第55卷第4期
2015年7月
大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology
Vol. 55, No. 4
July 2015

应用数学

文章编号：1000-8608(2015)04-0431-05

求解随机二阶锥线性互补问题的期望残差最小化方法

张宏伟*， 贾 红， 陈 爽， 庞丽萍

（大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024）

摘要： 引入期望残差最小化(ERM)方法来求解随机二阶锥线性互补问题. 在非负象限内，利用 ERM 方法求解随机线性互补问题是可行的，为此将非负象限内的随机线性互补问题延伸到二阶锥内. 首先，介绍了二阶锥矢量相关的若尔当积及谱分解等预备知识. 然后，通过二阶锥互补函数 FB 函数将随机二阶锥线性互补问题转化为极小化问题. 以预备知识为基础证明了若尔当积下的 $\|\boldsymbol{x}^2\|$ 与 $\|\boldsymbol{x}\|^2$ 的关系，并进一步证明了离散型目标函数解的存在性与收敛性. 最后，证明利用 ERM 方法解随机二阶锥互补问题是可行的.

关键词： 随机二阶锥线性互补问题；期望残差最小化(ERM)方法；若尔当积；谱分解

中图分类号： O221.1；O221.5 **文献标识码：** A **doi：** 10.7511/dllgxb201504015

0 引 言

$\boldsymbol{R}^n$ 中的二阶锥，也称冰淇淋锥或洛伦兹锥，定义为 $\boldsymbol{K}^n := \{(x_1 \quad \boldsymbol{x}_2) \in \mathbf{R}\times\boldsymbol{R}^{n-1} \mid \|\boldsymbol{x}_2\| \leqslant x_1\}$，其中 $\|\cdot\|$ 为欧式范数. 若 $n = 1$，则 $\boldsymbol{K}^n$ 即为非负象限 $\boldsymbol{R}_+$. 一般对包含二阶锥(SOCs)的互补问题比较感兴趣. 二阶锥互补问题作为线性互补问题的扩展，在线性问题、二次规划问题及一些网络均衡问题中均具有广泛的应用. 二阶锥互补问题(SOCCP)的一般形式为寻找向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ 及 $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{R}^n$，使得问题(1)

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = 0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K},\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}$$
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}),\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\xi})$$

成立. 其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为欧几里得内积，$\boldsymbol{F}:\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 与 $\boldsymbol{G}:\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 均为光滑函数，$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}^{n_1}\times\cdots\times\boldsymbol{K}^{n_N}$，$N$，$n_1,\cdots,n_N \geqslant 1$，$n_1+\cdots+n_N = n$，$\boldsymbol{K}^{n_i} := \{(x_1 \quad \boldsymbol{x}_2) \in \mathbf{R}\times\boldsymbol{R}^{n_i-1}, \|\boldsymbol{x}_2\| \leqslant x_1\}$. 给定矩阵 $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 及向量 $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}^n$，当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) := \boldsymbol{M}\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{q}$ 时，问题(1)即为二阶锥线性互补问题.

确定性的二阶锥互补问题在研究数学规划、运筹学、博弈论中具有非常重要的意义，而现实问题通常具有不确定性，因此带有随机因素的二阶锥线性互补问题越来越多地受到人们的重视. 当 $\boldsymbol{F}:\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{\Omega} \to \boldsymbol{K}$ 为带有随机变量的向量值函数，即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) := \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})$ 时，随机二阶锥线性互补问题作为二阶锥互补问题的一个扩展便产生了，即

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\rangle = 0,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K},\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\omega}) \in \boldsymbol{K}$$
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) := \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})$$

其中 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega}) \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega}) \in \boldsymbol{R}^n$. $\boldsymbol{\Omega} \subseteq \boldsymbol{R}^m$，$(\boldsymbol{\Omega},\mathscr{F},P)$ 为概率空间.

解决二阶锥互补问题有许多的方法，如内点法[1-2]、光滑化牛顿法[3-4]、光滑正则化方法[5]、优值函数法[6]及近似梯度下降法[7]等. 后 3 种方法需要以二阶锥互补函数为基础.

特别地，若函数 $\boldsymbol{\phi}:\boldsymbol{R}^l\times\boldsymbol{R}^l \to \boldsymbol{R}^l$ 满足下列条件：$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^l$，$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^l$，$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = 0$，则称其为与 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^l (l \geqslant 1)$ 有关的二阶锥互补函数[8]. 常见的二阶锥互补函数为向量值 Fischer-Burmeister(FB) 函数，即 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2)^{1/2}$，$\forall\, \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^l (l \geqslant 1)$.

