

J2 摄动下基于平均轨道要素差的集群航天器空间圆形编队设计

张 朔¹, 吴国强^{*1,2}

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 大连理工大学 航空航天学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 集群航天器是通过无线连接方式构成的虚拟航天器系统, 考虑 J2 摄动下其在太阳同步轨道的空间圆形编队设计, 对满足其模块间能量传输、数据交互的需要和应用需求具有重要意义。基于主、从模块平均轨道要素差建立了相对运动模型, 并给出了空间圆形编队的详细设计步骤; 在零 J2 摄动条件不再适用时, 通过定量分析 J2 摄动对该编队构形的影响, 提出了相应的修正公式; 将模块修正后的平均轨道要素转换为初始时刻密切轨道要素确定了初始编队构形。采用无奇点的新四元数轨道要素进行 J2 摄动分析, 仿真结果验证了设计方法的有效性。

关键词: J2 摄动; 平均轨道要素; 集群航天器; 空间圆形编队

中图分类号: V412.4

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb201503002

0 引言

集群航天器最初由美国麻省理工学院的 Mathieu 等提出^[1], 相较于传统航天器, 集群航天器具有在轨灵活、可扩展、可维护和可快速响应等优势, 研究集群航天器对于加快快速响应空间系统的建设速度, 增强空间技术创新能力和提高新型航天器研制水平具有重要意义^[2]。空间圆形编队可高精度保持各功能模块间相对距离, 满足集群航天器模块间能量传输和数据交互的要求。太阳同步轨道则具有很高的应用价值, 资源卫星、气象卫星、军用卫星、海洋卫星等均采用太阳同步轨道^[3]。因此, 研究集群航天器在太阳同步轨道的空间圆形编队设计具有重要意义。

关于建立航天器编队相对运动方程的方法有很多种, 高云峰等提出了编队飞行的相对轨道要素法^[4]。安雪滢则基于相对轨道要素差推导了一阶相对运动模型^[5]。殷建丰等通过定义新的轨道要素, 推导了含有相对漂移率的相对运动方程^[6]。孟鑫等推导了便于摄动分析的相对运动方程^[7]。采用上述相对运动方程直接进行编队构形设计时, 都能满足较小的构形误差, 但是在考虑地球非

球形引起的 J2 摄动后, 无法保持构形的稳定性。平均轨道要素在编队构形设计中通过合适的算法, 可以使编队构形更加稳定, 设计的控制律更加有效, 从而节省编队构形控制的燃料消耗^[8]。

本文建立以主、从模块初始平均轨道要素差表示的相对运动方程, 给出空间圆形编队设计的详细步骤。上述设计步骤可确定主、从模块的初始平均轨道要素, 然而在考虑 J2 摄动时, 构形仍会遭到破坏, 因此需要进行修正。在利用零 J2 摄动条件对模型进行修正时, 仅存在零解, 因此本文结合平均摄动法^[9], 定量分析 J2 摄动对编队构形形状和方向的影响, 进而提出相应的修正公式。将修正后的模块的初始平均轨道要素转换为初始密切轨道要素^[10], 采用新四元数轨道要素进行摄动分析^[11]。通过对比零 J2 摄动条件和本文修正公式的摄动仿真结果, 验证设计方法的有效性。

1 相对运动建模与构形设计

1.1 坐标系定义

为了描述集群航天器中主、从模块间的相对运动, 选取两个参考坐标系: J2000 地心赤道惯性坐标系 $O_c-X_1Y_1Z_1$, 其中原点 O_c 位于地心, O_cX_1

收稿日期: 2014-08-10; 修回日期: 2015-01-18.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11202044).

作者简介: 张 朔(1990-), 男, 硕士生, E-mail: dlzs@mail.dlut.edu.cn; 吴国强*(1977-), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, E-mail: gqw@dlut.edu.cn.

轴指向春分点, $O_c Z_1$ 轴垂直于平赤道面指向北极, $O_c Y_1$ 轴的方向由右手定则确定; 主模块轨道坐标系 $O_s-X_2 Y_2 Z_2$, O_s 位于主模块质心, $O_s X_2$ 轴方向为主模块质心背离地心方向, $O_s Y_2$ 轴在主模块轨道平面上且垂直于 $O_s X_2$ 轴并指向飞行前方, $O_s Z_2$ 轴的方向由右手定则确定。

1.2 平均轨道要素与相对运动方程

假设主模块的平均轨道要素为 $\bar{\sigma}_c$, 从模块的平均轨道要素为 $\bar{\sigma}_d$, 表达式如下:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_c &= (\bar{a}_c \quad \bar{e}_c \quad \bar{i}_c \quad \bar{\Omega}_c \quad \bar{\omega}_c \quad \bar{M}_c) \\ \bar{\sigma}_d &= (\bar{a}_d \quad \bar{e}_d \quad \bar{i}_d \quad \bar{\Omega}_d \quad \bar{\omega}_d \quad \bar{M}_d)\end{aligned}\quad (1)$$

