



# 格心型有限体积法格点变量重构方法研究

张帆<sup>\*1,2</sup>, 刘君<sup>3</sup>, 陈飙松<sup>1,2</sup>, 钟万颢<sup>1,2</sup>

- (1. 大连理工大学 工程力学系, 辽宁 大连 116024;  
2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;  
3. 大连理工大学 航空航天学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 根据网格格点变量计算单元变量梯度是二阶空间精度格心型有限体积法梯度重构的常用方法, 该方法的关键是根据格点的邻接单元格心变量构造满足局部线性分布的格点变量. 采用加权最小二乘法进行格点变量重构, 考虑实际格心变量的非线性分布, 提出采用距离反比加权体现不同位置单元对格点变量的影响程度差异; 针对扰动或弯曲网格中的格点变量重构出现极值的现象, 采用了新的限制方法. 采用高雷诺数边界层流动计算中常见的大长宽比、扰动/弯曲网格进行测试, 将提出的方法与通常采用的加权平均方法和拟拉普拉斯方法进行对比. 算例结果显示距离反比加权的最小二乘法重构精度较好, 提出的限制方法避免了扰动/弯曲网格上的格点变量出现极值.

**关键词:** 格心型有限体积法; 梯度重构; 格点变量; 最小二乘法; 限制方法; 大长宽比网格

**中图分类号:** V211.3      **文献标识码:** A      **doi:** 10.7511/dllgxb201505001

## 0 引言

非结构混合网格便于对复杂几何外形的流场进行自动化网格离散, 并且便于实现网格自适应, 因此在计算流体力学 (computational fluid dynamic, CFD) 中得到广泛应用. 目前基于非结构混合网格的 CFD 方法包括有限体积法 (FV)、间断伽辽金 (DG) 有限元法、有限谱体积法 (SV)、有限谱差分法 (SD)、FV/DG 混合算法以及将各种方法统一在一个框架内的 CPR (correction procedure via reconstruction) 方法等<sup>[1]</sup>. 以上方法在非结构网格的紧致高阶精度 (高于二阶精度) 格式研究中各具特点. 但是, 目前非结构网格的高阶精度格式还存在计算量、稳定性、曲边界处理等方面的问题, 因此应用最为广泛的方法仍然是基于梯度重构的二阶空间精度有限体积法.

尽管有限体积法 (此处及以下均指二阶空间精度有限体积法) 已经相对成熟, 但是它对复杂

湍流、高超声速气动加热等问题的模拟仍然存在困难. 非结构网格的正交性难以保证, 无法通过坐标变换进行尺度的归一化, 完全三角形 / 四面体网格中存在极大长宽比的歪斜网格, 以上因素导致非结构网格上的二阶空间精度往往得不到保证, 进而导致复杂流动模拟中精度不能满足需要. 因此, 非结构网格有限体积法的梯度重构仍然是有重要意义的研究课题.

格心型 (cell-centered) 与格点型 (vertex-centered) 方法是有限体积法构造控制体的两种方法. 两种方法各有特点, 优劣仍没有确定结论<sup>[2-4]</sup>. 由于格心型方法直接采用网格单元作为控制体, 控制体外形较为简单, 便于在流场边界大范围变形导致的网格重构中实施守恒插值算法<sup>[5-6]</sup>, 因此本文围绕格心型有限体积法进行研究.

有限体积法梯度构造的方法包括最小二乘 (least squares, LSQ) 法<sup>[7-8]</sup> 与格林 - 高斯

(Green-Gauss, G-G) 方法<sup>[9]</sup>. 其中 LSQ 法根据邻接单元的格心变量构造最小二乘问题直接计算单元梯度; G-G 方法根据一定原则选定积分路径, 然后根据格林公式由边界积分得到单元梯度. G-G 方法通常选取单元的边作为积分路径<sup>[9]</sup>, 单元边上的变量值由格点变量计算得到, 而格点变量通过格点邻接单元格心变量计算<sup>[10-13]</sup>, 从而引入了格点变量重构问题.

得到广泛采用的格点变量重构方法有加权平均 (weighted averaging, WA) 方法<sup>[10]</sup> 和拟拉普拉斯 (pseudo-Laplacian, PL) 方法<sup>[11-13]</sup>. 前者实施简便, 在各向同性网格上精度良好; 后者计算量略大, 但对于线性分布的变量可以获得精确的格点变量值. 文献<sup>[14]</sup> 还提出采用 LSQ 法进行格点变量重构. 此外, 针对边界格点邻接单元数量较少、计算模板不足, 导致计算可能不稳定的问题, 文献<sup>[15]</sup> 在 Frink 等<sup>[10]</sup> 的方法基础上引入了一种迭代策略避免边界格点变量重构结果的振荡.

