文章编号：1000-8608(2015)04-0442-07

一类竞争模型正解的唯一性和多重性

李海侠*

（宝鸡文理学院 数学与信息科学学院，陕西 宝鸡 721013）

摘要： 研究了一类带有 Holling Ⅲ型功能反应的竞争模型.首先通过计算不动点指标得到了正解存在的充分条件.其次运用线性算子扰动理论以及标准的椭圆方程正则性理论研究了正解的唯一性和全局稳定性.然后应用全局分歧理论和度理论考察了正解的多重性.最后用数值模拟对所得理论结果进行了验证.研究结果表明参数满足一定条件，该模型存在多重解和全局吸引的唯一解.

关键词： Holling Ⅲ；竞争模型；唯一性；多重性；数值模拟

中图分类号： O175.26 **文献标识码：** A **doi：** 10.7511/dllgxb201504017

0 引 言

生态学经历了漫长的发展过程，已成为一个多学科交叉的综合性学科.种群生态学是其中一个重要的分支，它是描述种群与环境及种群之间相互作用的动力学关系的学科.生物学家和生态学家把自然界中种群与环境以及种群之间相互竞争、捕食与被捕食、互惠作用等具体情况建成数学模型，近年来受广大学者们关注的一类模型是 Lotka-Volterra 模型[1-3].然而，经典的 Lotka-Volterra 模型中的反应函数为一条无界的直线，并不能准确反映种群间的相互作用关系.在不断的探索和研究过程中，人们根据一些具体的生态背景提出更合理更符合实际的功能反应函数.Holling[4]于 1965 年提出了 Holling 型功能反应函数：

$$\text{Ⅰ}.\ f(u)=\begin{cases}cu;\ u\leqslant u_0\\ cu_0;\ u>u_0\end{cases};$$

$$\text{Ⅱ}.\ f(u)=\frac{cu}{1+mu};$$

$$\text{Ⅲ}.\ f(u)=\frac{cu^2}{1+mu^2}$$

对带有 Holling Ⅰ和 Holling Ⅱ型功能函数的模型已有很多研究结果[5-9].另外，国内外很多专家也考察了带有 Holling Ⅲ型功能函数的捕食-食饵模型[10-12]，其中文献[12]在 Nuemann 边界条件下研究了一类带有 Holling Ⅲ型功能函数的捕食-食饵模型，得到了正解的局部和全局稳定性.然而目前带有 Holling Ⅲ型功能函数的竞争模型的研究很少见.因此本文研究一类带有 Holling Ⅲ型功能函数的竞争模型，包括其正解的存在性、唯一性、全局稳定性和多重性.

1 预备知识

为了得到重要的结论，先给出一些预备知识.

令 $q(x)\in C(\overline{\Omega})$，$\lambda_1(q)$ 是如下特征值问题的主特征值：

$$-\Delta\psi+q(x)\psi=\lambda\psi,\ x\in\Omega;\ \psi=0,x\in\partial\Omega$$

则 $\lambda_1(q)$ 连续依赖 q，$\lambda_1(q)$ 是简单的.而且，如果 $q_1\leqslant q_2$，$q_1\not\equiv q_2$，则 $\lambda_1(q_1)<\lambda_1(q_2)$.为了简单起见，定义 $\lambda_1(0)$ 为 λ_1，相应于 λ_1 的主特征函数记为 ψ_1.

非线性问题

$$-\Delta u=u(r-u),x\in\Omega;\ u=0,x\in\partial\Omega \tag{1}$$

若 $r>\lambda_1$，则式(1)有唯一正解.定义唯一正解为 θ_r.特别地，$\theta_r<r$ 且 θ_r 连续依赖 r.

收稿日期： 2015-01-09； **修回日期：** 2015-06-05.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11201277,11371031,11401356)；中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(GK201303008,GK201302025)；陕西省教育厅科研计划资助项目(14JK1035,14JK1862)；宝鸡文理学院重点科研资助项目(ZK15039,ZK12043).
作者简介： 李海侠*(1977-)，女，博士，讲师，E-mail：xiami0820@163.com.

2　正解的存在性、稳定性和唯一性

本文在 Dirichlet 边界条件下研究如下带有 Holling Ⅲ型功能函数的竞争模型：

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=u\left(a-u-\dfrac{buv}{1+mu^2}\right);\ x\in\Omega,t>0\\ v_t-\Delta v=v\left(c-v-\dfrac{du^2}{1+mu^2}\right);\ x\in\Omega,t>0\\ u=v=0;\ x\in\partial\Omega,t>0\\ u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0,v(x,0)=v_0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0;\ x\in\Omega \end{cases}\tag{2}$$

其中 Ω 是 $\boldsymbol{R}_n(n\geqslant 1)$ 中具有光滑边界的有界区域，u、v 分别表示两竞争物种的密度. 系统(2) 中的参数 a、b、c、d、m 均为正常数.