其中平均轨道要素中的元素按顺序分别为平均半长轴、平均轨道偏心率、平均轨道倾角、平均升交点赤经、平均近地点幅角和平均平近点角。

由于编队时主、从模块的平均轨道要素很接近, 可将从模块与主模块的平均轨道要素差 $\Delta \bar{\sigma}$ 认为是主模块的平均轨道要素的变分, 即

$$\delta \bar{\sigma}_c = \Delta \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_d - \bar{\sigma}_c \quad (2)$$

在进行相对运动方程推导时, 由地心赤道惯性坐标系旋转至主模块轨道坐标系的坐标变换矩阵用模块的平均轨道要素近似, 其旋转顺序为 3-1-3 的欧拉转动, 旋转角依次为 $\bar{\Omega}$ - \bar{i} - \bar{u} 。 \bar{u} 为模块的平均纬度幅角; 定义 $\bar{\lambda}$ 为模块的平均平纬度幅角, 表达式如下:

$$\bar{u} = \bar{\omega} + \bar{f}; \quad \bar{\lambda} = \bar{\omega} + \bar{M} \quad (3)$$

\bar{f} 为平均真近点角, 其与 \bar{M} 的相互转换可用下式计算:

$$\tan \bar{f} = \sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \tan \bar{E} \quad (4)$$

$$\bar{M} = \bar{E} - \bar{e} \sin \bar{E}$$

考虑实际编队时, 应满足主模块的轨道偏心率很小, 并且从模块与主模块的平均轨道要素差 $\Delta \bar{\sigma}$ 可视为小量, 则从模块相对主模块的相对位置在主模块的轨道坐标系下分量表达式如下:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -A \cos(\bar{n}t + \bar{M}_{c0} + \varphi) + \delta \bar{a}_c \\ \bar{y} &= 2A \sin(\bar{n}t + \bar{M}_{c0} + \varphi) + B \\ \bar{z} &= -C \cos(\bar{n}t + \bar{M}_{c0} + \varphi + \psi)\end{aligned}\quad (5)$$

式中: \bar{n} 为主模块的平均要素平均角速度, \bar{M}_{c0} 为主模块在编队初始时刻的平均平近点角。变量 A 、 B 、 C 、 φ 和 ψ 的表达式为

$$\begin{aligned}A &= \bar{a}_c \sqrt{\bar{e}_d^2 + \bar{e}_c^2 - 2 \bar{e}_c \bar{e}_d \cos(\delta \bar{M}_c)} \\ B &= \bar{a}_c (\delta \bar{\omega}_c + \delta \bar{M}_c + \delta \bar{\Omega}_c \cos \bar{i}_c) \\ C &= \bar{a}_c \sqrt{(\delta \bar{i}_c)^2 + (\delta \bar{\Omega}_c \sin \bar{i}_c)^2} \\ \sin \varphi &= \frac{\bar{a}_c \bar{e}_d \sin(\delta \bar{M}_c)}{A} \\ \cos \varphi &= \frac{\bar{a}_c \bar{e}_d \cos(\delta \bar{M}_c) - \bar{a}_c \bar{e}_c}{A} \\ \psi &= \bar{\omega}_c + \theta - \varphi \\ \sin \theta &= \frac{\bar{a}_c \delta \bar{i}_c}{C} \\ \cos \theta &= \frac{\bar{a}_c \delta \bar{\Omega}_c \sin \bar{i}_c}{C}\end{aligned}\quad (6)$$

式(5)与(6)即为基于主、从模块的平均轨道要素建立的从模块相对主模块的相对运动方程, 其中 $\delta \bar{a}_c$ 、 A 、 B 、 C 、 φ 和 ψ 共同决定了编队构形的形状和方位, 这 6 个变量结合主模块的平均轨道要素 $\bar{\sigma}_c$, 即可求得从模块与主模块的平均轨道要素差 $\delta \bar{\sigma}_c$, 结合式(2)求得从模块的平均轨道要素。

1.3 空间圆形编队设计

使用式(5)和(6)进行空间圆形编队设计时, 需要满足以下约束条件: (1) $\delta \bar{a}_c = 0$, 此时主模块与从模块的平均轨道半长轴相等, 才能使得绕飞轨道的周期与主模块轨道周期一致, 即满足绕飞轨道闭合; (2) $B = 0$, 此时沿主模块的迹向运动为正弦简谐运动, 空间圆形编队构形的中心为主模块质心; (3) $C = \sqrt{3}A$, $A = l/2$, l 为空间圆形编队半径, 此时满足空间圆形编队在主模块轨道坐标系的 3 个轴向的幅值要求; (4) $\psi = 0$ 或 $\psi = \pi$, 此时满足空间圆形编队的相位要求, 它们对应的构形在 X_2-Y_2 平面的运动均为顺时针方向, 但在 Y_2-Z_2 平面的运动, 前者为逆时针方向, 后者为顺时针方向; (5) φ 对应的就是从模块相对主模块的相对运动的初始相位, 通过设计不同的 φ , 即可得到不同的从模块相对位置。