需要注意的是, PL 方法在网格质量较差时, 计算得到的权值可能过大或过小, 导致得到的格点变量“过冲”, 因此文献<sup>[11]</sup> 提出进行权值的限制, 文献<sup>[2-4]</sup> 中分析了权值限制对计算精度的影响. 本文作者研究发现文献<sup>[14]</sup> 中的 LSQ 法也存在类似的“过冲”问题, 需要进行改进.

通过分析, 针对格点变量重构计算, 本文采用距离反比加权的 最小二乘 (weighted least squares, WLSQ) 方法构造格点变量以便改善精度; 针对格点变量“过冲”问题, 分析其原因, 改进对异常值的限制方法.

高雷诺数边界层流动计算中常见的大长宽比、弯曲/扰动网格是有限体积法梯度重构精度下降的常见情形. 即使在无黏流动计算中, 梯度重构精度的下降也会导致对流项求解精度下降. 文献<sup>[2-4, 14, 16-17]</sup> 针对此类网格上的梯度重构进行了研究. 因此, 需要针对此类网格进行算例测试. 实际流动计算中的精度不仅受到梯度计算结果的影响, 还受到网格、梯度限制器、通量计算格式等的综合影响, 尤其是在对精度和分辨率最为关注的含激波流场计算中更是如此. 因此本文不考虑实际流动的计算, 仅在测试网格上对给定非线性测试函数进行计算测试.

## 1 格心型有限体积分法

### 1.1 控制方程及其离散

考虑无黏欧拉方程的梯度计算, 控制方程形式如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \mathbf{Q} dV + \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F}_c(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{Q}$  为守恒变量,  $\mathbf{F}_c(\mathbf{Q})$  为对流通量,  $\mathbf{n}$  为积分域表面法向,  $\Omega$  为空间积分域,  $\partial\Omega$  为积分域边界. 对于格心型有限体积分法, 在每个单元内对式 (1) 进行空间离散, 得到第  $i$  个单元内的半离散方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{Q}V)_i = - \left( \sum_{k=1}^{N_f} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n}_k S_k \right)_i \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{F}_k$ 、 $\mathbf{n}_k$  和  $S_k$  分别为第  $i$  个单元的第  $k$  个表面的对流通量、外法向单位矢量和面积,  $N_f$  为单元表面个数,  $V$  为单元体积. 两侧单元在表面  $k$  处的重构变量值形成物理量的间断, 近似将其视为一维 Riemann 问题, 此时  $\mathbf{F}_k$  可以由通量差分分裂格式计算得到:

$$\mathbf{F}_k = 0.5 [\mathbf{F}(\mathbf{Q}_{ik}) + \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{jk}) - \tilde{\mathbf{A}} | (\mathbf{Q}_{ik} - \mathbf{Q}_{jk}) ] \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{Q}_{ik}$  为第  $i$  个单元在第  $k$  个表面上的变量值,  $\tilde{\mathbf{A}}$  为对流通量的线性化近似 Jacobian 矩阵. 当认为各单元内的变量分布是与格心变量值相等的常数分布时, 流场进行分片常数近似, 空间离散具有一阶精度. 为达到空间二阶精度, 需要构造单元梯度, 单元格心值与梯度共同描述单元内变量的线性分布, 即对流场进行分片线性近似. 此时第  $i$  个单元的第  $k$  个表面中心点的变量值为

$$\mathbf{Q}_{ik} = \mathbf{Q}_i + \phi_{ik} \nabla \mathbf{Q}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_{ik} \quad (4)$$

式中:  $\nabla \mathbf{Q}_i$  是单元内的变量梯度,  $\Delta \mathbf{r}_{ik}$  是单元中心到表面中心的矢径,  $\phi_{ik}$  为梯度限制器的值. 在跨声速和超声速流动计算中, 为了抑制激波附近可能出现的非物理振荡, 可以使用 Venkatakrishnan<sup>[18]</sup> 限制器对梯度进行限制. 本文中不涉及梯度限制器的作用, 因此令  $\phi_{ik} \equiv 1$ .