本文将引入期望残差最小化(ERM)方法[9]

收稿日期： 2014-12-09； **修回日期：** 2015-05-20.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(91330206).
作者简介： 张宏伟*(1955-)，男，教授，博士生导师，E-mail：hwzhang@dlut.edu.cn；贾 红(1986-)，女，硕士生，E-mail：jiahonghappy@126.com.

来解决随机二阶锥线性互补问题，给出利用 ERM 方法解决随机二阶锥线性互补问题的模型，即为寻找向量 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$ 使得互补问题的期望残差最小：

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}} E[\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\|^2]$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}:\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{\Omega}\rightarrow\boldsymbol{K}$ 定义如下：

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\phi}(F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}),x_1)\\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}(F_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}),x_n)\end{pmatrix}$$

由互补问题产生多个相关的随机方程，期望残差方法可以看作是最小二乘法的自然扩展．本文中，以 FB 函数为例来求解随机二阶锥互补问题，即 $\boldsymbol{\phi}$ 为 FB 函数，$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2)^{1/2}$.

1　预备知识

1.1　若尔当积

与标量乘法和矩阵乘法不同，若尔当积不具有结合律，这也是研究 SOCCP 比较复杂的主要原因．下面给出若尔当积的定义和常用性质[4,8].

定义 1　对 $\forall\boldsymbol{x}=(x_1\quad\boldsymbol{x}_2)\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{R}^{n-1}$，$\boldsymbol{y}=(y_1\quad\boldsymbol{y}_2)\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{R}^{n-1}$，定义若尔当积为

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\quad y_1\boldsymbol{x}_2+x_1\boldsymbol{y}_2)$$

通常将 $\boldsymbol{x}^2$ 表示为 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$，将 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 表示为相应分量的和，即 $\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1\quad\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2)$.

下面给出 $\cdot$、$+$ 与单位元 $\boldsymbol{e}=(1\quad 0\quad\cdots\quad 0)\in\boldsymbol{R}^n$ 的一些基础性质：

性质 1

(1) $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$

(2) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$

(3) $\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{x}^2\cdot\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^2\cdot(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$

(4) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$

若尔当积与二阶锥可以通过以下常用的性质联系起来．

性质 2

(1) 对 $\forall\boldsymbol{x}=(x_1\quad\boldsymbol{x}_2)\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{R}^{n-1}$，$\boldsymbol{x}$ 的行列式与迹可以定义为 $\det(\boldsymbol{x})=x_1^2-\|\boldsymbol{x}_2\|^2$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{x})=2x_1$．与矩阵不同，一般情况下，$\det(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\neq\det(\boldsymbol{x})\det(\boldsymbol{y})$．当 $\exists(m\quad n)\neq(0\quad 0)\in\boldsymbol{R}^2$，使得 $m\boldsymbol{x}_2+n\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{0}$ 时，$\det(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})=\det(\boldsymbol{x})\det(\boldsymbol{y})$.

(2) 若 $\det(\boldsymbol{x})\neq 0$，则称向量 $\boldsymbol{x}=(x_1\quad\boldsymbol{x}_2)\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{R}^{n-1}$ 为可逆的，且 $\exists\boldsymbol{y}=(y_1\quad\boldsymbol{y}_2)\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{R}^{n-1}$，使得 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{e}$，称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的逆，记为 $\boldsymbol{x}^{-1}$．计算公式为 $\boldsymbol{x}^{-1}=\dfrac{1}{x_1^2-\|\boldsymbol{x}_2\|^2}(x_1\quad -\boldsymbol{x}_2)=\dfrac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}-\boldsymbol{x}}{\det(\boldsymbol{x})}$．由上式显然可得，$\boldsymbol{x}\in\mathrm{int}\,\boldsymbol{K}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}^{-1}\in\mathrm{int}\,\boldsymbol{K}$.