根据上述约束条件, 给出空间圆形编队的具体设计步骤:

- (1) 给定主模块在编队初始时刻的 $\bar{\sigma}_{c0}$, 在进行编队设计时, 式(6)中的 $\bar{\sigma}_c$ 元素用 $\bar{\sigma}_{c0}$ 替换;
- (2) 给定空间圆形编队半径 l , 求得 A 和 C ;
- (3) 选择 $\psi = 0$ 或 $\psi = \pi$, 本文选取前者;
- (4) 给定编队从模块的总数, 设计不同的 φ , 本文将 φ 在 0 至 2π 的范围内均分, 使得各从模块

之间相位差一致;

(5) 由约束条件 $\delta \bar{a}_c = 0$ 知 $\bar{a}_{d0} = \bar{a}_{c0}$;

(6) 由式(6)中 A 和 $\cos \varphi$ 的计算公式求得

$$\bar{e}_{d0} = \sqrt{\bar{e}_{c0}^2 + 2 \bar{e}_{c0} \frac{A}{\bar{a}_{c0}} \cos \varphi + \frac{A^2}{\bar{a}_{c0}^2}}$$

(7) 由式(6)中的 $\sin \varphi$ 和 $\cos \varphi$ 的计算公式, 并将上一步求得的 \bar{e}_d 代入, 分别求得 $\sin(\delta \bar{M}_{c0})$ 和 $\cos(\delta \bar{M}_{c0})$, 即可确定 $\delta \bar{M}_{c0}$;

(8) 式(6)中 $\psi = \bar{\omega}_c + \theta - \varphi$, 编队设计时认为 $\bar{\omega}_c = \bar{\omega}_{c0}$, 则可确定 θ 的值, 根据式(6)中的 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 求得 $\delta \bar{i}_{c0}$ 和 $\delta \bar{\Omega}_{c0}$;

(9) 由约束条件 $B = 0$ 和式(6)中 B 的计算公式以及所求得的 $\delta \bar{M}_{c0}$ 和 $\delta \bar{\Omega}_{c0}$, 计算 $\delta \bar{\omega}_{c0}$ 的值;

(10) 根据式(2)知 $\bar{\sigma}_{d0} = \bar{\sigma}_{c0} + \delta \bar{\sigma}_{c0}$, 则可求得所有从模块在初始时刻的平均轨道要素。

这里需要指出, 在第(8)步中, \bar{i}_c 等于 0 时, θ 恒等于 0 或 π , 此时无法设计, 因此该相对运动方程不适合多从模块的小偏心率赤道轨道的编队设计; 在第(9)步中, \bar{i}_c 等于 $\pi/2$ 时, 无法计算 $\delta \bar{\omega}_{c0}$, 因此该相对运动方程不适用于极地轨道的编队设计。

在编队构形设计时采用的是主、从模块于编队初始时刻的平均轨道要素, 编队设计时尚未考虑模块的平均轨道要素受 J2 摄动的影响, 因此, 上述编队构形设计只适用理想情况. 仍需分析摄动对编队构形影响, 然后对编队初始时刻的平均轨道要素进行修正, 来抑制摄动引起的构形变化。

2 J2 摄动对编队构形的影响及修正

2.1 一般的编队构形的轨道平面分析

由式(5)可得一般的编队构形所在轨道平面(绕飞轨道平面)的几何方程:

$$2C \cos \psi (\bar{x} - \delta \bar{a}_c) + C \sin \psi (\bar{y} - B) - 2A \bar{z} = 0 \quad (7)$$

为描述绕飞轨道平面相对主模块轨道坐标系的方向, 将主模块轨道坐标系沿其坐标轴正向平移 $(\delta \bar{a}_c, B, 0)$, 得到主模块编队轨道坐标系. 不难推出, 绕飞轨道的单位法线矢量在主模块编队轨道坐标系下的分量为

$$\begin{aligned} n_{x_2} &= 2C \cos \psi / N \\ n_{y_2} &= C \sin \psi / N \\ n_{z_2} &= -2A / N \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $N = \sqrt{C^2(1 + 3\cos^2 \psi) + 4A^2}$.

