

# 考虑临界变形量变化的结合面法向接触刚度计算模型

党会鸿, 孙清超\*, 马跃, 黄信

(大连理工大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 考虑微凸体接触过程中临界变形量变化, 建立结合面法向接触刚度计算模型. 采用分形几何表征结合面的形貌特征, 由表面形貌测量数据得到分形函数的分形参数  $D$  和  $G$ . 采用弹塑性变形接触理论分析微凸体的接触变形特征, 得到微凸体的临界变形量估计模型, 其是分形参数和微凸体接触变形量的函数, 进而得到考虑临界变形量变化的单个微凸体的接触刚度计算模型. 由分形理论得到粗糙表面微凸体分布函数, 微凸体分布函数与单个微凸体接触刚度计算模型结合得到结合面的法向接触刚度计算模型. 通过对比计算结果与实验数据, 验证了所提模型的合理性.

**关键词:** 结合面; 法向接触刚度; 分形几何; 临界变形量; 微凸体分布函数

**中图分类号:** TH123

**文献标识码:** A

**doi:** 10.7511/dllgxb201504006

## 0 引言

机械产品往往由成百上千个零部件构成, 零部件之间相互连接而构成的接触表面被称为结合面. 结合面特性对机械结构静动性能影响显著, 除焊接外, 机械结构总刚度的 40% ~ 60%、总阻尼的 90% 都来源于机械结合面<sup>[1-3]</sup>, 确定结合面接触参数对于分析整机静动特性至关重要. 法向接触刚度是最重要的结合面参数之一. 根据粗糙表面表征方式的不同, 结合面法向接触刚度计算模型可以分为两种类型:

(1) 基于表面形貌统计的法向接触刚度计算模型. Greenwood 和 Williamson 发现许多工程表面上的微凸峰高度近似服从 Gauss 分布, 并基于 3 个假设提出了著名的 GW 模型<sup>[4]</sup>. GW 模型首次考虑材料表面形貌参数, 对粗糙表面间的接触理论研究产生重要影响. 随后, Whitehouse 和 Archard 研究了峰高与峰顶曲率的相关性及其联合分布概率密度, 提出了 WA 模型<sup>[5]</sup>. 张波等<sup>[6]</sup>、饶柱石等<sup>[7]</sup> 基于表面形貌统计分析方法, 考虑塑性接触、表面波纹度等因素的影响, 分别建立了结合面法向接触刚度计算模型. Almqvist 等<sup>[8]</sup>、Jeng

等<sup>[9]</sup> 和赵永武等<sup>[10-11]</sup> 分别在对粗糙表面形貌进行统计描述的基础上, 基于接触力学理论建立了粗糙表面弹塑性微观接触模型. 表面形貌统计方法的表面形貌参数受测量仪器分辨率影响显著, 表面形貌的高度分布等具有非稳定的随机特性. 一定测量条件下获得的统计学表征参数反映的是仪器分辨率相关尺度的粗糙度信息, 没有反映表面粗糙度全部信息.

(2) 基于分形几何理论的法向接触刚度计算模型. Majumdar 等针对粗糙表面形貌的研究发现, 某些机械零件表面具有统计自仿射分形特征<sup>[12]</sup>, 其分形特征与尺度无关, 可以提供存在于分形面上所有尺度范围内的全部粗糙度信息. Majumdar 等<sup>[13-14]</sup> 利用 Weierstrass-Mandelbrot 分形函数(WM 函数) 表征表面形貌, 提出了基于分形几何理论的接触模型. 此后, 陈辉等<sup>[15]</sup> 用随机中点位移和 WM 函数对轮廓和表面进行模拟, 得到了分形维数  $D$  和幂率谱的关系. Wang 等<sup>[16]</sup> 引入微凸体截面的接触面积, 以区分微凸体的实际接触面积; 杨红平等<sup>[17]</sup> 考虑微凸体由弹性变形向弹塑性、全塑性变形的变化过程, 建立各阶段的

微凸体接触刚度模型. 贺林等<sup>[18]</sup> 考虑微凸体接触过程中顶端曲率半径的变化, 得出微凸体接触面积较小时微凸体发生塑性变形, 而随着接触面积增大微凸体发生弹性变形的结论.

