

混凝土双参数断裂模型和尺寸效应模型 R 阻力曲线比较

赵艳华^{*1}, 魏 鹏¹, 高洪波²

(1. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 海南大学 土木建筑工程学院, 海南 海口 570228)

摘要: 对混凝土的两类基本断裂模型(双参数断裂模型和尺寸效应模型)求解得到的第Ⅰ类几何形式下的 R 阻力曲线进行了详细的分析比较. 首先对有效裂纹长度和裂纹尖端张口位移进行了修正,在此基础上由双参数断裂模型和尺寸效应模型得到了 R 阻力曲线的解析表达式. 通过两类 R 阻力曲线计算得到的荷载-位移曲线与试验结果的对比,发现尺寸效应模型得到的临界有效裂纹长度稍大于双参数断裂模型的结果,而根据双参数断裂模型 R 阻力曲线得到的最大荷载大于尺寸效应模型的结果,且当相对初始裂纹长度较大时,双参数断裂模型 R 阻力曲线得到的最大荷载远大于试验值. 双参数断裂模型的 R 阻力曲线适合于初始裂纹长度相对试件高度较小的情况.

关键词: 断裂力学; 裂纹尖端; R 阻力曲线; 尺寸效应模型; 双参数断裂模型

中图分类号: O341; TU318 **文献标识码:** A **doi:** 10.7511/dllgxb201504008

0 引言

应力强度因子 K 和能量释放率 G 是材料断裂力学中两个基本的断裂参数,其中应力强度因子 K 是描述裂纹尖端场强弱的局部量,而能量释放率 G 是描述裂纹扩展单位面积所需能量的全局量. 由于能量释放率 G 数学定义和试验测试明确,裂纹扩展的研究用 G 分析更为普遍^[1],相应地以 G 为参数的表述裂纹扩展所需能量的函数定义为 R 阻力曲线,即 R -curve. 对于混凝土类准脆性材料,由于裂纹尖端断裂过程区的存在,在裂纹扩展过程中 R 阻力曲线与裂纹扩张量之间的关系为凸形上升曲线,确定方法主要有试验法和解析法. 试验法主要的依据是试验得到的荷载-位移曲线,也称为柔度法,这是目前测定混凝土、陶瓷、岩石以及木材等材料 R 阻力曲线的常用方法^[2-3]. 但这种方法需要准确测量或定义有效裂纹尖端,在实际操作上有一定难度. 解析法是基于不同的断裂模型给出 R 阻力曲线的解析表达式,一般根据材料失稳扩展的条件建立. 在混凝土断裂力学中,双参数断裂模型^[4]和尺寸效应模型^[5]是

应用广泛的两类模型,而基于此也建立了相应的 R 阻力曲线^[5-7]. 根据试件几何尺寸的不同, R 阻力曲线分为三大类^[7].

(1)第Ⅰ类几何形式:试件初始裂缝长度 a_0 保持不变,而试件高度 d 变化. 双参数断裂模型在这类 R 阻力曲线上应用比较成功. 当假定临界有效裂纹长度与初始裂纹长度之比为一常数时,文献[6]基于双参数断裂模型中的 K_{Ic} 和 $CTOD_c$ 建立了 R 阻力曲线的解析形式.

(2)第Ⅱ类几何形式:试件高度 d 保持不变, a_0 变化. 在实验室中经常采用这类几何形式确定材料的断裂韧度. 当假定临界有效裂纹长度与初始裂纹长度之比为一常数时,文献[8]给出了这类几何形式的 R 阻力曲线通用表达式,但没有显式的表达式.

(3)第Ⅲ类几何形式:试件高度 d 和 a_0 同时变化,但比例保持不变,即几何相似试件. 这类几何试件的 R 阻力曲线以 Bazant 的尺寸效应模型为基础^[5]. 这类 R 阻力曲线与断裂能 G_f 和临界裂纹扩展量 c_f 两个断裂参数相关.

收稿日期: 2014-08-10; 修回日期: 2015-03-16.

基金项目: “九七三”国家重点基础研究发展计划资助项目(2015CB057703); 国家自然科学基金资助项目(51268010); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(DUT14LK38).

作者简介: 赵艳华^{*}(1974-),女,博士,副教授, E-mail: yanhuazh@dlut.edu.cn.