绕飞轨道平面相对于主模块编队轨道坐标系的方向可参考经典轨道六要素的定义方式, 即定义 $O_s X_2$ 轴正向绕 $O_s Z_2$ 轴正向逆时针旋转到与 n_{x_2} 重合时的旋转角度 $\tilde{\Omega}$ 为绕飞轨道平面的相对升交点赤经, 定义 n_{z_2} 与 $O_s Z_2$ 轴正向的夹角 \tilde{i} 为绕飞轨道平面的相对轨道倾角, 其表达式

$$\begin{aligned} \tan \tilde{\Omega} &= -n_{x_2} / n_{y_2} = -2 \cot \psi \\ \cos \tilde{i} &= n_{z_2} = \frac{-2A}{\sqrt{C^2(1 + 3\cos^2 \psi) + 4A^2}} \end{aligned} \quad (9)$$

2.2 J2 摄动下编队构形的变化

根据平均摄动法^[9], 平均轨道要素在 J2 摄动影响下的摄动方程为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{a}} &= \dot{\bar{e}} = \dot{\bar{i}} = 0 \\ \dot{\bar{\Omega}} &= -\frac{3J_2 \sqrt{\mu} R_c^2}{2 \sqrt{\bar{a}^7} (1 - \bar{e}^2)^2} \cos \bar{i} \\ \dot{\bar{\omega}} &= \frac{3J_2 \sqrt{\mu} R_c^2}{4 \sqrt{\bar{a}^7} (1 - \bar{e}^2)^2} (5 \cos^2 \bar{i} - 1) \\ \dot{\bar{M}} &= \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}} + \frac{3J_2 \sqrt{\mu} R_c^2}{4 \sqrt{\bar{a}^7} (1 - \bar{e}^2)^{3/2}} (3 \cos^2 \bar{i} - 1) \end{aligned} \quad (10)$$

式中: J_2 为带谐系数, R_c 为地球半径, μ 为地球引力常数. 分别计算主、从模块的平均轨道要素变化率时只需在上式中替换相对应的变量即可。

由前文知, 从模块与主模块的平均轨道要素差为小量, 近似为一阶变分关系, 对从模块与主模块的平均轨道要素变化率之差也作近似一阶变分处理, 结合式(10) 推得

$$\begin{aligned} \delta \dot{\bar{a}}_c &= \delta \dot{\bar{e}}_c = \delta \dot{\bar{i}}_c = 0; \\ \delta \dot{\bar{\Omega}}_c &= -\frac{7 \dot{\bar{\Omega}}_c}{2 \bar{a}_c} \delta \bar{a}_c + \frac{4 \bar{e}_c \dot{\bar{\Omega}}_c}{\bar{a}_c (1 - \bar{e}_c^2)} \delta \bar{e}_c - \frac{\dot{\bar{\Omega}}_c \sin \bar{i}_c}{\cos \bar{i}_c} \delta \bar{i}_c; \\ \delta \dot{\bar{\omega}}_c &= -\frac{7 \dot{\bar{\omega}}_c}{2 \bar{a}_c} \delta \bar{a}_c + \frac{4 \bar{e}_c \dot{\bar{\omega}}_c}{\bar{a}_c (1 - \bar{e}_c^2)} \delta \bar{e}_c - \\ &\quad \frac{15 J_2 \sqrt{\mu} R_c^2}{4 \sqrt{\bar{a}_c^7} (1 - \bar{e}_c^2)^2} \sin(2 \bar{i}_c) \delta \bar{i}_c; \\ \delta \dot{\bar{M}}_c &= -\frac{7 \dot{\bar{M}}_c + 3 \sqrt{\mu / \bar{a}_c^3}}{2 \bar{a}_c} \delta \bar{a}_c + \frac{3 \bar{e}_c \dot{\bar{M}}_c}{\bar{a}_c (1 - \bar{e}_c^2)} \delta \bar{e}_c - \\ &\quad \frac{9 J_2 \sqrt{\mu} R_c^2}{4 \sqrt{\bar{a}_c^7} (1 - \bar{e}_c^2)^{3/2}} \sin(2 \bar{i}_c) \delta \bar{i}_c \end{aligned} \quad (11)$$

根据主模块的初始时刻平均轨道要素和编队构形要求设计得到的从模块的初始平均轨道要

素,虽然在初始时刻满足构形要求,但是考虑 J2 摄动的影响后,随着主、从模块的飞行,约束条件就不再精确满足,下面分析编队构形受 J2 摄动的影响情况。

分析编队构形的形状和方向的变化,包括分析 $\delta \bar{a}_c$ 、 A 、 φ 、 B 、 $\bar{\Omega}$ 和 \bar{i} 的变化率。

$$\begin{aligned} \delta \dot{\bar{a}}_c &= 0 \\ \dot{A} &\approx \bar{a}_c \bar{e}_c \delta \dot{M}_c \\ \dot{\varphi} &\approx -\delta \dot{M}_c \\ \dot{B} &\approx \bar{a}_c (\delta \dot{\omega}_c + \delta \dot{M}_c + \delta \dot{\Omega}_c \cos \bar{i}_c) \\ \dot{\bar{\Omega}} &\approx \dot{\omega}_c + \delta \dot{M}_c - \delta \dot{\Omega}_c / \delta \bar{i}_c \\ \dot{\bar{i}} &\approx -\dot{\omega}_c - \delta \dot{M}_c + \delta \dot{\Omega}_c / \delta \bar{i}_c \end{aligned} \quad (12)$$