(3) 若 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$，则 $\boldsymbol{K}$ 中存在一个向量，记之为 $\boldsymbol{x}^{1/2}$，满足 $(\boldsymbol{x}^{1/2})^2=\boldsymbol{x}^{1/2}\cdot\boldsymbol{x}^{1/2}=\boldsymbol{x}$．计算公式为 $\boldsymbol{x}^{1/2}=\left(s\quad\dfrac{\boldsymbol{x}_2}{2s}\right)$，其中 $s=\sqrt{(x_1+\sqrt{x_1^2-\|\boldsymbol{x}_2\|^2})/2}$．若 $\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$ 且 $s=0$，则定义 $\dfrac{\boldsymbol{x}_2}{2s}$ 为零向量，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

(4) 对 $\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$，易证得 $\boldsymbol{x}^2\in\boldsymbol{K}$，因此存在唯一的向量 $(\boldsymbol{x}^2)^{1/2}\in\boldsymbol{K}$，记之为 $|\boldsymbol{x}|$．显然，$\boldsymbol{x}^2=|\boldsymbol{x}|^2$.

1.2　谱分解

谱分解的定义及本文中将用到的相关性质[4,6]叙述如下．

定义 2　$\forall\boldsymbol{x}=(x_1\quad\boldsymbol{x}_2)\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{R}^{n-1}$，$\boldsymbol{x}$ 可分解为 $\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{\mu}^{(1)}+\lambda_2\boldsymbol{\mu}^{(2)}$，其中 λ_1、λ_2 和 $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$、$\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ 分别为 $\boldsymbol{x}$ 的谱值与谱向量，且由下列公式给出：

$$\lambda_i=x_1+(-1)^i\|\boldsymbol{x}_2\| \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\mu}^{(i)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1\quad(-1)^i\dfrac{\boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\right);\ \boldsymbol{x}_2\neq\boldsymbol{0}\\ \dfrac{1}{2}(1\quad(-1)^i\boldsymbol{w});\ \boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{2}$$

其中 $i=1,2$，$\boldsymbol{w}$ 为 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 中满足 $\|\boldsymbol{w}\|=1$ 的任意向量．

若 $\boldsymbol{x}_2\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{x}$ 的谱分解形式唯一．

λ_1、λ_2 和 $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$、$\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ 的一些有趣的性质总结如下．

性质 3　对 $\forall\boldsymbol{x}=(x_1\quad\boldsymbol{x}_2)\in\mathbf{R}\times\boldsymbol{R}^{n-1}$，谱值 λ_1、λ_2 和谱向量 $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$、$\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ 由式(1)、(2)给出，且有如下性质：

(1) 谱向量 $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ 在若尔当积下是正交的，且长度为 $1/\sqrt{2}$，即 $\boldsymbol{\mu}^{(1)}\cdot\boldsymbol{\mu}^{(2)}=0$，$\|\boldsymbol{\mu}^{(1)}\|=\|\boldsymbol{\mu}^{(2)}\|=1/\sqrt{2}$.

(2) 谱向量 $\boldsymbol{\mu}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{\mu}^{(2)}$ 在若尔当积下是幂等的，即 $\boldsymbol{\mu}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\mu}^{(i)}=\boldsymbol{\mu}^{(i)}$，$i=1,2$.

(3) 谱值 λ_1 与 λ_2 是非负的(正的)当且仅当 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x}\in\mathrm{int}\,\boldsymbol{K})$.

(4) $\boldsymbol{x}$ 的行列式、迹及欧式范数均可以由谱值 λ_1 与 λ_2 表示：$\det(\boldsymbol{x})=\lambda_1\lambda_2$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{x})=\lambda_1+\lambda_2$，$2\|\boldsymbol{x}\|^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2$.

2　解的存在性与收敛性

考虑下列问题：

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}} f(\boldsymbol{x}):=\int_{\boldsymbol{\Omega}}\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\|^2\rho(\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \tag{3}$$

其中 $\rho:\boldsymbol{\Omega}\rightarrow\boldsymbol{R}_+$ 为连续密度函数且满足

$$\int_{\boldsymbol{\Omega}}\rho(\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=1$$
$$\int_{\boldsymbol{\Omega}}(\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\|+\|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})\|)^2\rho(\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}<\infty \tag{4}$$

为了得到 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}}E[\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\|^2]$ 的解，必须研究其中的由 FB 函数定义的目标函数. 由函数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$ 的连续性可得，式(3) 中 $f(\boldsymbol{x})$ 是连续可微的.

引理 1　$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$，则 $\frac{1}{\sqrt{2}}\|\boldsymbol{x}^2\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{x}^2\|$.