试件中的初始裂纹长度 a_0 与材料的原始缺陷相关,在某种程度上可以认为是材料特性,因此第 I 类几何形式的研究更有实际意义. 本文的研究重点集中在第 I 类几何形式上,即 a_0 保持不变而试件高度 d 变化的情况. 对于第 I 类几何形式,文献[7]基于双参数断裂模型给出了 R 阻力曲线的实用解析解,而在混凝土断裂力学中应用非常广泛的尺寸效应模型却没有对应的解析解. 双参数断裂模型提出了两个材料常数,即有效断裂韧度 K_{Ic} 和临界裂纹尖端张口位移 $CTOD_c$,而尺寸效应模型引入的两个材料常数是断裂能 G_f 和临界裂纹扩展量 c_f . 这两对材料常数之间根据不同的几何形式存在着一定的关系^[9]. 本文研究的目的是通过比较基于两类模型得到的 R 阻力曲线更好地认识这两类模型以及 R 阻力曲线的特性.

1 尺寸效应模型求解 R 阻力曲线

R 阻力曲线可根据以下条件建立(如图 1 所示):

$$G(a) = R(c) \tag{1}$$

$$\partial G(a)/\partial a = \partial R(c)/\partial c \tag{2}$$

其中能量释放率 G 为有效裂纹长度 a 的函数,而裂纹扩展阻力 R 为裂纹扩展量 c 的函数.

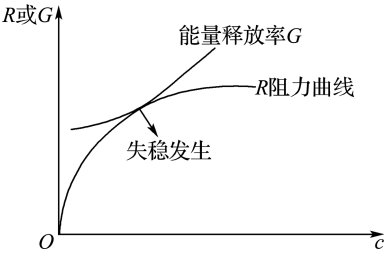


图 1 R 阻力曲线的定义

Fig. 1 The definition of R -curve

根据 Bazant 提出的尺寸效应模型,试件破坏时(即外加荷载达到 P_u 时)名义破坏应力 $\sigma_n = c_n P_u / td$ 为^[5]

$$\sigma_n = c_n \left(\frac{EG_f}{g'(\alpha_0)c_f + dg(\alpha_0)} \right)^{1/2} \tag{3}$$

式中: c_n 为引入系数,对于三点弯曲梁 $c_n = 1.5s/d$; s 为三点弯曲梁的跨度; E 为材料的弹性模量; $g(\alpha_0)$ 为与裂纹长度相关的函数, α_0 为初始裂纹长度 a_0 与试件高度 d 的比值.

式(3)中的 G_f 和 c_f 分别对应无限大尺寸试件中的能量释放率和临界裂纹扩展量. 从定义看,这两个参数可以视为材料常数. 在线弹性断裂力

学范围内,式(3)经过整理可以得到能量释放率为

$$\frac{G(a)}{G_f} = \frac{dg(\alpha)}{g'(\alpha_0)c_f + dg(\alpha_0)} \tag{4}$$

式(1)和(2)隐含着一个求解 R 阻力曲线的条件,即 R 阻力曲线可由不同高度 d 试件得到的临界能量释放率的包络线组成. 具体而言,第 I 类几何形式的 R 阻力曲线可以根据式(4)中能量释放率 $G(a)$ 对参数 d 的导数为零的条件求得. 经过数据拟合处理可得第 I 类几何形式的 R 阻力曲线公式为

$$\frac{R(c)}{G_f} = \beta_1 \left(\frac{c}{c_f} \right)^3 + \beta_2 \left(\frac{c}{c_f} \right)^2 + \beta_3 \left(\frac{c}{c_f} \right);$$

$\frac{c}{c_f} \leq 1 \tag{5}$

$$\frac{R(c)}{G_f} = 1; \quad \frac{c}{c_f} > 1$$

式中: β_1 、 β_2 和 β_3 是拟合参数,与初始裂纹长度 a_0 和 c_f 相关.

2 双参数断裂模型求解 R 阻力曲线

文献[7]给出了双参数断裂模型对应的 R 阻力曲线解析形式,但在求解过程中,忽略了两个问题,对此本文进行以下修正:

(1)有效裂纹长度的定义

因为双参数断裂模型是建立在线弹性断裂力学基础上的,因此有效裂纹长度所对应的荷载-位移曲线的柔度是图 2 中的卸载柔度 c_2 ,而 R 阻力曲线中的有效裂纹长度对应的柔度为 c_1 . 对于无限大尺寸的试件而言,两者相等. 但对于一般尺寸的试件而言,两者并不相等. 为与 R 阻力曲线中的有效裂纹长度对应,本文有效裂纹长度 a 采用割线柔度 c_1 确定,即荷载-位移曲线柔度的弱化完全是由裂纹扩展引起的,其中就包括了塑性变形. 记对应最大荷载处的有效裂纹长度为临界有效裂纹长度 a_c ,据此得到的有效断裂韧度记为 K_{Ic} ,相应的临界裂纹尖端张口位移仍记为 $CTOD_c$.