从生物的现实意义上来讲，物种是否能够共存是竞争模型研究中最令人感兴趣的内容之一. 因此，本文主要研究系统(2) 对应的平衡态系统

$$\begin{cases} -\Delta u=u\left(a-u-\dfrac{buv}{1+mu^2}\right);\ x\in\Omega\\ -\Delta v=v\left(c-v-\dfrac{du^2}{1+mu^2}\right);\ x\in\Omega\\ u=v=0;\ x\in\partial\Omega \end{cases}\tag{3}$$

正解的存在性、唯一性和多解性.

本文利用不动点指标理论研究系统(3) 正解的存在性. 首先，运用极值原理、上下解方法以及特征值变分原理易得系统(3) 正解的先验估计和正解存在的一些必要条件.

引理 1　若系统(3) 有非负解 $(u(x),v(x))$，则 $0\leqslant u(x)\leqslant a,0\leqslant v(x)\leqslant c,x\in\overline{\Omega}$.

引理 2　若系统(3) 存在正解，则 $a>\lambda_1,c>\lambda_1$.

引理 3　若系统(3) 存在正解 $(u(x),v(x))$，则 $u\leqslant\theta_a,v\leqslant\theta_c$. 而且，若 $a(1-bc)>\lambda_1,c-\dfrac{d}{m}>\lambda_1$，则 $u\geqslant\theta_{a(1-bc)},v\geqslant\theta_{c-d/m}$.

为了计算不动点指数，引入以下记号：$E=C_0(\overline{\Omega})\times C_0(\overline{\Omega})$，其中 $C_0(\overline{\Omega})=\{w\in C(\overline{\Omega}):w(x)=0,x\in\partial\Omega\}$；$W=P_1\times P_2$，其中 $P_i=\{w\in C_0(\overline{\Omega}):w(x)\geqslant 0,x\in\overline{\Omega}\},i=1,2$；$D=\{(u,v)\in E:u<a+1,v<c+1\}$；$D'=(\text{int } D)\cap W$.

$\forall t\in[0,1]$，定义算子 $\boldsymbol{A}_t:[0,1]\times D'\to W$ 为

$$\boldsymbol{A}_t(u,v)=(-\Delta+M)^{-1}\cdot\begin{pmatrix} tu\left(a-u-\dfrac{buv}{1+mu^2}\right)+Mu\\ tv\left(c-v-\dfrac{du^2}{1+mu^2}\right)+Mv \end{pmatrix}$$

其中 M 为充分大的正常数，满足 $M>\max\{a(1+2bc),c+da^2\}$. 故 $\boldsymbol{A}_t$ 是紧的且连续可微的. 记 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}$，则系统(3) 有正解当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 在 D' 中有不动点. 记 $c^*=\lambda_1\left(\dfrac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)$.

引理 4　(1) 若 $a>\lambda_1$ 且 $c\neq\lambda_1$ 或 $a\neq\lambda_1$ 且 $c>\lambda_1$，则 $\text{index}_W(\boldsymbol{A},(0,0))=0$；若 $a<\lambda_1$ 且 $c<\lambda_1$，则 $\text{index}_W(\boldsymbol{A},(0,0))=1$；

(2) $\text{index}_W(\boldsymbol{A},D')=1$；

(3) 设 $a>\lambda_1$. 若 $c>c^*$，则 $\text{index}_W(\boldsymbol{A},(\theta_a,0))=0$；若 $c<c^*$，则 $\text{index}_W(\boldsymbol{A},(\theta_a,0))=1$；

(4) 设 $c>\lambda_1$. 若 $a>\lambda_1$，则 $\text{index}_W(\boldsymbol{A},(0,\theta_c))=0$；若 $a<\lambda_1$，则 $\text{index}_W(\boldsymbol{A},(0,\theta_c))=1$.

证明　因为(1) ～ (4) 的证明类似，所以在此只证明(3). 根据定义得 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}=C_0(\overline{\Omega})\times P_2$，$S_{(\theta_a,0)}=C_0(\overline{\Omega})\times\{0\}$ 且 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}\backslash S_{(\theta_a,0)}=C_0(\overline{\Omega})\times\{P_2\backslash\{0\}\}$. 于是 $\boldsymbol{A}'(\theta_a,0)(\xi,\eta)=(\xi,\eta)$ 等价于

$$\begin{cases} -\Delta\xi=(a-2\theta_a)\xi-\dfrac{b\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\eta;\ x\in\Omega\\ -\Delta\eta=\left(c-\dfrac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)\eta;\ x\in\Omega\\ \xi=\eta=0;\ x\in\partial\Omega \end{cases}$$

这里 $(\xi,\eta)\in\overline{W}_{(\theta_a,0)}$. 由 $c\neq c^*$ 得 $\eta\equiv 0$，从而 ξ 满足 $-\Delta\xi+(2\theta_a-a)\xi=0$，故 $\xi\equiv 0$. 由此得 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}'(\theta_a,0)$ 在 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}$ 上可逆.

