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China)

Abstract: Associative superalgebras is important for study of algebra structure. Firstly, the definitions of representation and bimodule of Hom-associative superalgebras are given and some basic properties of them are studied. Then, theorem $\delta_{\mathrm{Hom}}^{n}\delta_{\mathrm{Hom}}^{n-1}=0$ is obtained by using the representation and bimodule, and the definition of the cohomology of Hom-associative superalgebras is given.

Key words: Hom-associative superalgebras; representation; cohomology