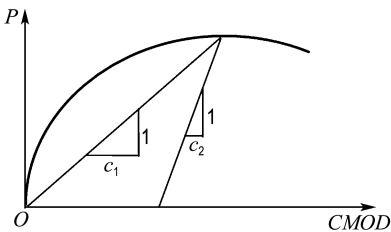


图 2 有效裂纹长度的定义

Fig. 2 The definition of effective crack length

(2) 裂纹尖端张口位移的确定方法

对于三点弯曲梁,文献[7]采用下式近似处理裂纹尖端张口位移 $CTOD$ 与裂纹口处张开位移 $CMOD$ 的关系:

$$CTOD = CMOD \sqrt{\frac{a^2 - a_0^2}{a^2}} \quad (6)$$

对于不同的几何和加载形式,裂纹尖端张口位移与裂纹口处张开位移的关系并不相同.当有效裂纹长度为 a 时,三点弯曲缺口梁初始裂纹尖端 a_0 处的张口位移一般采用数值拟合得到的经验公式^[4]:

$$\frac{CTOD}{CMOD} = \left\{ \left(1 - \frac{a_0}{a} \right)^2 + \left(1.081 - 1.149 \frac{a}{d} \right) \times \left(\frac{a_0}{a} - \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right)^{1/2} \right\} \quad (7)$$

根据修正(1)和(2)得到的 R 阻力曲线形式仍采用如下形式^[7]:

$$R = \beta_2 \psi (a - a_0)^{d_2} \quad (8)$$

式中

$$\psi = 1 - \frac{d_2 - (\lambda - 1)/\lambda \left(\frac{\lambda a_0 - a_0}{a - a_0} \right)^{d_2 - d_1}}{d_1 - (\lambda - 1)/\lambda} \quad (8a)$$

$$\beta_2 = \frac{K_{Ic}^2 (\lambda a_0 - a_0)^{-d_2}}{E \left[1 - \frac{d_2 - (\lambda - 1)/\lambda}{d_1 - (\lambda - 1)/\lambda} \right]} \quad (8b)$$

其中

$$d_{1,2} = \frac{1}{2} + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \pm \left[\frac{1}{4} + \frac{\lambda - 1}{\lambda} - \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (8c)$$

以上公式中的量纲一参数 λ 含义是临界有效裂纹长度 a_c 与初始裂纹长度 a_0 的比值.本文认定 c_f 为材料常数,因此

$$\lambda = 0.4595 + \frac{0.0614A}{a_0} + \sqrt{0.292 + 0.0564 \frac{A}{a_0} + 0.00377 \left(\frac{A}{a_0} \right)^2} \quad (9)$$

其中 $A = \frac{CTOD_c^2 E^2}{K_{Ic}^2}$.

3 两类 R 阻力曲线比较

从以上分析可知,尺寸效应模型得到的 R 阻力曲线包含两个材料常数 G_f 和 c_f ,而双参数断裂模型包括的两个参数是有效断裂韧度 K_{Ic} 和临界裂纹尖端张口位移 $CTOD_c$.为对两类 R 阻力曲线进行比较,首先要建立两对参数的关系.对于实验室常用的标准三点弯曲梁,当试件尺寸无限大时,根据线弹性断裂力学可知临界状态对应的裂纹口

处张开位移和断裂韧度分别为

$$CMOD_c = \frac{4\sigma_c(a_0 + c_f)}{E} \times 1.42 = \frac{5.68\sigma_c(a_0 + c_f)}{E} \quad (10)$$

$$K_{Ic} = 1.99\sigma_c \sqrt{a} = 1.99\sigma_c \sqrt{a_0 + c_f} \quad (11)$$

在无限大尺寸试件中 G_f 和 K_{Ic} 存在以下关系:

$$G_f = K_{Ic}^2/E \quad (12)$$

根据式(7)、(10) ~ (12) 可求得尺寸效应模型中的参数

$$c_f = -0.5405a_0 + 0.0614A + \sqrt{0.292a_0^2 + 0.0564a_0A + 0.00377A^2} \quad (13)$$

其中 A 同式(9).式(13)是根据标准三点弯曲梁得到的结果.计算发现对于不同的初始裂纹长度 a_0 ,双参数断裂模型中的 K_{Ic} 和 $CTOD_c$ 为常数可以保证尺寸效应模型中的 G_f 和 c_f 也是材料常数,但对于其他几何形状而言,这个结论是不成立的,文献[9]也有相同的结论.