### 1.2 梯度重构方法

如前所述, 有限体积法梯度重构有多种方法. 其中一类是采用单元到单元的 LSQ 法<sup>[7-8]</sup>. 即待

求梯度的单元 0 与模板单元  $i$  构成式(5)所示线性方程,所有模板单元对应的线性方程构成一个超定方程组,采用最小二乘法求解该方程组可得单元 0 的梯度  $\nabla Q_0$ .

$$Q_i = Q_0 + \nabla Q_0 \cdot \Delta r_{0i} \quad (5)$$

此类方法核心问题是模板单元的选取.例如,图 1 中心单元(深色阴影)的梯度待求,模板单元可以为共边单元(浅色阴影),即 von Neumann 邻居单元;也可以为共点单元(全部相邻单元),即 Moore 邻居单元.

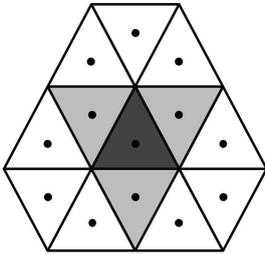


图 1 Von Neumann 与 Moore 邻居单元

Fig. 1 Von Neumann and Moore neighbour elements

在网格质量较差时,过少的模板单元可能导致精度与稳定性下降;过多的模板单元增大了计算量,若选取不当也不一定能够改善精度.因此模板单元的选取直接影响梯度重构的精度<sup>[2-4]</sup>与计算效率.此外,边界单元的梯度计算方法也得到了专门研究<sup>[19-20]</sup>.

另一类方法是本文关注的方法,首先计算单元格点变量,然后用 G-G 方法计算单元梯度.该方法的关键是格点变量的计算,其格心变量与格点变量的关系如图 2 所示.中心单元(深色阴影)的梯度待求,先由格心变量构造待求单元的格点变量,再由格点变量构造待求单元梯度.

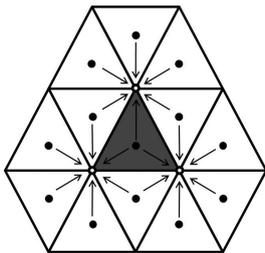


图 2 基于格点变量的格林-高斯方法

Fig. 2 Green-Gauss method based on vertex variables

格点变量构造的 WA 方法表示为如下形式<sup>[12]</sup>:

$$Q_0^{\text{vertex}} = \frac{\sum_i \omega_i Q_i^{\text{element}}}{\sum_i \omega_i} \quad (6)$$

其中上标 vertex 表示格点变量,element 表示格心变量, $i$  为与格点 0 相邻的单元, $\omega_i$  为权重.权重可以是单元体积  $V_i$ ,也可以是单元格心到格点的距离倒数  $1/|\Delta r_{0i}|$ ,亦或者是两者的乘积.

格点变量构造的 PL 方法针对式(7)所示方程,求  $\omega_i$  使对于线性函数  $\phi$  该方程恒等于 0.

$$L(\phi)_0 = \sum_{i=1}^N \omega_i (\phi_i - \phi_0) \quad (7)$$

$N$  为格点 0 邻接的单元个数.定义  $\omega_i = 1 + \Delta\omega_i$ ,以  $C = \sum_{i=1}^N (\Delta\omega_i)^2$  作为目标函数,采用拉格朗日乘子法求解得到  $\Delta\omega_i$ ,再计算权重  $\omega_i$ .网格的空间坐标显然为线性分布函数,将格点与其邻接单元格心的坐标代入式(7)进行求解可得到权重.该方法即为 PL 方法<sup>[11-13]</sup>,详细推导可参考相应文献.

在网格质量不理想的情况下,PL 方法的权重可能远远偏离 1,导致计算结果异常.为此文献[11]建议将权重限制在(0,2),得到修正的拟拉普拉斯(pseudo-Laplacian-clipping, PL-CLIP)方法.但文献[2-4]通过算例表明权值受限制后计算精度也下降.本文算例结果表明,若不进行修正,在某些网格条件下将导致格点变量计算结果误差过大.为此本文第 2 章介绍改进的权值限制准则与限制方法,对比计算结果在第 3 章中详细讨论.