综上,给定主模块的平均轨道要素和编队构形尺寸参数就可分析各变量变化的量级,选取主要变形进行修正即可。考虑主、从模块的轨道高度在 1 000 km 左右,空间圆形编队半径为几千米到几十千米。由式(10)知, $\dot{\omega}_c$ 的数量级为 10^{-7} 左右,从模块与主模块的平均轨道要素差的数量级为 10^{-3} 左右。根据式(11)知, $\delta \dot{\Omega}_c$ 、 $\delta \dot{\omega}_c$ 和 $\delta \dot{M}_c$ 的数量级均为 10^{-9} 左右,因此可推得如下结论:

$$\begin{aligned} O(\delta \dot{\bar{a}}_c) &= 0, O(\dot{A}) \approx 10^{-9}, O(\dot{\varphi}) \approx 10^{-9} \\ O(\dot{B}) &\approx 10^{-5}, O(\dot{\bar{\Omega}}) \approx 10^{-6}, O(\dot{\bar{i}}) \approx 10^{-6} \end{aligned} \quad (13)$$

因此,对主、从模块在编队初始时刻的平均轨道要素的修正应主要抑制绕飞轨道平面的迹向漂移速度 \dot{B} 、进动角速度 $\dot{\bar{\Omega}}$ 和章动角速度 $\dot{\bar{i}}$ 。

2.3 平均轨道要素的修正公式

孟鑫等提出了编队飞行卫星相对运动的零 J2 摄动条件,满足该条件的编队卫星能有效地抑制绕飞轨道平面的迹向漂移速度 \dot{B} 、进动角速度 $\dot{\bar{\Omega}}$ 和章动角速度 $\dot{\bar{i}}$ ^[12],公式如下:

$$\delta \dot{\bar{\Omega}}_c = 0; \delta \dot{\omega}_c + \delta \dot{M}_c = 0 \quad (14)$$

该公式结合式(11)可推得零 J2 摄动条件的一阶近似表达式,然而,在 $\bar{e}_c = 0$ 时,只有零解,即 $\delta \bar{a}_c = \delta \bar{i}_c = 0$ 。这是因为式(11)在 $\bar{e}_c = 0$ 时仅有零解。本文考虑的主模块的平均轨道要素为太阳同步轨道,满足 $\bar{e}_c = 0$,采用零 J2 摄动条件进行修

正的结果等价于未修正。

由于集群航天器是通过无线连接实现能量传输和数据交互的虚拟航天器系统,其对模块间相对位置的要求要大于绕飞轨道方向的要求。基于上述考虑,本文将主要抑制绕飞轨道平面的迹向漂移速度 \dot{B} ,在 $\bar{e}_c = 0$ 时,修正公式如下:

$$\begin{aligned} \delta \bar{a}_c &= -\frac{m_1 + m_2 \cdot m_3}{k_1 + k_2 + k_3} \delta \bar{i}_c \\ m_1 &= \dot{\bar{\Omega}}_c \sin \bar{i}_c, m_2 = 5 + 3 \sqrt{1 - \bar{e}_c^2} \\ m_3 &= \frac{3J_2 \sqrt{\mu} R_c^2}{4 \sqrt{\bar{a}_c^7} (1 - \bar{e}_c^2)^2} \sin(2 \bar{i}_c) \\ k_1 &= \frac{7 \dot{\bar{\Omega}}_c}{2 \bar{a}_c} \cos \bar{i}_c, k_2 = \frac{7 \dot{\omega}_c}{2 \bar{a}_c} \\ k_3 &= \frac{7 \dot{M}_c + 3 \sqrt{\mu / \bar{a}_c^3}}{2 \bar{a}_c} \end{aligned} \quad (15)$$

使用上式对由编队构形设计步骤计算的从模块在编队初始时刻的平均轨道半长轴进行修正时,先将主模块在编队初始时刻的平均轨道要素代入式(10)中,求得 $\dot{\bar{\Omega}}_{c0}$ 、 $\dot{\omega}_{c0}$ 和 \dot{M}_{c0} 并代入式(15),得到平均半长轴修正量 $\delta \bar{a}_c$ 。