下面采用混凝土三点弯曲缺口梁(如图3所示)的试验数据^[10]进行两类 R 阻力曲线的比较.混凝土材料配比为 $m(\text{水泥}):m(\text{水}):m(\text{砂子}):m(\text{石子}) = 446:214:593:1102$,立方体抗压强度 $f_{cu} = 42.9 \text{ MPa}$,弹性模量根据实测的荷载-位移曲线取为 $E = 20000 \text{ MPa}$.表1为试验结果和相应的计算结果.

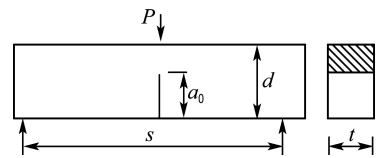


图 3 三点弯曲缺口梁示意图

Fig. 3 Three-point bending notched beam

双参数断裂模型中的 K_{Ic} 和临界裂纹尖端张口位移 $CTOD_c$ 计算所依据的临界有效裂纹长度 a_c 对应 P - $CMOD$ 曲线上的最大值 P_u 点,而 G_f 和 c_f 分别由式(12)和(13)确定.本文研究分析的前提是断裂能 G_f 和临界裂纹扩展量 c_f 为材料常数,与试件尺寸无关,因此在两类 R 阻力曲线分析比较中取本组的平均值,即 $(K_{Ic}, CTOD_c) = (1.267 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}, 0.025 \text{ mm})$, $(G_f, c_f) = (0.081 \text{ N/mm}, 18.38 \text{ mm})$.根据式(12)得到的断裂能与文献[10]中按断裂功方法得到的断裂能 0.09 N/mm 接近.图4是式(5)和(8)的计算结果比较.为区别起见,以 SEM 符号表示尺寸效应模型,而 TPFM 代表双参数断裂模型.

表 1 试验和计算结果
Tab. 1 Experimental and calculated results

试件 编号	$s \times t \times d /$ (mm×mm×mm)	$a_0 /$ mm	P_u / N	$\text{CMOD}_c /$ mm	$K_{Ic} /$ (MPa · m ^{1/2})	$\text{CTOD}_c /$ mm	$G_f /$ (N · mm ⁻¹)	$c_f /$ mm	双参数断裂模型式(8)		尺寸效应模型式(5)		
									λ		β_1	β_2	β_3
S1	200×40×40	12	893	0.033	1.466	0.025	0.107	73.45	2.532		2.346	-4.402	3.068
S2	280×40×60	18	1 220	0.036	1.227	0.025	0.075	19.96	2.021		1.289	-3.318	3.029
S4	360×40×80	32	1 311	0.051	1.356	0.029	0.092	21.85	1.574		1.478	-3.531	3.062
S5	360×40×80	40	657	0.045	1.143	0.023	0.065	18.02	1.460		1.380	-3.384	3.032
S6	360×40×80	48	476	0.057	1.145	0.023	0.066	18.60	1.383		1.605	-3.753	3.178
平均					1.267	0.025	0.081	18.38					