基于分形几何的表面形貌模拟具有特征唯一性特点, 本文采用分形函数模拟粗糙表面形貌, 并结合实测表面形貌数据确定分形参数. 本研究考虑接触过程中微凸体顶端曲率半径、临界变形量的变化, 建立微凸体接触状态描述模型, 并结合表面形貌分形特征确定变形量分布函数, 进而建立考虑临界变形量变化的结合面法向接触刚度计算模型, 并对比实验数据<sup>[19]</sup> 验证模型的合理性与准确性.

1 基于分形几何的表面形貌表征

1.1 表面轮廓的分形函数

采用 WM 函数表征粗糙表面表面形貌, WM 函数表达式<sup>[13-14]</sup> 为

$$Z(x) = G^{D-1} \sum_{n=n_l}^{\infty} \gamma^{-(2-D)n} \cos 2\pi \gamma^n x \quad (1)$$

式中:  $Z(x)$  为粗糙表面轮廓的高度;  $x$  为粗糙表面轮廓的位移坐标;  $G$  为反映  $Z(x)$  大小的特征尺度系数,  $G$  越大则表面越粗糙;  $D$  为分形轮廓曲线的分形维数, 对于二维分形  $1 < D < 2$ ;  $\gamma^n$  为 WM 函数的频率, WM 函数以等比级数形成一个从  $\gamma^{n_l}$  到无限的频谱;  $n$  为  $n_l$  空间频率序数.

图 1 所示为分形参数  $D = 1.6, G = 1 \times 10^{-11}, L = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$  和  $\gamma = 1.5$  时, 根据 WM 函数在 Matlab 软件中编写程序生成的一条分形表面轮廓曲线.

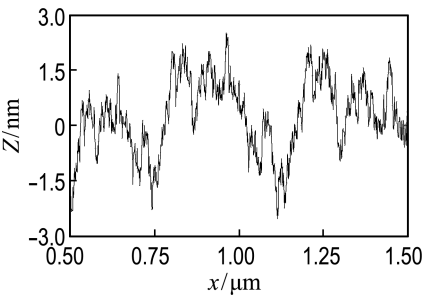


图 1 WM 分形函数轮廓曲线

Fig. 1 The profile curve of WM fractal function

WM 函数在不同放大倍数下的分形轮廓曲

线结构具有自仿射相似性, 具有无限的细节特征, 其分形特征与尺度无关, 可以提供存在于分形面上所有尺度范围内的全部粗糙度信息.

1.2 分形参数的获得

分形参数  $D$  和  $G$  可以通过轮廓曲线  $Z(x)$  的结构函数求得. 结构函数的定义为

$$S(\tau) = \langle [Z(x + \tau) - Z(x)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau} - 1) \mathrm{d}\omega \quad (2)$$

式中:  $\tau$  为  $x$  的任意增量,  $\langle \rangle$  表示空间平均值. 将功率谱代入到上式中并积分得

$$S(\tau) = C G^{2(D-1)} \tau^{4-2D} \quad (3)$$

$$C = \frac{\Gamma(2D-3) \sin[(2D-3)\pi/2]}{(4-2D) \ln \gamma} \quad (4)$$

当  $1 < D < 2$  时, 对于确定的  $D$  值,  $C$  为常数. 结构函数也为幂函数, 在双对数坐标上  $S(\tau)$  与  $\tau$  呈直线关系. 当直线斜率  $k$  满足  $0 < k < 2$  时, 轮廓是分形的, 便可由  $D = (4 - k)/2$  计算其分维. 再由直线在  $S(\tau)$  轴上的截距计算出  $G$  值<sup>[20]</sup>.

2 考虑临界变形量变化的微凸体接触状态

2.1 微凸体形貌及接触状态

基于表面形貌统计的法向接触刚度计算<sup>[4-11]</sup>, 以及基于分形几何理论的法向接触刚度计算<sup>[13-18]</sup> 普遍将结合面简化为一个粗糙表面与一个刚性理想表面之间的接触. 微观尺度上, 两个表面间的接触发生在微凸体上, 因此微凸体接触状态研究是建立结合面法向接触刚度计算模型的基础.

接触之前的单个微凸体形貌分形函数可以简化表达为<sup>[17-18]</sup>

$$Z_0(x) = G^{D-1} l^{2-D} \cos \frac{\pi x}{l} \quad (5)$$

式中:  $l$  为单个微凸体的接触长度,  $-l/2 < x < l/2$ .