2.4 轨道要素的转换及摄动方程

在仅考虑 J2 摄动时,平均轨道要素到密切轨道要素的转换公式,有许多文献做了研究,但大多只考虑了 J2 摄动引起的短周期变化项,并且尚未考虑在 $\bar{e}_c = 0$ 时,转换公式存在奇异性的问题^[13-14]。本文采用了考虑长周期变化项的精度相对较高的无奇点轨道根数转换公式^[10]。

将修正后的主、从模块的初始平均轨道要素转换为初始密切轨道要素后,通过求解摄动方程,可计算编队构形随时间的变化。由欧拉角定义的经典轨道要素存在奇异性;而改进的春分点轨道要素虽然避免了奇异性,但存在繁琐的三角函数计算。本文采用新四元数轨道要素表示的摄动方程^[11]。

3 仿真算例及结果分析

本文仿真算例为太阳同步轨道空间圆形编队问题,绕飞半径为 10 km;从模块 3 个,彼此初始相位差相等,选取 $\varphi = 0$ 。主模块位于太阳同步轨道,已知其在编队初始时刻的平均轨道要素^[3],求得 3 个从模块在编队初始时刻的平均轨道要素,

见表1. 由式(15)得到从模块平均轨道要素修正量, 见表2. 相应的, 未修正的平均轨道要素 $\bar{\sigma}$ 转换为密切轨道要素的结果见表3, 修正的与未修正的密切轨道要素之差见表4. 由2.3节知, 修正与未修正的仿真结果的对比即采用本文的修正公式与采用零J2摄动条件进行修正的对比.

表1 模块初始时刻的平均轨道要素

Tab.1 Initial mean orbital elements of modules

模块	\bar{a}/km	$\bar{e}/10^{-4}$	$\bar{i}/(^{\circ})$	$\bar{\Omega}/(^{\circ})$	$\bar{\omega}/(^{\circ})$	$\bar{M}/(^{\circ})$
主模块	7 355.31	0	99.37	50.27	0	0
从模块1	7 355.31	6.797 8	99.37	50.34	0.011 1	0
从模块2	7 355.31	6.797 8	99.43	50.24	239.99	120
从模块3	7 355.31	6.797 8	99.31	50.24	119.99	240

为验证相对运动模型的有效性, 不考虑J2摄动时, 主、从模块的初始平均轨道要素可当作初始密切轨道要素进行仿真验证, 取仿真时间为1个轨道周期, 各模块摄动仿真结果与理想编队设计的相对位置误差见图1. 修正 $\bar{\sigma}$ 后J2摄动下编队飞行的三维轨迹见图2. 考虑J2摄动时, 取仿真

表4 修正 $\bar{\sigma}$ 与未修正 $\bar{\sigma}$ 的从模块初始密切轨道要素之差

Tab.4 The difference between revised and unrevised osculating orbital elements of deputy modules

从模块	$\Delta a/\text{m}$	Δe	$\Delta i/(^{\circ})$	$\Delta \Omega/(^{\circ})$	$\Delta \omega/(^{\circ})$	$\Delta M/(^{\circ})$
1	0	0	0	0	0	0
2	6.376 7	-10^{-10}	9.8×10^{-9}	-1.8×10^{-11}	-7.1×10^{-5}	7.1×10^{-5}
3	-6.376 7	10^{-10}	-9.7×10^{-9}	-1.4×10^{-11}	-7.1×10^{-5}	7.1×10^{-5}

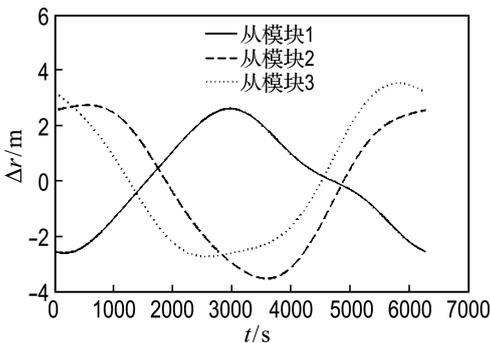


图1 无J2摄动时编队构形的相对位置误差

Fig.1 Relative position error of formation configuration without J2 perturbation

由图1可知, 在不考虑J2摄动时, 实际编队飞行中与绕飞半径10 km的理想空间圆形的相对位置误差仅在4 m左右, 验证了本文相对运动模型的有效性. 考虑J2摄动时, 对比图1与图3(a)知,

时间为3个交点周期^[10], 将未修正的 $\bar{\sigma}$ 转换为密切轨道要素, 相应的编队构形的相对位置误差见图3(a), 修正 $\bar{\sigma}$ 后的编队构形的相对位置误差见图3(b).