(i) 因为 $c>c^*$，所以 $\mu=r\left[(-\Delta+M)^{-1}\left(c+M-\dfrac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)\right]>1$，则存在 $\psi>0$ 满足 $(-\Delta+M)^{-1}\left(c+M-\dfrac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)\psi=\mu\psi$. 令 $t_0=1/\mu$，则 $0<t_0<1$ 且 $(\boldsymbol{I}-t_0\boldsymbol{A}'(\theta_a,0))(0,\psi)\in S_{(\theta_a,0)}$，因此 $\boldsymbol{A}'(\theta_a,0)$ 在 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}$ 上具有 α 性质. 由文献[1] 中定理 1 知，$\text{index}_W(\boldsymbol{A},(\theta_a,0))=0$.

(ii) 假设 $\boldsymbol{A}'(\theta_a,0)$ 在 $\overline{W}_{(\theta_a,0)}$ 上具有 α 性质，即存在 $t_0\in(0,1),(\xi,\eta)\in\overline{W}_{(\theta_a,0)}\backslash S_{(\theta_a,0)}$ 使得 $(\boldsymbol{I}-t_0\boldsymbol{A}'(\theta_a,0))(\xi,\eta)\in S_{(\theta_a,0)}$，则 $(-\Delta+M)^{-1}\left(c+M-\dfrac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)\eta=\dfrac{1}{t_0}\eta$. 由于 $c<c^*$，因此 $r\left[(-\Delta+\right.$

$M)^{-1}\left(c+M-\dfrac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)\Big]<1$，与$\dfrac{1}{t_0}>1$矛盾. 故 $\boldsymbol{A}'(\theta_a,0)$ 在$\overline{W}_{(\theta_a,0)}$ 上不具有 α 性质，由文献[1]中定理 1 得 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{A},(\theta_a,0))=(-1)^\sigma$，其中 σ 为 $\boldsymbol{A}'(\theta_a,0)$ 所有大于 1 的特征值的代数重数之和. 再利用 $c<c^*$ 易得 $\boldsymbol{A}'(\theta_a,0)$ 没有大于 1 的特征值，从而 $\sigma=0$，故 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{A},(\theta_a,0))=1$. □

由引理 4 和度的可加性得到系统(3)正解的存在性定理.

定理 1 若 $a>\lambda_1$ 且 $c>c^*$，则系统(3)至少存在一个正解.

接下来将运用椭圆方程正则性理论及其线性算子扰动理论讨论参数 b 充分小时正解的唯一性和稳定性. 首先考察下述方程：

$$\begin{aligned}&-\Delta v=v\left(c-v-\frac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right),\ x\in\Omega;\\&v=0,\ x\in\partial\Omega\end{aligned}\tag{4}$$

易知，当 $c>c^*$ 时，方程(4)有唯一的正解，记为 v^*.

引理 5 如果 $a>\lambda_1, c>c^*$，则当 $b\to 0^+$ 时，系统(3)的任意正解 (u,v) 都满足 $(u,v)\to(\theta_a,v^*)$.

证明 设 $b_i\to 0^+(i\to\infty)$，(u_i,v_i) 是 $b=b_i$ 时系统(3)的正解，那么 (u_i,v_i) 满足

$$\begin{aligned}&-\Delta u_i=u_i\left(a-u_i-\frac{b_iu_iv_i}{1+mu_i^2}\right);\ x\in\Omega\\&-\Delta v_i=v_i\left(c-v_i-\frac{du_i^2}{1+mu_i^2}\right);\ x\in\Omega\\&u_i=v_i=0;\ x\in\partial\Omega\end{aligned}\tag{5}$$

由引理 1 知，(u_i,v_i) 关于 i 一致有界. 根据椭圆方程正则性理论，$|(u_i,v_i)|_{2+\alpha}$ 关于 i 有界，从而存在 $\{(u_i,v_i)\}_{i=1}^{\infty}$ 的子列(仍记为它自身)及非负函数 $(\hat{u},\hat{v})\in[C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})]^2$，使得在 $[C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})]^2$ 中 $(u_i,v_i)\to(\hat{u},\hat{v})$. 在式(5)中令 $i\to\infty$ 可得

$$\begin{aligned}&-\Delta\hat{u}=\hat{u}(a-\hat{u});\ x\in\Omega\\&-\Delta\hat{v}=\hat{v}\left(c-\hat{v}-\frac{d\hat{u}^2}{1+m\hat{u}^2}\right);\ x\in\Omega\\&\hat{u}=\hat{v}=0;\ x\in\partial\Omega\end{aligned}$$

显然上述方程有 4 个非负解 $(0,0),(\theta_a,0),(0,\theta_c),(\theta_a,v^*)$. 下证 $(\hat{u},\hat{v})\equiv(\theta_a,v^*)$.