## 2 改进的格点变量重构方法

### 2.1 加权最小二乘重构

计算实践发现,格点变量重构的 WA 方法精度不理想;PL 方法精度相对较好,但它并未考虑不同模板单元距离相差较大、变量非线性变化的情况.由于非结构网格的单元分布较为复杂,在某一方向上可能出现近似于图 3 所示的情况,对所有模板都进行逼近反而导致误差,需要优先对近处的模板进行逼近.例如图 3 中的  $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_1$  显然比

$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_2$  更为准确地逼近了  $A$  处的变量梯度. 文献[21]提出在 PL 方法的目标函数  $C$  中引入距离权重, 但是该方法采用文献[11]的权值修正后, 计算精度受到的不利影响比原始 PL 方法更大.

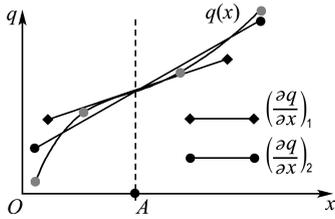


图3 多个模板的逼近

Fig. 3 Approximation of multiple stencils

本文提出采用距离反比加权的 WLSQ 方法进行格点变量计算. 假设流场变量为局部线性分布, 格点到邻接单元格心的变量关系如下:

$$\mathbf{Q}_i^{\text{element}} = \mathbf{Q}_0^{\text{vertex}} + \nabla \mathbf{Q}_0^{\text{vertex}} \cdot \Delta \mathbf{r}_{0i} \quad (8)$$

格点值为未知量, 须加入到方程组. 二维情况下对格点与所有邻接单元 ( $1 \sim N$ ) 建立上式, 考虑距离权重后构成线性方程组如下:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_1 \Delta x_{01} & \omega_1 \Delta y_{01} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_N & \omega_N \Delta x_{0N} & \omega_N \Delta y_{0N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \partial_x \mathbf{Q}_0 \\ \partial_y \mathbf{Q}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \omega_N \mathbf{Q}_N \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中  $\omega_i^n = 1/|\Delta \mathbf{r}_{0i}^n|$ , 本文取  $n = 1, 2, 3$ . 当  $n = 0$  时等价于 PL 方法,  $n$  越大则距离近的模板单元对格点变量的影响越大. 最小二乘问题可以使用正规化方法或正交化方法求解. 本文只需要得到格点上的  $\mathbf{Q}_0$ , 不需要保留空间导数.

对于非结构网格(三角形、四面体), 网格点数量明显少于单元数量. 上述 WLSQ 方法对格点进行最小二乘计算, 不仅在计算中引入了 Moore 邻居单元的信息, 而且相对于 1.2 节中单元到单元的 LSQ 方法计算量更小.

## 2.2 限制方法

如第 2.1 节所述, 文献[11]采用权值限制方法避免格点变量构造结果异常, 但也导致精度下降. 本文分析认为, 异常值的出现是因为格点变量重构时在邻接单元格心变量以外出现了新的极值, 原理如图 4 所示. 图中构造格点  $O$  的值需要用到邻接三角形和四边形单元的格心变量. 线性重构构造了各个单元格心到目标格点的变量线性

关系. 对于图中网格, 当梯度不为 0 时, 必然导致格点变量值大于最大格心变量值或小于最小格心变量值, 即格点变量出现新的极值. 当网格长宽比较大时, 格点  $O$  可能距离单元格心很远, 导致误差很大.

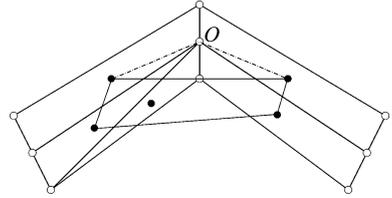


图4 弯曲网格格点变量重构

Fig. 4 Vertex variable reconstruction on curved grid

文献[11]建议的限制方法以权值大小为准, 计算中权值大小由网格坐标代入式(7)推导得到, 与流场变量无关, 因此根据权值大小不能确定格点是否出现极值/异常值. 因此, 本文采用变量值代替权值作为判断标准, 认为符合以下任一条件的格点变量需要进行权值限制修正:

$$\begin{aligned} q_0^{\text{vertex}} &> \max(q_{i,i \in \text{Neighbour}(0)}^{\text{element}}) \\ q_0^{\text{vertex}} &< \min(q_{i,i \in \text{Neighbour}(0)}^{\text{element}}) \end{aligned} \quad (10)$$

其中变量  $q$  为标量, 流动计算中可以是压力或密度. 确定需要修正的格点后, 通过以下步骤避免异常值. 以正规化方法求解某一格点变量的最小二乘问题为例, 式(9)可以逐步写为