根据微凸体形貌特征, 接触分析过程中通常将其等效为球体<sup>[4-18]</sup>, 其等效曲率半径为  $R$ . 当不受荷载作用时, 球体与理想平面的接触状态如图 2(a) 所示; 在法向荷载  $P$  作用下, 微凸体将产生法向接触变形  $\delta$ , 其接触状态如图 2(b) 所示.

根据式(5)所示的微凸体函数及图 2 所示的接触状态, 可以得到微凸体顶端的曲率半径  $R$  为

$$R = \left| 1 / \left| \frac{d^2 Z}{dx^2} \right|_{x=0} \right| = \frac{a^{D/2}}{\pi^2 G^{D-1}} \quad (6)$$

式中： $a$  对应于接触点的面积。典型微凸体接触过程中存在  $R \gg \delta$ ,  $a = \pi R \delta^{[13]}$ , 曲率半径  $R$  与微凸体变形量  $\delta$ 、接触面积  $a$  之间的关系可以表达为

$$R = \pi^{\frac{D-4}{2-D}} G^{\frac{2-2D}{2-D}} \delta^{\frac{D}{2-D}} \quad (7)$$

$$\delta = \pi G^{D-1} a^{\frac{2-D}{2}} \quad (8)$$

$$a = \pi^{\frac{2}{D-2}} G^{\frac{2-2D}{2-D}} \delta^{\frac{2}{2-D}} \quad (9)$$

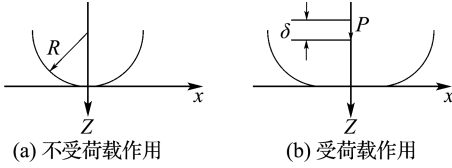


图2 微凸体接触变形

Fig. 2 The contact deformation of asperity

## 2.2 微凸体临界变形量

确定真实接触面积中弹性变形和塑性变形接触面积的研究表明,微凸体由弹性变形向塑性变形转变的临界变形量取决于曲率半径  $R^{[4]}$ :

$$\delta_c = \left( \frac{\pi H}{2E} \right)^2 R \quad (10)$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (11)$$

式中： $H$  为较软材料的硬度,  $E$  表示复合弹性模量,  $E_1$ 、 $E_2$  和  $\nu_1$ 、 $\nu_2$  分别代表两接触材料的弹性模量和泊松比。

式(7)表明,接触过程中曲率半径  $R$  不是常数,其随着变形量  $\delta$  而变化。进一步可得到变形量  $\delta$  与临界变形量  $\delta_c$  之间的关系:

$$\delta_c = \left( \frac{\pi H}{2E} \right)^2 \pi^{\frac{D-4}{2-D}} G^{\frac{2-2D}{2-D}} \delta^{\frac{D}{2-D}} \quad (12)$$

建立函数  $f(\delta) = \delta_c - \delta$ . 求解方程  $f(\delta) = 0$ , 可以得出临界变形量  $\delta_c$  如下所示:

$$\delta_c = \left( \frac{\pi H}{2E} \right)^{\frac{2-D}{1-D}} \pi^{\frac{D-4}{2-D}} G \quad (13)$$

当  $\delta < (\pi H/2E)^{\frac{2-D}{1-D}} \pi^{\frac{D-4}{2-D}} G$  时微凸体处于塑性变形区. 同时当  $\delta > (\pi H/2E)^{\frac{2-D}{1-D}} \pi^{\frac{D-4}{2-D}} G$  时微凸体处于弹性变形区。

上述变化规律表明,初始接触时存在  $\delta < \delta_c$ , 微凸体发生塑性变形;随着变形增大,  $\delta > \delta_c$ , 微凸体发生弹性变形. 塑性接触区随着分形维数  $D$  增

大而减小,随着  $G$  增大而增大。

## 2.3 法向荷载与微凸体变形量的关系

根据赫兹接触理论,塑性接触点上接触面积  $a$  与荷载  $P_p(a)$  的关系为<sup>[21]</sup>

$$P_p(a) = Ha \quad (14)$$

将式(9)代入式(14),则得到塑性接触点上荷载  $P_p(\delta)$  与变形量  $\delta$  的关系:

$$P_p(\delta) = H \pi^{\frac{2}{D-2}} G^{\frac{2-2D}{2-D}} \delta^{\frac{2}{2-D}} \quad (15)$$