假设 $\hat{u}\equiv 0$，则 $u_i\to 0$. 记 $U_i=\dfrac{u_i}{\|u_i\|_\infty}$，那么 U_i 满足

$$\begin{aligned}&-\Delta U_i=U_i\left(a-u_i-\frac{b_iu_iv_i}{1+mu_i^2}\right),\ x\in\Omega;\\&U_i=0,x\in\partial\Omega\end{aligned}$$

根据椭圆方程的正则性理论，$|U_i|_{2+\alpha}$ 关于 i 有界，从而存在子列(仍记为它自身)以及非负函数 $U\in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$，使得在 $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ 中 $U_i\to U$，因此 U 满足

$$-\Delta U=aU,\ x\in\Omega;\ U=0,\ x\in\partial\Omega$$

且 $\|U\|_\infty=1$. 由 $a>\lambda_1$ 知 $U\equiv 0$，矛盾. 因此 $\hat{u}\not\equiv 0$，利用极值原理知，$\hat{u}(x)>0, x\in\Omega$. 同理可证 $\hat{v}\not\equiv 0$ 且 $\hat{v}(x)>0, x\in\Omega$. 从而得 $(u_i,v_i)\to(\theta_a,v^*)$. □

定理 2 若 $a>\lambda_1, c>c^*$，则存在充分小的正常数 b^*，当 $b\leqslant b^*$ 时，系统(3)有唯一正解，且该正解是全局吸引的.

证明 令

$$\boldsymbol{T}(b,u,v)=\begin{pmatrix}-\Delta u-u\left(a-u-\dfrac{buv}{1+mu^2}\right)\\-\Delta v-v\left(c-v-\dfrac{du^2}{1+mu^2}\right)\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{T}(b,u,v)=\boldsymbol{0}$ 的解即为系统(3)的解. 由于 $a>\lambda_1, c>c^*$，因此 $(b,u,v)=(0,\theta_a,v^*)$ 是系统(3)的解. 令

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{T}_{(u,v)}(0,\theta_a,v^*)=\begin{pmatrix}-\Delta-(a-2\theta_a) & 0\\ \dfrac{2d\theta_av^*}{(1+m\theta_a^2)^2} & -\Delta-\left(c-2v^*-\dfrac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{L}(\varphi,\psi)=\boldsymbol{0}$ 等价于

$$\begin{aligned}&-\Delta\varphi-(a-2\theta_a)\varphi=0;\ x\in\Omega\\&-\Delta\psi-\left(c-2v^*-\frac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)\psi+\frac{2d\theta_av^*}{(1+m\theta_a^2)^2}\varphi=0;\\&x\in\Omega\\&\varphi=\psi=0;\ x\in\partial\Omega\end{aligned}$$

显然 $\varphi\equiv 0$. 由 $\lambda_1\left(-c+2v^*+\dfrac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)>\lambda_1\left(-c+v^*+\dfrac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)=0$ 得 $\psi\equiv 0$. 因此 0 不是 $\boldsymbol{L}$ 的特征值. 另外，由 Riesz-Schauder 定理易推出 $\boldsymbol{L}$ 的特征值都大于 0，故 (θ_a,v^*) 非退化和线性稳定.

记 $\overline{\boldsymbol{L}}$ 为系统(3)在 (u,v) 处的线性化算子，那么

$$\overline{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{T}_{(u,v)}(b,u,v)=\begin{pmatrix}-\Delta-\left(a-2u-\dfrac{2buv}{(1+mu^2)^2}\right) & \dfrac{bu^2}{1+mu^2}\\ \dfrac{2duv}{(1+mu^2)^2} & -\Delta-\left(c-2v-\dfrac{du^2}{1+mu^2}\right)\end{pmatrix}$$

由引理 5 知，当 $b\to 0^+$ 时，$\overline{\boldsymbol{L}}\to\boldsymbol{L}$. 由线性算子扰动理论知，$\overline{\boldsymbol{L}}$ 的所有特征值实部都大于 0，故当 $b\to 0^+$ 时，系统(3)的任意正解都非退化和线性稳定. 又由于系统(3)是一个单调动力系统，利用文献[8]中的引理 2.3(c)知，系统(3)至多有一个正解. 结合定理 1 知系统(3)有唯一正解. 再次运用文献[8]引理 2.3(b)可得系统(3)的唯一正解是全局吸引的. □

3　正解的稳定性和多重性

本章以 c 为分歧参数应用分歧理论和度理论讨论系统(3)正解的多重性. 为此引入空间 $C_0^1(\overline{\Omega})=\{u\in C^1(\overline{\Omega}):u=0,x\in\partial\Omega\}$，$X=C_0^1(\overline{\Omega})\times C_0^1(\overline{\Omega})$，$P=\{(c,u,v)\in R^+\times X:u,v>0,x\in\Omega;\dfrac{\partial u}{\partial n}<0,\dfrac{\partial v}{\partial n}<0,x\in\partial\Omega\}$.

由 Crandall-Rabinowitz 分歧定理[13]易得

定理 3　设 $a>\lambda_1$ 固定，则 $(c^*,\theta_a,0)$ 是系统(3)的分歧点且在 $(c^*,\theta_a,0)$ 的邻域内系统(3)存在形式为 $(c(s),u(s),v(s))=(c(s),\theta_a+s(\varphi_1+r(s)),s(\phi_1+t(s)))(0<s\ll 1)$ 的正解，这里 ϕ_1 是 c^* 对应的主特征函数且 $\|\phi_1\|_2=1$，$\varphi_1=(-\Delta-(a-2\theta_a))^{-1}\left(-\dfrac{b\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\phi_1\right)<0$. 而且，$c(0)=c^*$，$r(0)=0$，$t(0)=0$，$r,t\in Z$，其中 $X=\mathrm{span}\{(\varphi_1,\phi_1)\}\oplus Z$.