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (11)$$

令  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{C}$ , 则有  $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{b}$ . 由于只需要求得式(9)中的  $\mathbf{Q}_0$ , 因此只需计算:

$$\mathbf{Q}_0 = \sum_{i=1}^N c_{1i} \mathbf{b}_i = \sum_{i=1}^N c_{1i} \omega_i \mathbf{Q}_i = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{Q}_i \quad (12)$$

此处  $N$  为  $\mathbf{C}$  矩阵的列数, 也是格点邻接单元的个数. 修正得到最终的格点变量计算的权值  $a_i$  为

$$a_i = \begin{cases} 0; & c_{1i} \omega_i < 0 \\ \frac{c_{1i} \omega_i}{\sum_{j \in \{j | c_{1j} \omega_j \geq 0\}} c_{1j} \omega_j}; & c_{1i} \omega_i \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

后续计算中采用的 WLSQ 方法全部应用了本节介绍的限制方法.

## 3 算例与分析

考虑网格的大长宽比、弯曲和扰动, 对如图 5

所示矩形域与弧形域网格进行测试. 采用了四边形网格和混合网格, 其中混合网格是在四边形网格基础上, 随机地将其中一半四边形剖分为两个三角形得到. 图 5(a)、(b)格点规则分布, 图 5(c)、(d)对格点坐标进行了随机扰动, 图 5(e)、(f)、

(g)为格点规则分布的弯曲网格. 矩形网格区域大小为  $1 \times 1$ , 弧形网格内侧弧长为 1, 弧度为  $\pi/2$ . 网格剖分为纵向或径向 101 网格点, 横向或周向 21 网格点, 第一层网格长宽比为 6 890, 每层网格厚度增长率为 1. 1.

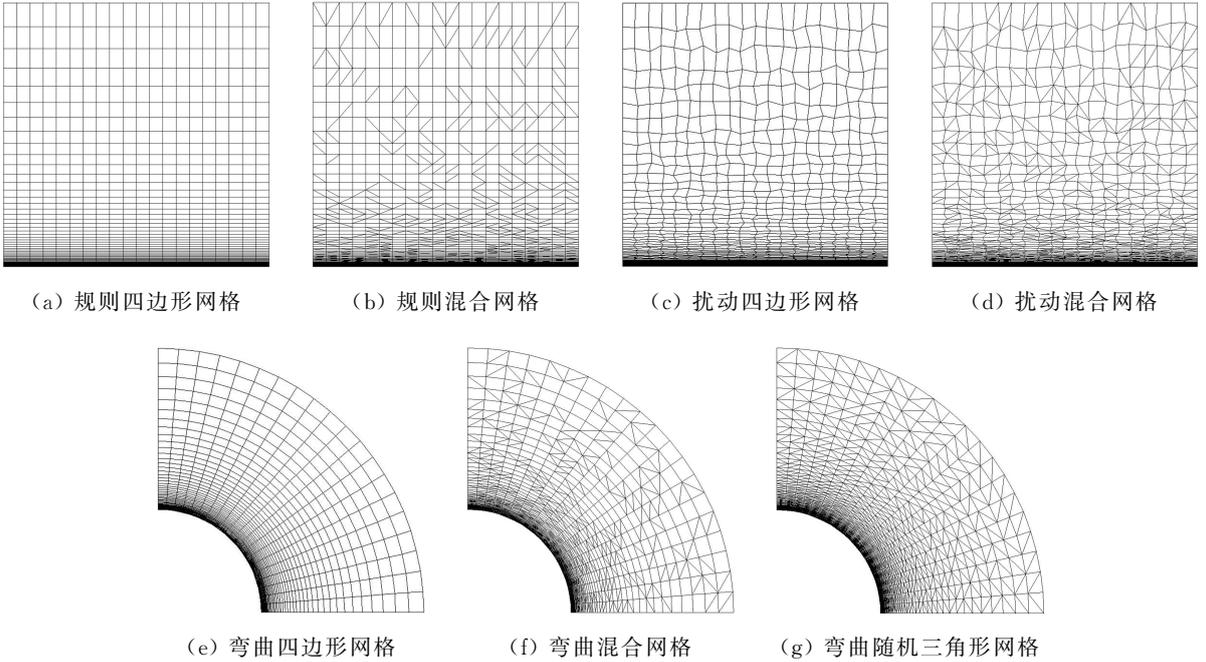


图 5 测试网格  
Fig. 5 Test grids

矩形区域网格测试函数为  $(y + 1)^2$ ,  $y$  由底边指向上; 弧形区域网格测试函数为  $d^2$ ,  $d$  由弧心出发平行于弧边法向. 限于篇幅仅给出部分网格的计算结果.