证明　因为 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K},\boldsymbol{x}=(x_1\quad\boldsymbol{x}_2)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^{n-1}$，所以由谱分解的定义与性质可得，存在 λ_i、$\boldsymbol{\mu}^{(i)},i=1,2$ 使得 $\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{\mu}^{(1)}+\lambda_2\boldsymbol{\mu}^{(2)}$，$\boldsymbol{x}^2=\lambda_1^2\boldsymbol{\mu}^{(1)}+\lambda_2^2\boldsymbol{\mu}^{(2)}$，$\|\boldsymbol{x}\|^2=\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$，$\|\boldsymbol{x}^2\|^2=\frac{1}{2}(\lambda_1^4+\lambda_2^4)$. 所以，$\frac{1}{\sqrt{2}}\|\boldsymbol{x}^2\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|^2\leqslant\|\boldsymbol{x}^2\|$.

引理 2　$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{K},(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2-2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$.

证明　$\forall\,\boldsymbol{x}=(x_1\quad\boldsymbol{x}_2)\in\boldsymbol{K},\boldsymbol{y}=(y_1\quad\boldsymbol{y}_2)\in\boldsymbol{K}$，由若尔当积的定义及性质可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}&=(x_1-y_1\quad\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2),\\ \boldsymbol{x}^2&=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\quad 2x_1\boldsymbol{x}_2),\\ \boldsymbol{y}^2&=(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\quad 2y_1\boldsymbol{y}_2),\\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}&=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\quad x_1\boldsymbol{y}_2+y_1\boldsymbol{x}_2),\\ (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2&=((\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\ &\qquad 2(x_1-y_1)(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2))\end{aligned}$$

易得 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2-2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$.

现在，将利用拟蒙特卡罗方法进行积分计算. 特别地，利用转换函数 $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\mu}(\bar{\boldsymbol{\omega}})$ 将 $\boldsymbol{\Omega}$ 上的积分转化为单位立方体 $[0,1]^n\subseteq\boldsymbol{R}^n$ 上的积分并在单位立方体中产生变量 $\{\bar{\boldsymbol{\omega}}^i,i=1,\cdots,N\}$. 从而，$f(\boldsymbol{x})$ 可以表示如下：

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})&=\int_{\boldsymbol{\Omega}}\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\|^2\rho(\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}=\\ &\int_{[0,1]^n}\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}(\bar{\boldsymbol{\omega}}))\|^2\rho(\boldsymbol{\mu}(\bar{\boldsymbol{\omega}}))\times\\ &\boldsymbol{\mu}'(\bar{\boldsymbol{\omega}})\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}(\bar{\boldsymbol{\omega}})=\\ &\int_{[0,1]^n}\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}(\bar{\boldsymbol{\omega}}))\|^2\,\bar{\rho}(\bar{\boldsymbol{\omega}})\mathrm{d}(\bar{\boldsymbol{\omega}})\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $\bar{\rho}(\bar{\boldsymbol{\omega}})=\rho(\boldsymbol{\mu}(\bar{\boldsymbol{\omega}}))\boldsymbol{\mu}'(\bar{\boldsymbol{\omega}})$. 为简便起见，在本文以下部分设 $\boldsymbol{\Omega}=[0,1]^n$ 并以 $\boldsymbol{\omega}$ 代替 $\bar{\boldsymbol{\omega}}$.

下面将着重研究式(3) 的离散近似问题的性质. 定义

$$\begin{aligned}f^{(k)}(\boldsymbol{x}):=&\frac{1}{N_k}\sum_{\boldsymbol{\omega}^i\in\boldsymbol{\Omega}_k}\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}^i)\|^2\rho(\boldsymbol{\omega}^i)+\\ &\frac{1}{N_k}\Psi_0(\max_{i\in I}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}^i)\rangle)\end{aligned}\tag{6}$$
$$\Psi_0(t)=\frac{1}{4}(\max\{0,t\})^4$$

其中 $I=\{1,\cdots,N_k\}$，$\boldsymbol{\Omega}_k:=\{\boldsymbol{\omega}^i,i=1,\cdots,N_k\}$ 是由拟蒙特卡罗方法产生的变量集且满足 $\boldsymbol{\Omega}_k\subset\boldsymbol{\Omega}$，当 $k\rightarrow\infty$ 时 $N_k\rightarrow\infty$.