对于弹性变形,单个微凸体的接触荷载与变形量  $\delta$  之间的关系为<sup>[21]</sup>

$$P_e(\delta) = \frac{4}{3} E R^{1/2} \delta^{3/2} = \frac{4}{3} E \pi^{\frac{D-4}{4-2D}} G^{\frac{1-D}{2-D}} \delta^{\frac{3-D}{2-D}} \quad (16)$$

## 2.4 单个微凸体的法向接触刚度

单个微凸体的法向接触刚度是微凸体的弹性法向接触荷载比上单个微凸体的变形量,如下式所示:

$$k_e = \frac{dP_e}{d\delta} \quad (17)$$

将式(16)代入式(17) 可得单个微凸体的法向接触刚度如下式所示:

$$k_e = \frac{dP_e}{d\delta} = \frac{12-4D}{6-3D} E \pi^{\frac{D-4}{4-2D}} G^{\frac{1-D}{2-D}} \delta^{\frac{1}{2-D}} \quad (18)$$

## 3 结合面法向接触刚度计算模型

### 3.1 微凸体变形量分布函数

WM 函数模拟的粗糙表面,微凸体面积分布遵循以下幂函数变化规律<sup>[22]</sup>:

$$N(A > a) = \left( \frac{a_{\max}}{a} \right)^{\frac{D}{2}} \quad (19)$$

其中  $a_{\max}$  为最大的接触面积,  $N(A > a)$  表示面积  $A$  大于  $a$  的微凸体的总数. 将式(9)代入式(19), 得到变形量  $\Delta > \delta$  的微凸体总数:

$$N(\Delta > \delta) = \delta_{\max}^{\frac{D}{2-D}} / \delta^{\frac{D}{2-D}} \quad (20)$$

其中  $\delta_{\max}$  为与  $a_{\max}$  对应的微凸体最大变形量. 由  $N(\Delta > \delta)$  的表达式,可以得到微凸体的变形量分布密度函数:

$$f(\delta) = \frac{D}{2-D} \delta_{\max}^{\frac{D}{2-D}} \delta^{\frac{2}{2-D}} \quad (21)$$

### 3.2 结合面法向接触荷载计算公式

以接触变形量  $\delta$  为自变量,结合面总体法向荷载  $P$  可以表达为

$$P = \int_0^{\delta_c} P_p(\delta) f(\delta) d\delta + \int_{\delta_c}^{\delta_{\max}} P_e(\delta) f(\delta) d\delta \quad (22)$$

其中  $\delta_c$  为微凸体临界变形量,  $\delta < \delta_c$  微凸体发生塑性变形,  $\delta > \delta_c$  发生弹性变形. 将式(15)、(16)及(21)代入式(22),可以得到:

$$P = \int_0^{\delta_c} H \pi^{\frac{2}{D-2}} G^{\frac{2-2D}{2-D}} \delta^{\frac{2}{2-D}} \frac{D}{2-D} \delta_{\max}^{\frac{D}{2-D}} \delta_{\max}^{\frac{2}{D-2}} d\delta + \int_{\delta_c}^{\delta_{\max}} \frac{4}{3} E \pi^{\frac{D-4}{4-2D}} G^{\frac{1-D}{2-D}} \delta^{\frac{3-2D}{2-D}} \frac{D}{2-D} \delta_{\max}^{\frac{D}{2-D}} \delta_{\max}^{\frac{2}{D-2}} d\delta \quad (23)$$

当  $D \neq 1.5$  时,

$$P = \frac{D}{2-D} H \pi^{\frac{2}{D-2}} G^{\frac{2-2D}{2-D}} \delta_{\max}^{\frac{D}{2-D}} \delta_c + \frac{4}{3} \frac{D}{3-2D} \times E \pi^{\frac{D-4}{4-2D}} G^{\frac{1-D}{2-D}} \delta_{\max}^{\frac{D}{2-D}} (\delta_{\max}^{\frac{3-2D}{2-D}} - \delta_c^{\frac{3-2D}{2-D}}) \quad (24)$$