图 6 给出了规则格点的矩形区域混合网格的计算结果. 矩形区域规则与扰动四边形网格的计算结果与此类似, 但误差变化更加规则, 因此不专门说明. 观察图 6 结果可以看出, 各种 WA 方法在网格厚度下降 5 个量级的情况下, 误差下降了近 4 个量级, 而 PL 方法与 WLSQ 方法的误差在同样情况下下降了超过 6 个量级, 同时最粗的网格上后两类方法的误差比 WA 方法低约 2 个量级. 本算例中, PL 方法与不同权值的 WLSQ 方法结果差别不大; WA 方法中, 仅在最粗的网格上, 权重  $\omega = V/r^2$  的结果相对其他 3 种略好, 整体计算结果相当. 本算例表明, PL 方法与 WLSQ 方法比 WA 方法的格点变量计算精度大约高一阶.

由图 7 可看到, 在矩形区域扰动混合网格上, PL 方法与 WLSQ 方法的误差趋势接近, 但是 PL-CLIP 方法的误差变化趋势不稳定, 局部出现较大误差. 可见, 尽管网格形式相近, 但是扰动后的不规则格点坐标对计算结果造成了影响. 按照 2.2 节提出的异常值判断方法, 该算例并不需要进行格点变量修正或权值限制, 因此 WLSQ 方法的结果并未出现误差变化的波动. 本算例表明, PL-CLIP 方法在网格质量不理想的情况下计算精度不稳定.

图 8 给出了弯曲混合网格的计算结果. 可以看到 PL 方法出现了极大误差, 其最大误差相对 WLSQ 方法要大一个量级; 各种 WA 方法的误差随着网格缩小有下降趋势, 但是在网格较粗时, 误差相对于 WLSQ 方法要大一个量级. 本算例表明, WA 方法在弯曲混合网格上的格点变量重构精度不理想; 而且受图 4 介绍的问题的影响, PL

方法需要采用权值限制处理;WLSQ 方法精度良好.

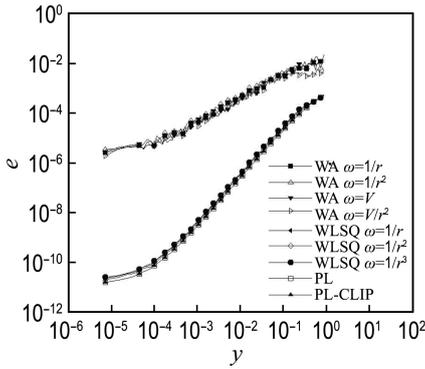


图 6 规则混合网格计算结果

Fig. 6 Calculation results on regular hybrid grid

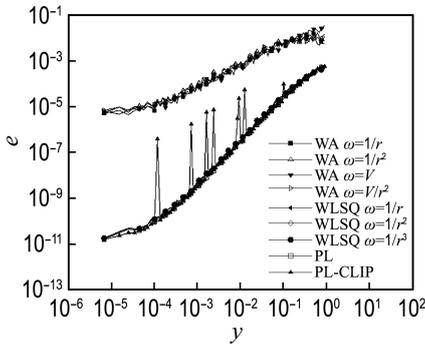


图 7 扰动混合网格计算结果

Fig. 7 Calculation results on perturbed hybrid grid

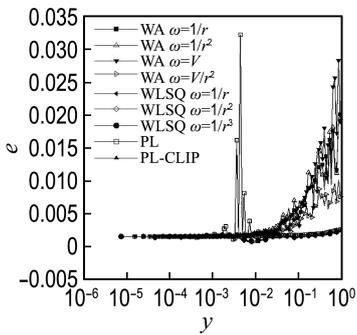


图 8 弯曲混合网格计算结果

Fig. 8 Calculation results on curved hybrid grid

图 9 是本文采用的 WLSQ 方法与 PL-CLIP 方法在图 5(g) 网格上计算结果的对比,WA 方法与 PL 方法不再参与比较. 可以看到 PL-CLIP 方法与 WLSQ 方法均未出现误差的异常波动,同时 WLSQ 方法误差较小,其中权重  $\omega = 1/r^3$  的计算结果误差最小. 须注意高次距离反比加权可能导

致最小二乘问题病态,进而导致误差,因此不能任意增高权重阶次,此问题本文尚未细致研究.