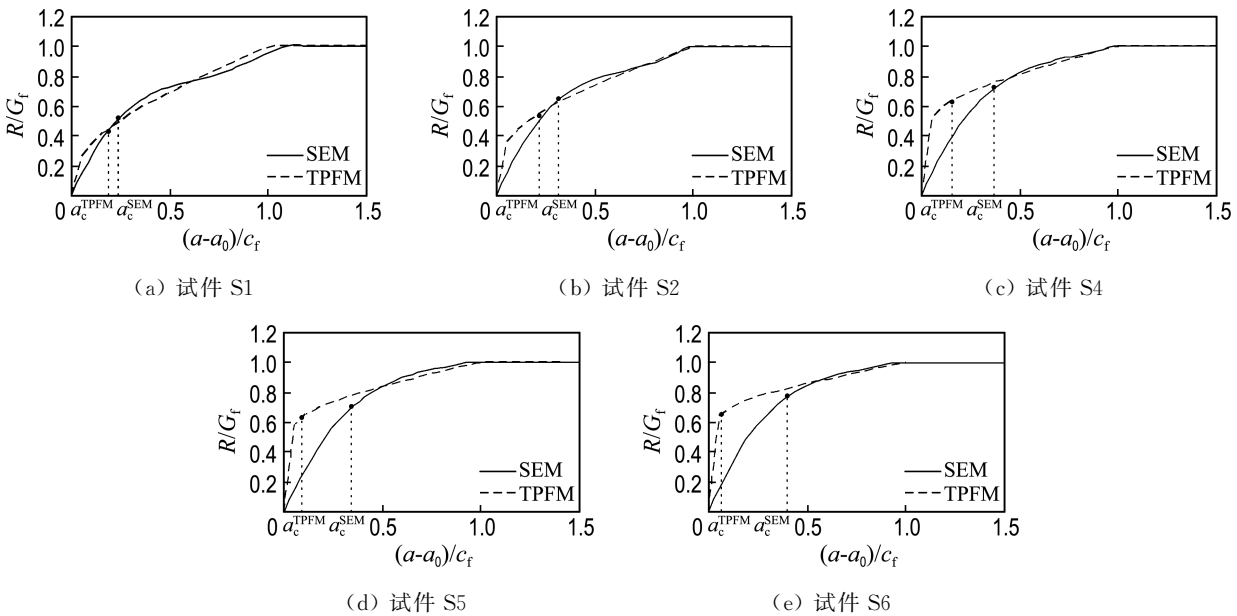


图 4 两类 R 阻力曲线的比较
Fig. 4 Comparison of two R-curves

从图 4 可以看到,对于相同的裂纹扩展量,尺寸效应模型得到的 R 阻力值一般小于双参数断裂模型得到的 R 阻力值. 原因是双参数断裂模型得到的 R 阻力曲线有一个基本假定,即有限尺寸与无限大尺寸的 R 阻力曲线是一致的,反映在 R 阻力曲线计算式(8)中的参数是近似按无限大尺寸试件求得的,而与试件的具体尺寸 d 无关. 因此双参数断裂模型得到的 R 阻力曲线更适合 a/d 较小的试件. 而尺寸效应模型得到的 R 阻力曲线计算式(5)包括了试件尺寸 d 的影响,因此适用范围要大.

为进一步看到两类 R 阻力曲线的区别,下面根据两类 R 阻力曲线得到的荷载-裂纹口处张开位移曲线与试验曲线进行比较. 由 R 阻力曲线求解 P - CMOD 曲线的步骤如下:

(a) 假定初始裂纹长度 a_0 扩展 c ,则有效裂纹长度 $a = a_0 + c$,相对裂纹长度 $\alpha = \alpha_0 + c/d$.

(b) 对裂纹扩展量 c 计算对应的 R 阻力曲线. 然后根据裂纹扩展条件 $G(a) = R(c)$,对应的荷载根据线弹性断裂式计算.

$$R(c) = G(a) = \frac{P^2}{Et^2d}g(\alpha) \tag{14}$$

对于标准三点弯曲梁^[11],

$$g(\alpha) = \pi\alpha c^2_a g_1^2(\alpha) \tag{15a}$$

$$g_1(\alpha) = \frac{1.99 - \alpha(1 - \alpha)(2.15 - 3.93\alpha + 2.70\alpha^2)}{\sqrt{\pi}(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{3/2}} \tag{15b}$$

(c) 根据上两步得到的 a 和 P ,裂纹口处张开位移由下式计算^[11]:

$$\text{CMOD} = \frac{24Pa}{dtE}V(\alpha) \tag{16}$$

$$V(\alpha) = 0.76 - 2.27\alpha + 3.87\alpha^2 - 2.04\alpha^3 + \frac{0.66}{(1 - \alpha)^2} \tag{17}$$

(d)重复步骤(a)~(c)直到荷载 P 趋近零.

根据以上步骤,两类 R 阻力曲线得到的 P - $CMOD$ 如图 5 所示(EXP 代表试验值),同时与试验过程中记录的 P - $CMOD$ 进行了比较.