当  $D = 1.5$  时,

$$P = 3 H \pi^3 G^{-2} \delta_{\max}^3 \delta_c + 4 E \pi^{-2.5} G^{-1} \delta_{\max}^3 \ln \frac{\delta_{\max}}{\delta_c} \quad (25)$$

3.3 结合面法向接触刚度计算公式

求接触面上总的法向接触刚度时,不考虑塑性变形的情况,只需考虑弹性变形. 结合面的法向接触刚度等于整个结合面上所有微凸体刚度的集合,因此整个弹性接触区产生的法向接触刚度为所有微凸体接触刚度的积分,如下式所示:

$$K_n = \int_{\delta_c}^{\delta_{\max}} k_e f(\delta) d\delta = \int_{\delta_c}^{\delta_{\max}} \frac{12-4D}{6-3D} E \pi^{\frac{D-4}{4-2D}} G^{\frac{1-D}{2-D}} \delta^{\frac{1}{2-D}} \frac{D}{2-D} \times \delta_{\max}^{\frac{D}{2-D}} \delta_{\max}^{\frac{2}{D-2}} d\delta \quad (26)$$

可化简为

$$K_n = \frac{12D-4D^2}{6-9D+3D^2} E \pi^{\frac{D-4}{4-2D}} G^{\frac{1-D}{2-D}} \delta_{\max}^{\frac{D}{2-D}} (\delta_{\max}^{\frac{D-1}{D-2}} - \delta_c^{\frac{D-1}{D-2}}) \quad (27)$$

表达式中分形维数  $D$ 、特征尺度系数  $G$  是分形几何的参数,是可以测定的数据,当量弹性模量  $E$  与材料硬度  $H$  是材料的属性. 结合面法向接触刚度和结合面法向接触荷载都变换为微凸体最大变形量  $\delta_{\max}$  的函数,这样就建立了两者之间的关系,得到两个粗糙结合面在承受一定面压时的结合面的法向接触刚度值.

4 实验结果对比与分析

4.1 结合面法向接触刚度实验测量方法

本文采用 Jiang 等<sup>[19]</sup>的实验数据验证本文计算模型的合理性. 实验是通过测量试件的动力学

参数反推出结合面法向接触刚度. 图 3 是实验的动力学模型<sup>[23]</sup>. Jiang 等采用的实验装置有动力锤、加速度传感器、信号放大器和计算机等. 实验采用螺栓固定两个试件,动力锤敲打上试件,从动力锤获得激振力的信息,从加速度传感器获得位移等信息,再结合计算机分析得到结合面法向接触刚度数据. 测量结合面动力学特性进而得出结合面法向接触刚度是目前该领域常用的实验测量方法.

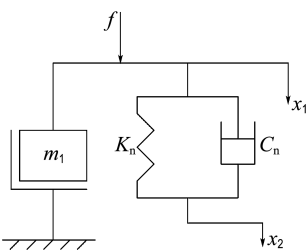


图 3 结合面动力学模型

Fig. 3 Dynamical model of joint surfaces

4.2 模型计算值与实验结果对比

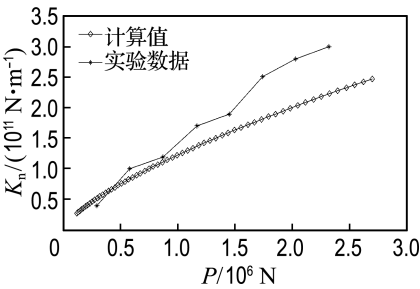
本模型计算数据与 Jiang 等的实验数据的参数相同,设置如下:材料为铸铁,材料弹性模量  $E=100$  GPa,泊松比  $\nu_1=\nu_2=0.25$ ,布氏硬度为 220. 接触表面采用铣削加工和磨削加工,实验中加工表面的分形维数  $D$  和特征尺度系数  $G$  如表 1 所示.