为了后面需要，给出如下引理.

引理 6　$c(s)$ 在 $s=0$ 处的微分满足 $c'(0)=\int_\Omega\left(\phi_1+2\dfrac{d\theta_a^2\varphi_1}{1+m\theta_a^2}\right)\phi_1^2\mathrm{d}x\doteq I$.

证明　将 $(c(s),u(s),v(s))=(c(s),\theta_a+s(\varphi_1+r(s)),s(\phi_1+t(s)))$ 代入式(3)的第二个方程中，两边同除 s，关于 s 微分并令 $s=0$，可得

$$-\Delta t'(0)=t'(0)\left(c^*-\frac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)+\phi_1\left[c'(0)-\phi_1-2\frac{d\theta_a^2\varphi_1}{1+m\theta_a^2}\right]$$

上式两边同乘 ϕ_1 并在 Ω 上积分知结论成立.

于是根据线性算子的扰动理论和分歧解的稳定性理论有

引理 7　如果 $I>0$ 且 $0<s\ll 1$，则定理 3 得到的正分歧解 $(u(s),v(s))$ 稳定.

接下来，将局部分歧延拓为全局分歧.

令 $U=\theta_a-u$，$V=v$. 则 $U,V\geqslant 0$ 满足

$$\begin{aligned}&-\Delta U=(a-2\theta_a)U+\frac{b\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}V+F_1(U,V);\quad x\in\Omega\\ &-\Delta V=\left(c-\frac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)V+F_2(U,V);\ x\in\Omega\\ &U=V=0;\ x\in\partial\Omega\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $F_1(U,V)=U^2+(\theta_a-U)\dfrac{b(\theta_a-U)V}{1+m(\theta_a-U)^2}-\dfrac{b\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}V$，$F_2(U,V)=\dfrac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}V-V\left[V+\dfrac{d(\theta_a-U)^2}{1+m(\theta_a-U)^2}\right]$. 令 $\boldsymbol{F}(U,V)=(F_1(U,V)\quad F_2(U,V))$. 显然，$\boldsymbol{F}(0,0)=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{F}$ 是连续的. 而且，$\boldsymbol{F}$ 的 Fréchet 导数 $\mathrm{D}_{(U,V)}\boldsymbol{F}(0,0)=\boldsymbol{0}$. 令 K 是带有齐次 Dirichlet 边界条件的 $-\Delta$ 的逆，定义 $\boldsymbol{T}$：$R^+\times E\to E$ 为 $\boldsymbol{T}(c,U,V)=\left(K(a-2\theta_a)U+K\dfrac{b\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}V+KF_1(U,V)\quad K\left(c-\dfrac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)V+KF_2(U,V)\right)$，则 $\boldsymbol{T}(c,U,V)$ 是可微紧算子. 令 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{T}$. 显然，$\boldsymbol{G}$ 是 C^1 函数且 $\boldsymbol{G}(c,0,0)=\boldsymbol{0}$. 而且，$\boldsymbol{G}(c,U,V)=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 (c,θ_a-U,V) 是系统(3)的非负解.

令 $c_i(\mu)(\mu\geqslant 1)$ 是如下特征值问题

$$-\mu\Delta V=\left(c-\frac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)V,x\in\Omega;\ V=0,x\in\partial\Omega$$

的特征值，则 $c_i(\mu)$ 关于 $\mu\geqslant 1$ 递增，可排列为 $0<c_1(\mu)<c_2(\mu)\leqslant\cdots\to\infty$ 且 $c_1(1)=c^*$.

通过类似于文献[6]的方法得当 $c<c^*$ 时，

$i(\boldsymbol{T}(c,\cdot),0)=(-1)^0=1$. 当 $c^*<c<c_2(1)$ 时，$i(\boldsymbol{T}(c,\cdot),0)=(-1)^1=-1$. 于是由文献[14]的全局分歧定理可知存在从 $(c^*,\theta_a,0)$ 分歧出来满足 $\boldsymbol{G}(c,U,V)=\boldsymbol{0}$ 的连通分支 γ. 而且，$\gamma-\{(c^*,\theta_a,0)\}$ 满足下列条件之一：

(i)$\gamma-\{(c^*,\theta_a,0)\}$ 连接点 $(c^*,\theta_a,0)$ 和 $(\bar{c},\theta_a,0)$，其中 $c^*\neq\bar{c}$；

(ii)$\gamma-\{(c^*,\theta_a,0)\}$ 在 $R^+\times X$ 内延伸到 ∞；

(iii)$\gamma-\{(c^*,\theta_a,0)\}$ 包含点 (c,θ_a-u,v) 和 $(c,\theta_a+u,-v)$，其中 $(u,v)\neq(0,0)$.