表2 从模块的平均轨道半长轴修正量

Tab.2 Revised values for mean orbital semi-major axis of deputy modules

从模块	$\delta \bar{a}_c/\text{m}$
1	0
2	6.384 3
3	-6.384 3

表3 未修正 $\bar{\sigma}$ 时模块的初始密切轨道要素

Tab.3 Initial osculating orbital elements of modules with original $\bar{\sigma}$

模块	a/km	$e/10^{-4}$	$i/(^{\circ})$	$\Omega/(^{\circ})$	$\omega/(^{\circ})$	$M/(^{\circ})$
主模块	7 364.05	4.286 2	99.36	50.27	0	0
从模块1	7 364.07	11.095 0	99.36	50.34	0.019 1	359.99
从模块2	7 364.04	5.941 3	99.42	50.24	278.56	81.44
从模块3	7 364.05	5.939 0	99.31	50.24	81.48	278.51

编队构形发生了较大改变, 相对位置误差随飞行时间逐渐增大, 在3个交点周期已达到近300 m. 由图3(a)与图3(b)对比可知, 从模块1的相对位置误差并没有减小, 因为两者同平均轨道倾角, 故无须修正, 但其他从模块的相对位置误差从

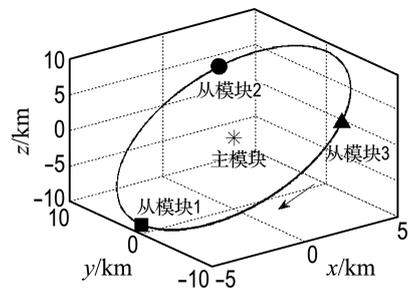


图2 修正 $\bar{\sigma}$ 后J2摄动下编队飞行的三维轨迹

Fig.2 Three-dimensional trajectory of formation flight with revised $\bar{\sigma}$ for J2 perturbation

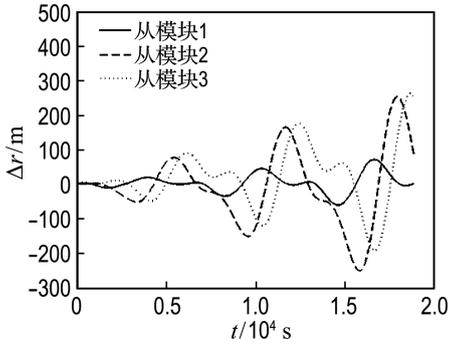
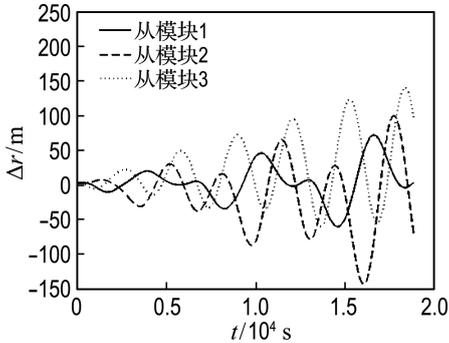
(a) 未修正 $\bar{\sigma}$ 时(b) 修正 $\bar{\sigma}$ 时

图 3 未修正与修正 $\bar{\sigma}$ 后 J2 摄动下编队构形的相对位置误差

Fig. 3 Relative position errors of formation configuration with original and revised $\bar{\sigma}$ for J2 perturbation

300 m 减少至 150 m, 验证了本文的修正公式可有效抑制绕飞轨道的迹向漂移. 由图 2 可知, 各从模块之间相位差相同, 并在中心为主模块、半径为 10 km 的空间圆形轨道上飞行.

4 结 论

(1) 当主模块位于小偏心率轨道, 不考虑 J2 摄动时, 相对运动方程设计结果具有很高的精度, 但不适用于赤道轨道和极地轨道的编队构形设计.

(2) 主模块位于太阳同步轨道, 其平均轨道偏心率为 0 时, 无法采用零 J2 摄动条件进行修正.

(3) 本文的修正公式有效抑制了编队构形的迹向漂移, 实际编队时, 从模块与主模块的平均轨道倾角之差越小, 其相对漂移越小, 所以应尽可能设计同轨道倾角编队. 考虑 J2 摄动时, 采用平均轨道要素差对集群航天器进行空间圆形编队设计, 对其后续编队构形保持、节省燃料和控制律的设计具有重要意义.