表 1 试件表面的分形参数值

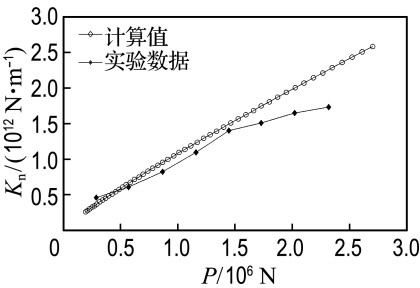
Tab. 1 Fractal parameter values of the profiles for specimens

| 样本 | $D$     | $G/m$                      |
|----|---------|----------------------------|
| 铣削 | 1.218 3 | $1.211\ 7 \times 10^{-14}$ |
| 磨削 | 1.405 8 | $9.758\ 2 \times 10^{-11}$ |

Jiang 等的实验数据反映结合面压力与结合面法向接触刚度的关系,其取结合面名义接触面积为  $1\text{ m}^2$ ,通过换算可以得到结合面法向荷载与结合面法向接触刚度的对应关系. 在结合面名义接触面积为  $1\text{ m}^2$  时,图 4(a)、(b)分别为铣削和磨削加工结合面法向接触刚度计算值与实验数据的对比情况. 本模型计算值是通过 Matlab 数学仿真得到的荷载-刚度曲线,实验数据是测量的 8 个离散数据值.



(a) 铣削结合面法向接触刚度



(b) 磨削结合面法向接触刚度

图 4 结合面法向接触刚度计算值与实验数据对比

Fig. 4 Comparison between calculated results and experimental data for normal contact stiffness of joint surfaces

表 2 和表 3 分别表示铣削试件和磨削试件的结合面法向荷载和法向接触刚度的对比值. 误差的正负号表示实验值和模型计算值的大小关系, 误差为正表示模型计算值比实验值大; 反之则表示模型计算值比实验值小.

从图表中不难看出, 本模型曲线与实验曲线整体趋势一致. 模型计算值与实验值接近, 误差都不大于 30%. 铣削表面的误差相对来说要大于磨削表面的误差. 对于铣削表面, 当荷载大于  $5.0 \times 10^5$  N 小于  $1.0 \times 10^6$  N 时, 误差较小; 在荷载大于  $1.5 \times 10^6$  N 时误差相对而言要大一些. 磨削表面当荷载大于  $5.0 \times 10^5$  N 小于  $1.5 \times 10^6$  N 时, 误差较小; 不过其误差有随着法向荷载增大而增大的趋势.

本文提出的法向接触刚度计算模型与传统的法向接触刚度计算模型<sup>[19]</sup>相比, 主要差异表现在: 两者的临界变形量计算方式不同, 实际上微凸体顶端的曲率半径  $R$  并不是常数, 而且按照分形理论的观点,  $R$  的大小取决于接触点的面积  $a$ , 而  $R$  的变化也将会影响到临界变形量, 同时  $R$  受微凸体变形的影响, 所以微凸体的临界变形量也

受微凸体变形的影响.

表 2 铣削表面法向接触刚度的实验值和计算值

| Tab. 2 Experimental data and calculated values for normal contact stiffness of milling surface |                                                   |                                                   |       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|-------|
| 荷载/<br>10 <sup>6</sup> N                                                                       | 实验刚度值/<br>(10 <sup>11</sup> N · m <sup>-1</sup> ) | 模型刚度值/<br>(10 <sup>11</sup> N · m <sup>-1</sup> ) | 误差/%  |
| 0.29                                                                                           | 0.40                                              | 0.51                                              | +27.5 |
| 0.58                                                                                           | 1.00                                              | 0.84                                              | -16.0 |
| 0.87                                                                                           | 1.20                                              | 1.12                                              | -6.7  |
| 1.16                                                                                           | 1.70                                              | 1.36                                              | -20.0 |
| 1.46                                                                                           | 1.89                                              | 1.60                                              | -15.3 |
| 1.74                                                                                           | 2.50                                              | 1.82                                              | -27.2 |
| 2.03                                                                                           | 2.80                                              | 2.06                                              | -26.4 |
| 2.32                                                                                           | 2.99                                              | 2.24                                              | -25.1 |

表 3 磨削表面法向接触刚度的实验值和计算值

| Tab. 3 Experimental data and calculated values for normal contact stiffness of grinding surface |                                                   |                                                   |       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|-------|
| 荷载/<br>10 <sup>6</sup> N                                                                        | 实验刚度值/<br>(10 <sup>12</sup> N · m <sup>-1</sup> ) | 模型刚度值/<br>(10 <sup>12</sup> N · m <sup>-1</sup> ) | 误差/%  |
| 0.29                                                                                            | 0.46                                              | 0.37                                              | -19.6 |
| 0.58                                                                                            | 0.61                                              | 0.66                                              | +8.2  |
| 0.87                                                                                            | 0.82                                              | 0.94                                              | +14.6 |
| 1.16                                                                                            | 1.10                                              | 1.23                                              | +11.8 |
| 1.46                                                                                            | 1.41                                              | 1.49                                              | +5.7  |
| 1.74                                                                                            | 1.51                                              | 1.73                                              | +14.6 |
| 2.03                                                                                            | 1.65                                              | 2.00                                              | +21.2 |
| 2.32                                                                                            | 1.73                                              | 2.24                                              | +29.5 |