另外观察到弯曲网格在网格厚度趋近于 0 时,误差并未趋近于 0,这是由于内侧弧形边界进行分段线性近似导致的误差.

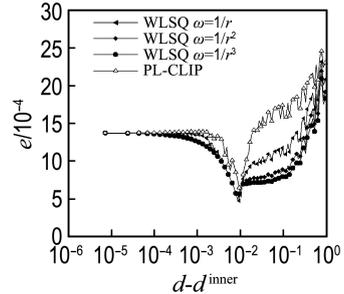


图 9 弯曲随机三角形网格计算结果

Fig. 9 Calculation results on curved random triangular grid

对弯曲随机三角形网格进行周向加密(径向不变),分别加密 2 倍和 4 倍,其内侧边界误差变化趋势如图 10 所示. 可以看出随着周向网格加密,误差同阶降低,证明图 8、9 中网格厚度降低后误差收敛到确定值的现象是由于对曲边进行分段线性近似导致的.

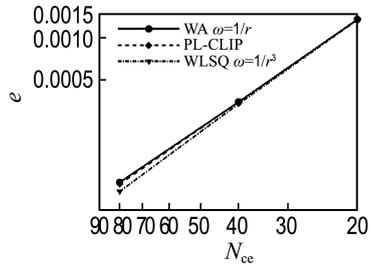


图 10 内侧边界误差随周向单元个数变化

Fig. 10 Variation of inner boundary errors and circumferential elements (CE) number

### 4 结 语

本文针对格心型有限体积法梯度重构过程中的格点变量重构问题进行了研究.

首先,在参考相关文献研究结果后,分析了非结构网格非正交和变量非线性变化的因素,提出采用距离反比加权的最小二乘法进行格点变量重构计算;针对弯曲网格等网格质量较差的情况,指出格点变量“过冲”是由于格点相对于邻接单元出

现了新的极值,在此基础上采用了一种简单有效的权值限制方法.

针对实际问题中梯度计算最为困难的大长宽比、扰动/弯曲网格,选取了7个网格长宽比极大的测试网格进行算例测试,突出影响计算精度的网格因素.结果表明,在规则网格上,加权平均方法的精度比最小二乘法低大约一阶;权值限制的修正拟拉普拉斯方法对网格质量较为敏感,而未进行权值限制的拟拉普拉斯方法则在弯曲混合网格上出现误差的大范围波动.相比之下,采用本文权值限制方法的加权最小二乘法精度较好.

在弯曲网格上,随着内侧弧形边界上网格厚度逐渐缩小,误差并不像矩形区域网格那样趋近于机器精度0,而是收敛于一个确定值.分析认为这一误差应当是曲边界被分段线性近似导致的.通过对周向网格进行加密,发现误差收敛值相应下降,证明分析结论合理.

下一步工作中,需要将本文方法应用于实际问题的计算中考核其适用性;并与其他类型的梯度重构方法进行对比,对计算效率、精度等问题得出定量对比结果.

## 参考文献:

[1] 张来平,贺立新,刘伟,等.基于非结构/混合网格的高阶精度格式研究进展[J].力学进展,2013,43(2):202-236.  
ZHANG Lai-ping, HE Li-xin, LIU Wei, *et al.* Reviews of high-order methods on unstructured and hybrid grid [J]. **Advances in Mechanics**, 2013, 43(2):202-236. (in Chinese)

[2] Diskin B, Thomas J L. Accuracy of gradient reconstruction on grids with high aspect ratio, NIA Report No. 2008-12 [R]. Hampton: National Institute of Aerospace, 2008.

[3] Diskin B, Thomas J L, Nielsen E J, *et al.* Comparison of node-centered and cell-centered unstructured finite-volume discretizations: Viscous fluxes [J]. **AIAA Journal**, 2010, 48(7):1326-1338.

[4] Diskin B, Thomas J L. Comparison of node-centered and cell-centered unstructured finite volume discretizations: Inviscid fluxes [J]. **AIAA Journal**, 2011, 49(4):836-854.

[5] Farrell P E, Piggott M D, Pain CC, *et al.* Conservative interpolation between unstructured meshes via supermesh construction [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2009, 198(33-36):2632-2642.