参考文献:

- [1] Mathieu C, Weigel A L. Assessing the flexibility provided by fractionated spacecraft [C] // **Space 2005 Conference**. Long Beach: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005: 6700.
- [2] 胡 敏, 曾国强. 集群航天器发展概况[J]. 装备指挥技术学院学报, 2011, **22**(4): 61-66.
HU Min, ZENG Guo-qiang. Developments of the fractionated spacecraft [J]. **Journal of the Academy of Equipment Command & Technology**, 2011, **22**(4): 61-66. (in Chinese)
- [3] 杨嘉辉. 航天器轨道动力学与控制(上)[M]. 北京: 中国宇航出版社, 2009.
YANG Jia-zhi. **Spacecraft Orbit Dynamics and Control: Part 1** [M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2009. (in Chinese)
- [4] 高云峰, 宝音贺西, 李俊峰. 卫星编队飞行中 C-W 方程与轨道根数法的比较[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(8): 799-804.
GAO Yun-feng, BAOYIN He-xi, LI Jun-feng. Comparison of two methods in satellite formation flying [J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2003, **24**(8): 799-804. (in Chinese)
- [5] 安雪滢. 椭圆轨道航天器编队飞行动力学及应用研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2006.
AN Xue-ying. Dynamics and application of spacecraft formation flying in eccentric orbits [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2006. (in Chinese)
- [6] 殷建丰, 贺 泉, 韩 潮. 基于相对轨道要素的航天器相对运动碰撞分析[J]. 航空学报, 2011, **32**(2): 311-320.
YIN Jian-feng, HE Quan, HAN Chao. Collision analysis of spacecraft relative motion based on relative orbit elements [J]. **Acta Aeronautica et Astronautica Sinica**, 2011, **32**(2): 311-320. (in Chinese)
- [7] 孟 鑫, 李俊峰, 高云峰. 一种便于摄动分析的编队飞行卫星相对运动的描述[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(11): 72-80.
MENG Xin, LI Jun-feng, GAO Yun-feng. Useful relative motion description method for perturbations analysis in satellite formation flying [J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2005, **26**(11): 72-80. (in Chinese)

- [8] 胡敏, 曾国强. 平均轨道根数与密切轨道根数的互换[J]. 飞行器测控学报, 2012, 31(2):77-81.
HU Min, ZENG Guo-qiang. Transformation between mean and osculating orbital elements [J]. **Journal of Spacecraft TT&C Technology**, 2012, 31(2):77-81. (in Chinese)
- [9] 刘林. 航天器轨道理论[M]. 北京:国防工业出版社, 2000.
LIU Lin. **Orbit Theory of Spacecraft** [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2000. (in Chinese)
- [10] 袁建平, 和兴锁. 航天器轨道机动动力学[M]. 北京:中国宇航出版社, 2010.
YUAN Jian-ping, HE Xing-suo. **Spacecraft Orbital Maneuvering Dynamic** [M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2010. (in Chinese)
- [11] 曹静, 袁建平, 罗建军. 一组新的四元数轨道要素建模方法[J]. 中国空间科学技术, 2013(5):62-68.
CAO Jing, YUAN Jian-ping, LUO Jian-jun. A set of novel orbital elements modeling approach using quaternion [J]. **Chinese Space Science and Technology**, 2013(5):62-68. (in Chinese)
- [12] 孟鑫, 李俊峰, 高云峰. 编队飞行卫星相对运动的零 J2 摄动条件[J]. 清华大学学报:自然科学版, 2004, 44(2):219-223.
MENG Xin, LI Jun-feng, GAO Yun-feng. J2 invariant perturbation conditions for the relative movement for satellites in formation flying [J]. **Journal of Tsinghua University: Science and Technology**, 2004, 44(2):219-223. (in Chinese)
- [13] 郝继刚. 分布式卫星编队构形控制研究[D]. 长沙:国防科学技术大学, 2006.
HAO Ji-gang. Study on formation configuration control of distributed satellites [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2006. (in Chinese)
- [14] 王瑞, 向开恒, 马兴瑞. 平均轨道要素及其在卫星星座设计中的应用[J]. 中国空间科学技术, 2002(5):16-22.
WANG Rui, XIANG Kai-heng, MA Xing-rui. The mean orbit elements and its application in the satellite constellation design [J]. **Chinese Space Science and Technology**, 2002(5):16-22. (in Chinese)

Space circular formation configuration design of fractionated spacecraft based on difference of mean orbital elements for J2 perturbation

ZHANG Shuo¹, WU Guo-qiang^{*1,2}

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Fractionated spacecraft is a virtual spacecraft system which is constituted by wireless connection. The space circular formation configuration design as the chief module at the sun-synchronous orbit for J2 perturbation, has great significance of meeting the needs of energy transfer and data exchange accurately between the modules, and its application requirements. To begin with, relative motion model is established through the difference of mean orbital elements between deputy module and chief module, and the design steps of the space circular formation configuration are given. The J2 invariant perturbation conditions are no longer applied, so the revised formula is proposed through the quantitative analysis of J2 perturbation. The initial formation configuration is determined by converting the revised mean orbital elements to the osculating orbital elements at the initial time. The nonsingular novel quaternion orbital elements are used to analyze J2 perturbation, and the efficacy of the design method is demonstrated by the results of simulations.

Key words: J2 perturbation; mean orbital elements; fractionated spacecraft; space circular formation