但本文提出的计算模型与实验结果仍存在一定误差, 这个问题主要是由于建模与实际的差异造成的, 主要体现在以下几个方面: ①本模型把两个粗糙表面的接触简化成一个粗糙表面和理想平面的接触, 这与实际接触情况是有出入的. ②用分形几何函数模拟的表面与实际加工表面有差异. ③忽略了接触过程中各微凸体的相互影响. ④忽略了表面加工硬化等因素的影响. ⑤实验结果是由结合面动力学方法得到的, 实验结果与结合面实际法向接触刚度也有误差. 以上问题有待进一步深入研究.

5 结 论

(1) 结合微凸体形貌函数, 考虑微凸体接触过程中曲率半径随变形量的变化, 基于赫兹接触理论分析临界变形量随变形量动态变化的规律. 接

触过程中临界变形量随变形量增大而增大,初始接触时微凸体发生塑性变形,随着变形量增大,过渡为弹性变形。

(2)综合微凸体接触变形特征及粗糙表面分形几何描述,以接触变形量为自变量,建立结合面法向接触刚度计算模型.变形量分布密度函数是衔接微凸体接触状态及粗糙表面形貌特征的关键,也便于进一步与基于表面形貌统计的法向接触刚度计算方法相结合。

(3)考虑临界变形量变化的结合面法向接触刚度模型计算结果与实验数据拟合情况良好,说明了模型的合理性和有效性.在对整个机械系统如机床等进行整体的静力学分析和动力学分析时,可以采用本模型的计算值,这样可以提高机械产品设计、研发、分析的效率。

## 参考文献:

- [1] Ren Y, Beards C F. Identification of 'effective' linear joints using coupling and joint identification techniques [J]. **Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME**, 1998, **120**(2):331-338.
- [2] Song Y. Modeling, identification and simulation of dynamics of structures with joints and interfaces [D]. Urbana:University of Illinois, 2004.
- [3] Ibrahim R A, Pettit C L. Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners [J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2005, **279**(3-5):857-936.
- [4] Greenwood J A, Williamson J B P. Contact of nominally flat surfaces [J]. **Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences**, 1966, **295**:300-319.
- [5] Whitehouse D J, Archard J F. The properties of random surface of significance in their contact [J]. **Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences**, 1970, **316**:97-121.
- [6] 张 波,马 骥,全永昕. 塑性接触对表面形貌的影响[J]. 浙江大学学报:自然科学版, 1992, **26**(2):218-223.  
ZHANG Bo, MA Ji, QUAN Yong-xin. Asperity height distribution of surfaces after plastic deformation [J]. **Journal of Zhejiang University: Natural Science**, 1992, **26**(2):218-223. (in

Chinese)