式(6) 中，尾项[10] $\frac{1}{N_k}\Psi_0(\max\limits_{i\in I}\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}^i)\rangle)$ 具有重要意义，是保证 $f^{(k)}(\boldsymbol{x})$ 水平集非空有界的重要条件，在文献[6] 中有详细证明.

由 $\boldsymbol{\Phi}(\cdot,\boldsymbol{\omega})$ 的连续性可得，$f^{(k)}(\boldsymbol{x})$ 为连续函数. 定义 $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}}f(\boldsymbol{x})$ 的最优解集为 $\boldsymbol{S}$，$\min\limits_{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}}f^{(k)}(\boldsymbol{x})$ 的最优解集为 $\boldsymbol{S}_k$，函数 f 的水平集为 $\boldsymbol{D}(\gamma):=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\leqslant\gamma\}$.

定理 1　设 $|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\rangle|\leqslant M$，$M$ 为一正的常数且对 $\forall\,\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Omega}$，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})$ 与 $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})$ 不同时为 $\boldsymbol{0}$，则对任意给定的 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$，$f(\boldsymbol{x})=\lim\limits_{k\rightarrow\infty}f^{(k)}(\boldsymbol{x})$.

证明

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\|=&\ \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})-\\ &[\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})^2]^{1/2}\|\leqslant\\ &\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\|+\\ &\|[\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})^2]^{1/2}\|\end{aligned}$$

为简便公式，设 $\boldsymbol{a}:=\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b}:=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$，则由引理可得

$$\begin{aligned}\|[\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2]^{1/2}\|\leqslant&\|\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2\|^{1/2}\leqslant\\ &(\|\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\|+\\ &\|\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\|)^{1/2}=\\ &[\|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2\|+\|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2\|]^{1/2}\leqslant\\ &\|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2\|^{1/2}+\|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2\|^{1/2}\leqslant\\ &\sqrt[4]{2}(\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|+\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|)\leqslant\\ &2\sqrt[4]{2}(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\|\leqslant&\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|+2\sqrt[4]{2}(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)\leqslant\\ &(2\sqrt[4]{2}+1)(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)\leqslant\\ &5(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)=\\ &5[\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})\|]\leqslant\\ &5[\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\|\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})\|+\\ &\|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})\|\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\|]\leqslant\end{aligned}$$

$$C(\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\|+\|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})\|)(\|\boldsymbol{x}\|+1)$$

因为

$$|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\rangle|<M,\ \Psi_0(t)=\frac{1}{4}(\max\{0,t\})^4$$

所以，当 $N_k\to\infty$ 时

$$\frac{1}{N_k}\Psi_0(\max_{i\in I}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}^i)\rangle)\to 0$$

由式(4)，且对任意确定的 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$，$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\|^2\rho(\cdot)$ 是连续的，非负有界. 因此，由数列分布的收敛性分析可得，$f(\boldsymbol{x})=\lim_{k\to\infty}f^{(k)}(\boldsymbol{x})$.

注 随机二阶锥线性互补问题中 $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\rangle=0$，若 $|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\rangle|$ 无界，则与原问题偏离太大，所以题设条件 $|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\rangle|\leqslant M$ 具有其合理性.

引理3[6] 假设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}):\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 可微单调，且存在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 使得 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\operatorname{int}\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\omega})\in\operatorname{int}\boldsymbol{K}$，则对任意的 $\gamma\geqslant 0$，水平集 $\boldsymbol{D}(\gamma):=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}\mid f^{(k)}(\boldsymbol{x})\leqslant\gamma\}$ 非空有界.

定理2 设对 $\forall\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Omega}$，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})$ 为半正定的，且存在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 使得 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\operatorname{int}\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\omega})\in\operatorname{int}\boldsymbol{K}$，则对任意的 $\gamma\geqslant0$，水平集 $\boldsymbol{D}(\gamma):=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}\mid f^{(k)}(\boldsymbol{x})\leqslant\gamma\}$ 非空有界.

证明 因为对任意的 $\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Omega}$，$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})$ 为半正定的，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}):=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})$.

所以，$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{K}$，$\langle\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\omega})\rangle=\langle\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\rangle\geqslant0$. 从而，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}):\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 是单调可微的.

由引理3可得，对任意的 $\gamma\geqslant0$，水平集 $\boldsymbol{D}(\gamma):=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\mid f^{(k)}(\boldsymbol{x})\leqslant\gamma\}$ 非空有界.