定理 4 设 $a>\lambda_1$. 则

(a)$\gamma-\{(c^*,\theta_a,0)\}$ 在 P 内从点 $(c^*,\theta_a,0)$ 出发延伸到 ∞；

(b)$\{c:(c,u,v)\in\gamma\}=[\check{c},\infty)$ 或 $(\check{c},\infty)$，其中 $\check{c}=\inf\{c>\lambda_1:(c,u,v)\in\gamma\}$.

证明 (a) 首先证明 $\gamma-\{(c^*,\theta_a,0)\}\subset P$. 假设 $\gamma-\{(c^*,\theta_a,0)\}\not\subset P$，则存在序列 $\{(c_n,u_n,v_n)\}\in\gamma\cap P$ 和点 $(\bar{c},\bar{u},\bar{v})\in\gamma-\{(c^*,\theta_a,0)\}\cap\partial P$，使得 $n\to\infty$，$(c_n,u_n,v_n)\to(\bar{c},\bar{u},\bar{v})$. 因为 $(\bar{c},\bar{u},\bar{v})\in\partial P$，所以或者 $\bar{u}\geqslant 0$，且存在 $x_0\in\overline{\Omega}$ 使得 $\bar{u}(x_0)=0$，或者 $\bar{v}\geqslant 0$，且存在 $x_1\in\overline{\Omega}$ 使得 $\bar{v}(x_1)=0$. 由强极值原理可知 $\bar{u}\equiv 0$. 类似可知 $\bar{v}\equiv 0$. 因此，$\bar{u}\equiv 0$ 或 $\bar{v}\equiv 0$. 于是考虑如下 3 种情况：

(A) 设 $\bar{u}\equiv 0$ 且 $\bar{v}\equiv 0$. 则 $(c_n,u_n,v_n)\to(\bar{c},0,0)$. 令 $U_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|_\infty}$，则 U_n 满足 $-\Delta U_n=U_n\left(a-u_n-\dfrac{bu_nv_n}{1+mu_n^2}\right)$，$x\in\Omega$；$U_n=0$，$x\in\partial\Omega$. 由 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理可假设当 $n\to\infty$ 时，在 $C^1(\overline{\Omega})$ 中 $U_n\to U\geqslant 0$，$\not\equiv 0$. 则 U 满足 $-\Delta U=aU$，$x\in\Omega$；$U=0$，$x\in\partial\Omega$. 又由强极值原理可知 $U>0$，$x\in\overline{\Omega}$. 因此，$a=\lambda_1$，矛盾.

(B) 如果 $\bar{u}\equiv 0$ 且 $\bar{v}\not\equiv 0$，即 $(\bar{u},\bar{v})=(0,\theta_c)$. 类似于(A) 的分析可得 $a=\lambda_1$，矛盾.

(C) 如果 $\bar{u}\not\equiv 0$ 且 $\bar{v}\equiv 0$，即 $(\bar{u},\bar{v})=(\theta_a,0)$. 则 $(c_n,u_n,v_n)\to(\bar{c},\theta_a,0)$. 令 $V_n=\dfrac{v_n}{\|v_n\|_\infty}$，则 V_n 满足 $-\Delta V_n=V_n\left(c_n-v_n-\dfrac{du_n^2}{1+mu_n^2}\right)$，$x\in\Omega$；$V_n=0$，$x\in\partial\Omega$. 类似于(A) 的分析可得 $\bar{c}=c^*$，矛盾. 因此，$\gamma-\{(c^*,\theta_a,0)\}\subset P$. 于是，(i) 和(iii) 是不可能的. 只有情况(ii).

(b) 由引理 1、L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理可知 γ 在 $R^+\times X$ 内延伸到 ∞ 的唯一方式就是随着参数 c 到 ∞. 最后，由引理 2 得 $\{c:(c,u,v)\in\gamma\}=[\check{c},\infty)$ 或 $(\check{c},\infty)$，其中 $\check{c}=\inf\{c>\lambda_1:(c,u,v)\in\gamma\}$.

由引理 2 和定理 1 可看出系统(3) 正解存在的充分条件 $a>\lambda_1$，$c>\lambda_1\left(\dfrac{d\theta_a^2}{1+m\theta_a^2}\right)=c^*$ 和必要条件 $a>\lambda_1$，$c>\lambda_1$ 之间存在代沟，下面针对这个代沟讨论系统(3) 正解的多重性.

定理 5 设 $a>\lambda_1$ 且 $I<0$，则存在常数 $\check{c}\in(\lambda_1,c^*)$ 使得当 $c\in(\check{c},c^*)$ 时系统(3) 至少有两个正解；当 $c\in[c^*,\infty)$ 时系统(3) 至少有一个正解.

证明 首先由定理 1 可知当 $c>c^*$ 时系统(3) 至少有一个正解. 需要证明当 $c\in(\check{c},c^*)$ 时系统(3) 至少有两个正解且 $c=c^*$ 时系统(3) 至少有一个正解.