从图 5 上看,由两类 R 阻力曲线得到的 P -

$CMOD$ 上升段和下降段基本接近,主要区别在于最大荷载 P_u .表 2 列出了具体的计算值以及相对应的临界有效裂纹长度,同表列出的还有试验过程中采集到的最大荷载以及其对应的临界有效裂纹长度 a_c .

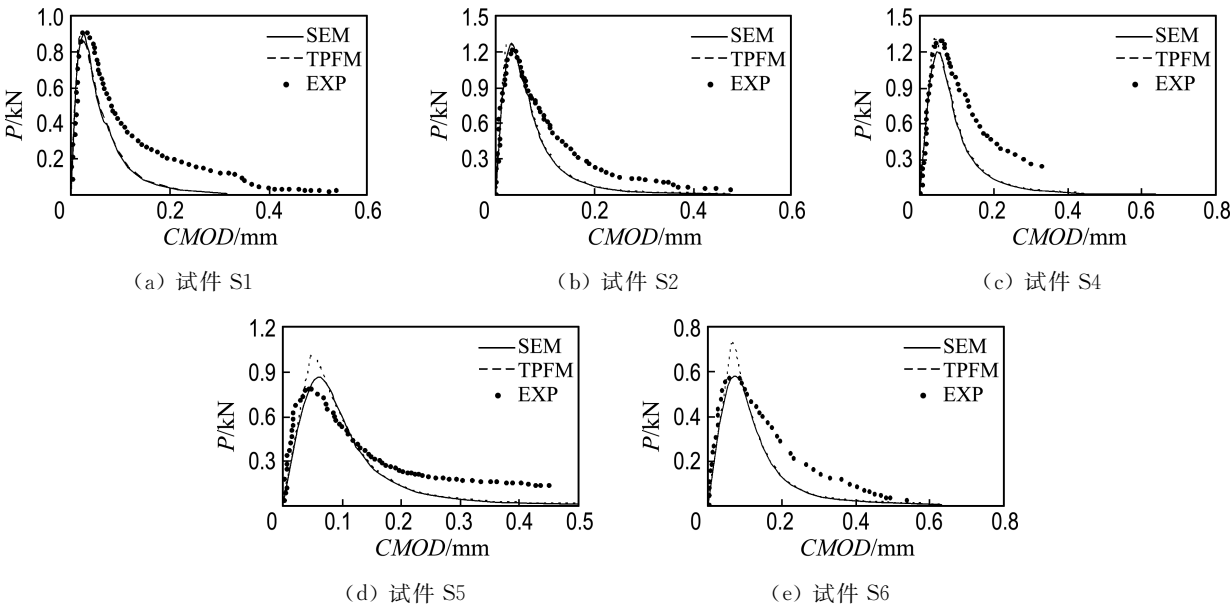


图 5 荷载-位移曲线的试验值和计算值的比较

Fig. 5 Comparison between experimental values and calculated values of load-displacement curve

表 2 计算值和试验值的比较

Tab. 2 Comparison between experimental values and calculated values

试件编号	P_u^{SEM}/kN	P_u^{TPFM}/kN	P_u^{EXP}/kN	a_c^{SEM}/mm	a_c^{TPFM}/mm	a_c/mm	R^{SEM}/G_f	R^{TPFM}/G_f
S1	0.893(0%)	0.888(0.56%)	0.893	16.46(10.83%)	15.14(17.98%)	18.46	0.515	0.425
S2	1.273(4.34%)	1.282(5.08%)	1.220	23.88(16.21%)	21.63(24.11%)	28.50	0.703	0.536
S4	1.206(8.01%)	1.309(0.15%)	1.311	38.83(8.25%)	34.58(18.29%)	42.32	0.725	0.622
S5	0.864(7.73%)	1.007(25.56%)	0.802	46.36(6.06%)	41.51(15.89%)	49.35	0.701	0.625
S6	0.580(0.17%)	0.730(25.65%)	0.581	55.43(0.38%)	49.11(11.06%)	55.22	0.777	0.650

注:括号内的数值分别为相对于 P_u^{EXP} 和 a_c 的误差

从以上的比较可以看出,根据尺寸效应模型得到的 R 阻力曲线推导出的试件 P - $CMOD$ 曲线更为接近试验曲线.从表 2 和图 4 看出,荷载达到最大值所对应的临界有效裂纹长度 a_c^{SEM} 稍大于 a_c^{TPFM} ,而与此对应的裂纹扩展阻力 R^{SEM} 大于 R^{TPFM} .对于初始裂纹长度较长的构件 S5 和 S6,根据式(14)得到的 P_u^{SEM} 小于 P_u^{TPFM} ,更为接近试验值.