定理3 设对 $\forall\gamma\geqslant0$，$\boldsymbol{D}(\gamma)\cap\boldsymbol{K}\neq\varnothing$ 且对任意的 k，$|\langle\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{\omega})\rangle|\leqslant M$. 取 $\boldsymbol{x}^{(k)}\in\boldsymbol{S}_k$，则 $\boldsymbol{S}_k$ 非空有界且所有聚点均在 $\boldsymbol{S}$ 内.

证明 因为对 $\forall\gamma\geqslant0$，$\boldsymbol{D}(\gamma)\cap\boldsymbol{K}\neq\varnothing$ 且由定理2可得，$\forall\gamma\geqslant0$，$\boldsymbol{D}(\gamma)$ 非空有界，所以 $\boldsymbol{S}_k$ 非空有界. 设 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 的一个聚点，不妨设 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ 本身收敛到 $\bar{\boldsymbol{x}}$. 取 $\gamma\geqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})$. 由 $f(\bar{\boldsymbol{x}})$ 的连续性可得，当 k 充分大时，$f^{(k)}(\boldsymbol{x})\leqslant\gamma$，即对充分大的 k，$\boldsymbol{x}^{(k)}\in\boldsymbol{D}(\gamma)$. 下面证明当 $k\to\infty$ 时，$|f^{(k)}(\boldsymbol{x}^{(k)})-f^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}})|\to0$.

易知，对任意确定的 $\boldsymbol{\omega}$，$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$ 是全局 Lipschitz 连续的[9]，即对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$，$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\omega})\|\leqslant L(\boldsymbol{\omega})\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$. 其中 $L(\boldsymbol{\omega})$ 为与 $\boldsymbol{\omega}$ 有关的正常数. 易得，存在 $C_1>0$，使得 $L(\boldsymbol{\omega})\leqslant C_1(\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\|+\|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})\|)$.

与定理1类似可证明，$\exists C_0>0$，使得对 $\forall\gamma>0$，$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\|\leqslant C_0(\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\|+\|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})\|)(\|\boldsymbol{x}\|+1)$. 由引理3可得，水平集 $\boldsymbol{D}(\gamma)$ 是闭且有界的，因此可定义 $C_2:=\{\max\|\boldsymbol{x}\|\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{D}(\gamma)\}$. 从而，

$$\begin{aligned}&|\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\|^2-\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\omega})\|^2|=\\&(\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\|+\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\omega})\|)\\&|\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\|-\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\omega})\||\leqslant\\&C_0C_1(2+\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)\\&(\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\|+\|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})\|)^2\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\leqslant\\&C(\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\|+\|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})\|)^2\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\end{aligned}$$

其中 $C:=2C_0C_1(1+C_2)$.

由对密度函数 ρ 的假设及题设条件可得

$$\begin{aligned}&|f^{(k)}(\boldsymbol{x}^{(k)})-f^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}})|\leqslant\\&\frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}|\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{\omega}^i)\|^2-\\&\|\boldsymbol{\Phi}(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\omega}^i)\|^2|\rho(\boldsymbol{\omega}^i)+\frac{2M^4}{N_k}\leqslant\\&\frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}C(\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega}^i)\|+\|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega}^i)\|)^2\\&\rho(\boldsymbol{\omega}^i)\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\bar{\boldsymbol{x}}\|+\frac{2M^4}{N_k}\leqslant\\&T\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\bar{\boldsymbol{x}}\|+\frac{2M^4}{N_k}\end{aligned}$$

其中 T 为常数，且对所有充分大的 k，$T\geqslant\frac{1}{N_k}\sum_{i=1}^{N_k}C(\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\omega})\|+\|\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega})\|)^2\rho(\boldsymbol{\omega}^i)$. 从而当 $k\to\infty$ 时，$|f^{(k)}(\boldsymbol{x}^{(k)})-f^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}})|\to0$.