定义算子 $\boldsymbol{B}_\tau:D'\to W$ 为

$$\boldsymbol{B}_\tau(u,v)=(-\Delta+Q)^{-1}\times\begin{pmatrix}u\left(a-u-\tau\dfrac{buv}{1+mu^2}\right)+Qu\\ v\left(c-v-\tau\dfrac{du^2}{1+mu^2}\right)+Qv\end{pmatrix}$$

这里 Q 充分大使得 $Q>\max\{a(1+2\tau bc),c+\tau da^2\}$ 且 $\tau\in[0,1]$. 显然系统(3) 有非负解当且仅当 B_1 在 D' 中有不动点.

设 $D_\varepsilon=\{(u,v)\in W:\|(u,v)-(\theta_a,0)\|_E<\varepsilon\}$，由前面的讨论可知存在常数 ε 和 $\check{c}\in(\lambda_1,c^*)$ 使得对于 $c\in[\check{c},c^*)$ 系统(3) 有唯一正解 $(u_c,v_c)\in D_\varepsilon$. 因此，只需要证明对于 $c\in(\check{c},c^*]$ 系统(3) 在 $D'\backslash D_\varepsilon$ 上有正解即可.

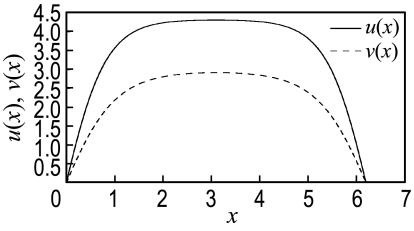
令 $D_1=D'\backslash D_\varepsilon$. 由引理 1 可知 $\boldsymbol{B}_\tau$ 在 ∂D_1 上没有不动点. 于是根据不动点指数的同伦不变性可知 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_1,D_1)=\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_0,D_1)$. 显然 $\boldsymbol{B}_0$ 在 D_1 内有不动点 $(0,0)$，$(0,\theta_c)$，(θ_a,θ_c). 用文献[1] 中定理 1 易证 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_0,(0,0))=\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_0,(0,\theta_c))=0$. 另一方面，由 (θ_a,θ_c) 非退化和线性稳定得 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}'_0(\theta_a,\theta_c)$ 在 $\overline{W}_{(\theta_a,\theta_c)}$ 上可逆，且由 $\overline{W}_{(\theta_a,\theta_c)}=S_{(\theta_a,\theta_c)}$ 知 $\boldsymbol{B}'_0(\theta_a,\theta_c)$ 在 $\overline{W}_{(\theta_a,\theta_c)}$ 上没有 α 性质. 于是 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_0,(\theta_a,\theta_c))=(-1)^\delta$. 利用特

征值的比较原理易得 $\delta=0$. 因此，由文献[1]中定理 1 知 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_0,(\theta_a,\theta_c))=1$. 于是，$\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_1,D_1)=\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_0,D_1)=\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_0,(0,0))+\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_0,(0,\theta_c))+\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_0,(\theta_a,\theta_c))=1$. 最后结合引理 4 得 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_1,D_1)=\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_1,(0,0))+\mathrm{index}_W(\boldsymbol{B}_1,(0,\theta_c))=0$，这表明系统(3)在 $D\backslash D_\varepsilon$ 内至少有一个正解.

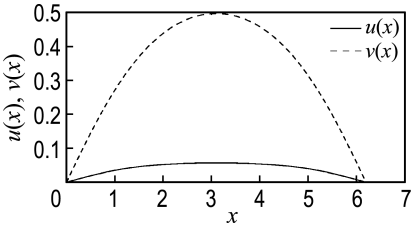
4　数值模拟

在一维情形 $\Omega=(0,l)$ 下利用 Matlab 工具做数值模拟来验证前面研究得到的理论结果. 取 $l=2\pi$，计算可得 $\lambda_1=1/4$. 取初值为 $r(|\sin x|,|\sin(x/2)|)$，$r>0$ 为初值系数.

根据定理 1 的条件取值进行数值模拟，验证系统(3)正解的存在性，其中的两个例子见图 1，这与定理 1 的结论一致. 在定理 2 的条件下取值进行数值模拟，发现系统(2)的正解与时间 t 无关，即达到平衡态，其中的例子见图 2，参数取值为 $a=7,b=0.3,c=5,m=4,d=3$，初值系数 $r=0.1$. 另外，为了验证正解的稳定性，在确定的参数下，选取不同的初值进行模拟，结果发现有唯一的正解且该正解稳定，见图 3，参数取值为 $a=7,b=0.3,c=5,m=4,d=3$，初值系数 $r=0.5,1.5,3,5,8$，这与定理 2 的结论吻合.