- [7] 饶柱石,夏松波,汪光明. 粗糙平面接触刚度的研究 [J]. **机械强度**, 1994, **16**(2):71-75.  
RAO Zhu-shi, XIA Song-bo, WANG Guang-ming. A study of contact stiffness of flat rough surfaces [J]. **Journal of Mechanical Strength**, 1994, **16**(2):71-75. (in Chinese)
- [8] Almqvist A, Sahlin F, Larsson R, *et al.* On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces [J]. **Tribology International**, 2007, **40**(4):574-579.
- [9] Jeng Y R, Peng S R. Elastic-plastic contact behavior considering asperity interactions for surfaces with various height distributions [J]. **Journal of Tribology**, 2006, **128**(2):245-251.
- [10] 赵永武,吕彦明,蒋建忠. 新的粗糙表面弹塑性接触模型[J]. 机械工程学报, 2007, **43**(3):95-101.  
ZHAO Yong-wu, LÜ Yan-ming, JIANG Jian-zhong. New elastic-plastic model for the contact of rough surfaces [J]. **Chinese Journal of Mechanical Engineering**, 2007, **43**(3):95-101. (in Chinese)
- [11] ZHAO Yong-wu, Maietta D M, Chang L. An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation to fully plastic flow [J]. **Journal of Tribology**, 2000, **122**(1):86-93.
- [12] Majumdar A, Bhushan B. Role of fractal geometry in roughness characterization and contact mechanics of surfaces [J]. **Journal of Tribology**, 1990, **112**(2):205-216.
- [13] Majumdar A, Bhushan B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. **Journal of Tribology**, 1991, **113**(1):1-11.
- [14] Majumdar A, Tien C L. Fractal characterization and simulation of rough surfaces [J]. **Wear**, 1990, **136**(2):313-327.
- [15] 陈 辉,胡元中,王 慧,等. 粗糙表面分形特征的模拟及其表征[J]. 机械工程学报, 2006, **42**(9):219-223.  
CHEN Hui, HU Yuan-zhong, WANG Hui, *et al.* Simulation and characterization of fractal rough surfaces [J]. **Chinese Journal of Mechanical Engineering**, 2006, **42**(9):219-223. (in Chinese)
- [16] Wang S, Komvopoulos K. A fractal theory of the interfacial temperature distribution in the slow sliding regime: Part I—Elastic contact and heat

- transfer analysis [J]. *Journal of Tribology*, 1994, **116**(4):812-822.
- [17] 杨红平,傅卫平,王 雯,等. 基于分形几何与接触力学理论的结合面法向接触刚度计算模型[J]. 机械工程学报, 2013, **49**(1):102-107.  
YANG Hong-ping, FU Wei-ping, WANG Wen, *et al.*. Calculation model of the normal contact stiffness of joints based on the fractal geometry and contact theory [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, **49**(1):102-107. (in Chinese)
- [18] 贺 林,朱 均. 粗糙表面接触分形模型的提出与发展[J]. 摩擦学学报, 1996, **16**(4):375-384.  
HE Lin, ZHU Jun. Fractal model for contact of rough surfaces [J]. *Tribology*, 1996, **16**(4):375-384. (in Chinese)
- [19] JIANG Shu-yun, ZHENG Yun-jian, ZHU Hua. A contact stiffness model of machined plane joint based on fractal theory [J]. *Journal of Tribology*, 2010, **132**(1):1-7.
- [20] 张学良. 机械结合面动态特性及应用[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2002.  
ZHANG Xue-liang. *Dynamic Characteristic of Mechanical Joint Surface and Its Application* [M]. Beijing: China Science & Technology Press, 2002. (in Chinese)
- [21] Johnson K L. *Contact Mechanics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [22] Mandelbrot B. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension [J]. *Science*, 1967, **156**(3775):636-638.
- [23] 黄玉美,付卫平,董立新,等. 结合面法向动态特性参数研究[J]. 机械工程学报, 1993, **29**(3):74-78.  
HUANG Yu-mei, FU Wei-ping, DONG Li-xin, *et al.*. Research on normal dynamic characteristic parameters of joint surface [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 1993, **29**(3):74-78. (in Chinese)

## Calculation model for normal contact stiffness of joint surfaces considering critical deformation change

DANG Hui-hong, SUN Qing-chao\*, MA Yue, HUANG Xin

( School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China )

**Abstract:** Considering the critical deformation change of asperities contact, a calculation model for normal contact stiffness of joint surfaces is presented. The topographic characteristics of joint surfaces are described based on fractal geometry, and the fractal parameters  $D$  and  $G$  of fractal function are derived from measurement data of surface topography. According to the elastic-plastic deformation contact theory, the contact deformation characteristics of asperities are analyzed, and the critical deformation estimation model is presented, which expresses critical deformation as the function of fractal parameters and contact deformation of asperities, and the contact stiffness calculation model of single asperity is brought forward considering critical deformation change. The asperity statistical distribution function of rough surface is built based on the fractal theory. Additionally, combining the contact stiffness calculation model of single asperity and the asperity statistical distribution function, the calculation model for normal contact stiffness of joint surfaces is built. Finally, the comparison between calculated results and experimental data verifies the rationality of the proposed model.

**Key words:** joint surfaces; normal contact stiffness; fractal geometry; critical deformation; asperity statistical distribution function