又因为 $f^{(k)}(\boldsymbol{x})\to f(\boldsymbol{x})$，所以，当 $k\to\infty$ 时，

$$\begin{aligned}|f^{(k)}(\boldsymbol{x}^{(k)})-f(\bar{\boldsymbol{x}})|\leqslant|f^{(k)}(\boldsymbol{x}^{(k)})-f^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}})|+\\|f^{(k)}(\bar{\boldsymbol{x}})-f(\bar{\boldsymbol{x}})|\to0\end{aligned}$$

由定义可得，对任意的 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}$，$f^{(k)}(\boldsymbol{x}^{(k)})\leqslant f^{(k)}(\boldsymbol{x})$. 所以，综上所述可得

$$f(\bar{\boldsymbol{x}})=\lim_{k\to\infty}f^{(k)}(\boldsymbol{x}^{(k)})\leqslant\lim_{k\to\infty}f^{(k)}(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})$$

即证得 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 的所有聚点均包含在 $\boldsymbol{S}$ 内.

注 若 $\exists\gamma\geqslant0$，使得 $\boldsymbol{D}(\gamma)\cap\boldsymbol{K}=\varnothing$，则 $\boldsymbol{S}_k\cap\boldsymbol{K}=\varnothing$，即目标函数无解. 从而，定理的假设是合理的.

3 结 语

FB函数是一类重要的二阶锥互补函数，本文通过它将随机二阶锥线性互补问题转化为求解目标函数的极小化问题. 据了解，这是首次在二阶锥

范围内利用期望残差最小化方法来解决随机线性互补问题.本文对题设条件进行了合理假设并着重证明了离散型目标函数解的存在性与收敛性.

参考文献：

[1] Alizadeh F, Goldfarb D. Second-order cone programming [J]. **Mathematical Programming**, 2003, **95**(1):3-51.

[2] Andersen E D, Roos C, Terlaky T. On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization [J]. **Mathematical Programming**, 2003, **95**(2):249-277.

[3] Chen X D, Sun D, Sun J. Complementarity functions and numerical experiments on some smoothing Newton methods for second-order-cone complementarity problems [J]. **Computational Optimization and Applications**, 2003, **25**(1-3):39-56.

[4] Fukushima M, Luo Z Q, Tseng P. Smoothing functions for second-order-cone complementarity problems [J]. **SIAM Journal on Optimization**, 2002, **12**(2):436-460.

[5] Hayashi S, Yamashita N, Fukushima M. A combined smoothing and regularization method for monotone second-order cone complementarity problems [J]. **SIAM Journal on Optimization**, 2005, **15**(2):593-615.

[6] Chen J S, Tseng P. An unconstrained smooth minimization reformulation of the second-order cone complementarity problem [J]. **Mathematical Programming**, 2005, **104**(2-3):293-327.

[7] Pan S, Chen J S. A proximal gradient descent method for the extended second-order cone linear complementarity problem [J]. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 2010, **366**(1):164-184.

[8] Pan S, Chen J S. A damped Gauss-Newton method for the second-order cone complementarity problem [J]. **Applied Mathematics and Optimization**, 2009, **59**(3):293-318.

[9] Chen X, Fukushima M. Expected residual minimization method for stochastic linear complementarity problems [J]. **Mathematics of Operations Research**, 2005, **30**(4):1022-1038.

[10] Yamashita N, Fukushima M. A new merit function and a descent method for semidefinite complementarity problems [M] // **Reformulation: Nonsmooth, Piecewise Smooth, Semismooth and Smoothing Methods.** New York:Springer US, 1999:405-420.

ERM method for stochastic linear complementarity problem solution of the second-order cone

ZHANG Hong-wei*, JIA Hong, CHEN Shuang, PANG Li-ping

(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Expected residual minimization (ERM) method is introduced to solve the stochastic linear complementarity problem of the second-order cone. It has been testified that it is feasible to use ERM method to solve stochastic linear complementarity problem in non-negative quadrant. This method will be extended to the second-order cones. To begin with, some basic knowledge and properties of Jordan algebra and the spectral factorization of vectors associated with the second-order cone are presented. Then, through the second-order cone complementarity function, that is FB function, the stochastic linear complementarity problem of the second-order cone is transformed to be a minimizing problem. The relationship between $\|\boldsymbol{x}^2\|$ and $\|\boldsymbol{x}\|^2$ under the Jordan algebra based on the basic knowledge is proved. Furthermore, the existence and convergence of the solution set of discrete objective function are proved. Finally, a conclusion is drawn that it is feasible to solve the stochastic linear complementarity problem of the second-order cone by using ERM method.

Key words: stochastic linear complementarity problem of the second-order cone; expected residual minimization (ERM) method; Jordan algebra; spectral factorization