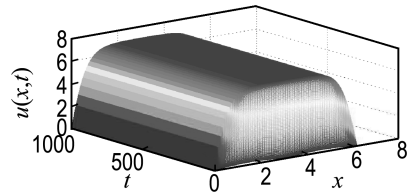
(a) $a=5$, $b=100$, $c=3$, $m=100$, $d=4$



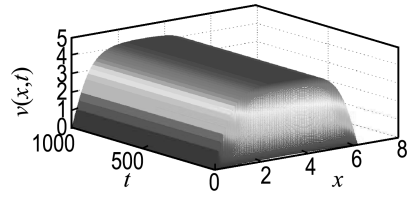
(b) $a=0.9$, $b=30$, $c=0.7$, $m=50$, $d=5$

图 1　平衡态正解模拟图

Fig. 1　The simulation diagram of positive steady state solutions



(a) $u(x,t)$



(b) $v(x,t)$

图 2　正解$(u(x,t),v(x,t))$模拟图

Fig. 2　The simulation diagram of positive solution $(u(x,t),v(x,t))$

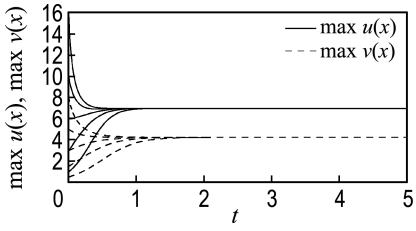


图 3　正解$(u(x,t),v(x,t))$对初值依赖性模拟图

Fig. 3　The simulation diagram of the dependence of positive solutions on the initial values

5　结　语

本文讨论了一类带有 Holling Ⅲ型功能反应函数的竞争模型正解的性质. 利用不动点指标理论、扰动理论和分歧理论得到了正解的存在性、唯一性、稳定性和多重性. 结果表明，当参数满足一定条件时，系统存在稳定的共存态. 通过全局分歧理论考察系统(3)关于$(\theta_a,0)$处产生全局分支走向时，带有 Holling Ⅲ型功能反应函数竞争模型的全局分支沿着分歧参数 c 延伸到∞，这是与带有 Holling Ⅱ型功能反应函数竞争模型的不同之处.

参考文献：

[1] Dancer E N. On the indices of fixed points of mappings in cones and applications [J]. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 1983, **91**(1):131-151.

[2] Nguyen A, Costa-Lima B. Orbits in a stochastic Goodwin-Lotka-Volterra model [J]. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 2014, **419**(1):48-67.

[3] Pao C V. Dynamics of Lotka-Volterra cooperation systems governed by degenerate quasilinear reaction-diffusion equations [J]. **Nonlinear Analysis:Real World Applications**, 2015, **23**:47-60.

[4] Holling C S. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation [J]. **Memoirs of the Entomological Society of Canada**, 1965, **97**(45):1-60.

[5] DU Yi-hong, LOU Yuan. Some uniqueness and exact multiplicity results for a predator-prey model [J]. **Transactions of the American Mathematical Society**, 1997, **349**(6):2443-2475.

[6] WU Jian-hua. Global bifurcation of coexistence state for the competition model in the chemostat [J]. **Nonlinear Analysis**, 2000, **39**(7):817-835.

[7] Shabani S. Diffusive Holling type-II predator-prey system with harvesting of prey [J]. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 2014, **410**(1):469-482.

[8] JIANG Hong-ling, WU Jian-hua, WANG Li-juan, *et al*. Qualitative analysis for a competition model with B-D functional response and numerical simulation [J]. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, 2014, **30**(5):1575-1594.

[9] ZHANG Xin-hong, LI Wen-xue, LIU Meng, *et al*. Dynamics of a stochastic Holling Ⅱ one-predator two-prey system with jumps [J]. **Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications**, 2015, **421**(1):571-582.

[10] ZHANG Cong, HUANG Nan-jing, O′Regan D. Almost periodic solutions for a Volterra model with mutual interference and Holling type Ⅲ functional response [J]. **Applied Mathematics and Computation**, 2013, **225**(1):503-511.

[11] HUANG Ji-cai, RUAN Shi-gui, SONG Jing. Bifurcations in a predator-prey system of Leslie type with generalized Holling type Ⅲ functional response [J]. **Journal of Differential Equations**, 2014, **257**(6):1721-1752.

[12] YANG Rui-zhi, WEI Jun-jie. Stability and bifurcation analysis of a diffusive prey-predator system in Holling type Ⅲ with a prey refuge [J]. **Nonlinear Dynamics**, 2015, **79**(1):631-646.

[13] Crandall M G, Rabinowitz P H. Bifurcation from simple eigenvalue [J]. **Journal of Functional Analysis**, 1971, **8**(2):321-340.

[14] Rabinowitz P H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems [J]. **Journal of Functional Analysis**, 1971, **7**(3):487-513.

Uniqueness and multiplicity of positive solutions for a competition model

LI Hai-xia*

(Institute of Mathematics and Information Science, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China)

Abstract: A competition model with Holling type Ⅲ functional response is studied. Firstly, by calculating the fixed point index, the sufficient conditions of the existence of positive solutions are obtained. Secondly, using the linear operator perturbation theory and standard elliptic equations regularity theory, the uniqueness and global stability of positive solutions are investigated. In addition, the multiplicity of positive solutions is discussed by the combination of the global bifurcation theory and degree theory. Finally, the theoretical results obtained are verified by the numerical simulation. It is proved that the model has multiple solutions and only one unique globally attractive solution for a suitable range of parameters.

Key words: Holling Ⅲ; competition model; uniqueness; multiplicity; numerical simulation