4 结 语

本文比较了双参数断裂模型和尺寸效应模型得到的两类 R 阻力曲线,包括曲线本身以及据此

得到的试件荷载-位移曲线,并与试验曲线进行了对比.从分析过程可以看到,双参数断裂模型中的两个材料参数(有效断裂韧度 K_{Ic} 和临界裂纹尖端张口位移 $CTOD_c$)是根据有限尺寸试件的试验得到的,而尺寸效应模型中的材料参数(断裂能 G_f 和临界裂纹扩展量 c_f)是直接定义为无限大试件中的参数,因此是与几何尺寸无关的.在这两对材料参数为已知情况下,双参数断裂模型得到的 R 阻力曲线表达式包括 λ 一个参数,而 λ 仅与初始裂纹长度 a_0 相关;而尺寸效应模型得到的 R 阻力曲线不仅与 a_0 相关,还与试件的高度 d 相关.从分析和与荷载-位移试验曲线的比较看,双参数

断裂模型得到的 R 阻力曲线适合 a/d 较小的情况, 而尺寸效应模型的适用范围则更为广泛一些.

参考文献:

- [1] Carlsson L A, Adams D F, Pipes R B. **Experimental Characterization of Advanced Composite Materials** [M]. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2003.
- [2] Morel S, Dourado N, Valentin G, *et al.* Wood: a quasi-brittle material R -curve behavior and peak load evaluation [J]. **International Journal of Fracture**, 2005, **131**(4): 385-400.
- [3] Ferreira L E T, Bittencourt T N, Sousa J L A O, *et al.* R -curve behavior in notched beam tests of rocks [J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 2002, **69**(17): 1845-1852.
- [4] Jenq Y S, Shah S P. Two parameter fracture model for concrete [J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1985, **111**(10): 1227-1241.
- [5] Bažant Z P, Kazemi M T. Determination of fracture energy, process zone length and brittleness number from size effect, with application to rock and concrete [J]. **International Journal of Fracture**, 1990, **44**(2): 111-131.
- [6] Ouyang C S, Mobasher B, Shah S P. R -curve approach for fracture of quasi-brittle materials [J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 1990, **37**(4): 901-913.
- [7] Ouyang C S, Shah S P. Geometry-dependent R -curve for quasi-brittle materials [J]. **Journal of the American Ceramic Society**, 1991, **74**(11): 2831-2836.
- [8] Yang W, Shah S P. A geometry and size dependent fracture resistance curve [J]. **International Journal of Fracture**, 2001, **109**(3): 23-28.
- [9] Ouyang C S, Tang T X, Shah S P. Relationship between fracture parameters from two parameter fracture model and from size effect model [J]. **Materials and Structures**, 1996, **29**(186): 79-86.
- [10] 荣 华. 混凝土裂缝扩展过程中断裂过程区的特性研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2012.
RONG Hua. Study on the characteristics of the fracture process zone in concrete crack propagation [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2012. (in Chinese)
- [11] Tada H, Paris P C, Irwin G R. **The Stress Analysis of Cracks Handbook** [M]. New York: ASME Press, 2000.

Comparison of R -curves for concrete's two parameter fracture model and size effect model

ZHAO Yan-hua^{*1}, WEI Peng¹, GAO Hong-bo²

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. College of Civil Engineering and Architecture, Hainan University, Haikou 570228, China)

Abstract: A detailed comparison of two R -curves for geometry type I is made between two basic concrete fracture models, i. e., two parameter fracture model (TPFM) and size effect model (SEM). After modifications to the effective crack length and crack tip opening displacement, expressions of R -curve are proposed from TPFM and SEM. Comparisons of the load-displacement curves from these two R -curves with experimental results reveal that critical effective crack length from SEM is a little larger than that from TPFM, while the maximum load from the TPFM-based R -curve is bigger than that from SEM. Especially for a specimen with a larger relative initial crack length, the maximum load from the TPFM-based R -curve is considerably larger than the experimental load. R -curve from TPFM is suitable for the situation when the initial crack length is small relative to the specimen height.

Key words: fracture mechanics; crack tip; R -curve; size effect model; two parameter fracture model