[6] Farrell P E, Maddison J R. Conservative interpolation between volume meshes by local Galerkin projection [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2011, 200(1-4):89-100.

[7] Haselbacher A, Blazek J. Accurate and efficient discretization of Navier-Stokes equations on mixed grids [J]. **AIAA Journal**, 2000, 38(11):2094-2102.

[8] Mavriplis D J. Revisiting the least-squares procedure for gradient reconstruction on unstructured meshes, AIAA Paper 2003-3986 [R]. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2003.

[9] Barth T J, Jespersen D C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes, AIAA Paper 89-0366 [R]. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 1989.

[10] Frink N T, Parikh P, Pirzadeh S. A fast upwind solver for the Euler equations on three-dimensional unstructured meshes, AIAA Paper 91-0102 [R]. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 1991.

[11] Holmes D G, Connell S D. Solution of the 2D Navier-Stokes equations on unstructured adaptive grids, AIAA Paper 89-1932 [R]. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 1989.

[12] Rausch R, Batina J, Yang H. Spatial adaptation of unstructured meshes for unsteady aerodynamic flow computations [J]. **AIAA Journal**, 1992, 30(5):1243-1251.

[13] Frink N T. Recent progress toward a three-dimensional unstructured Navier-Stokes solver, AIAA Paper 94-0061 [R]. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 1994.

[14] Katz A, Sankaran V. High aspect ratio grid effects on the accuracy of Navier-Stokes solutions on

- unstructured meshes [J]. **Computer and Fluids**, 2012, **65**:66-79.
- [15] Lee H, Jeong J J, Cho H K, *et al.* An improved numerical scheme to evaluate the pressure gradient on unstructured meshes for two-phase flow analysis [J]. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, 2010, **37**(9):1273-1279.
- [16] Katz A, Sankaran V. Mesh quality effects on the accuracy of CFD solutions on unstructured meshes [J]. **Journal of Computational Physics**, 2011, **230**(20):7670-7686.
- [17] Shima E, Kitamura K, Haga T. Green-Gauss/weighted-least-squares hybrid gradient reconstruction for arbitrary polyhedra unstructured grids [J]. **AIAA Journal**, 2013, **51**(11):2740-2747.
- [18] Venkatakrisnan V. On the accuracy of limiters and convergence to steady state solutions, AIAA Paper 93-0880 [R]. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 1993.
- [19] Haselbacher A. On constrained reconstruction operators, AIAA Paper 2006-1274 [R]. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2006.
- [20] 康忠良, 闫超. 适用于混合网格的约束最小二乘重构方法[J]. **航空学报**, 2012, **33**(9):1598-1605. KANG Zhong-liang, YAN Chao. Constrained least-squares reconstruction method for mixed grids [J]. **Acta Aeronautica et Astronautica Sinica**, 2012, **33**(9):1598-1605. (in Chinese)
- [21] Kim S E, Makarov B, Caraeni D. A multi-dimensional linear reconstruction scheme for arbitrary unstructured grids, AIAA Paper 2003-3990 [R]. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 2003.

## Research on vertex variables reconstruction for cell-centered finite volume method

ZHANG Fan<sup>\*1,2</sup>, LIU Jun<sup>3</sup>, CHEN Biao-song<sup>1,2</sup>, ZHONG Wan-xie<sup>1,2</sup>

( 1. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

3. School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China )

**Abstract:** A commonly-used gradient reconstruction procedure for the second-order cell-centered finite volume method is to calculate the element gradient by its vertex variables. The key issue of this method is to construct the local linearly distributed vertex variables by their adjacent elements' cell-centered variables. Using weighted least squares method for vertex variables reconstruction, considering the fact that the cell-centered variables are non-linear distribution, inversely distance weight is applied to estimate the different influences of the elements in various positions. In order to deal with the over-estimation of vertex variables on perturbed or curved grids, a new clipping method is implemented. Test cases use high-aspect-ratio, perturbed or curved grids which are commonly applied to the boundary layer flow simulations with high Reynolds number. The presented method is compared with weighted averaging method and pseudo-Laplacian method. Numerical results show that better accuracy is attained by presented inversely distance weighted least squares method, and the over-estimation of vertex variables on perturbed or curved grids is eliminated by the clipping method suggested here.

**Key words:** cell-centered finite volume method; gradient reconstruction; vertex variables; least squares method; clipping method; high-aspect-ratio grid