

船舶结构 Daubechies 小波基无网格分析方法研究

陈建平^{*1,2}, 唐文勇¹

(1. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240;

2. 广州航海学院 船舶工程学院, 广东 广州 510725)

摘要: 提出一种新的应用 Daubechies 小波尺度函数来逼近船舶结构场函数的无网格分析方法. 首先选用具有紧支性和正交性特征的 Daubechies 小波作为基函数, 由小波尺度函数张量积的形式来构造船舶二维结构的近似表达, 降低了问题求解的复杂度. 然后运用增量法对构建的船舶二维结构 Daubechies 小波无网格场函数进行迭代求解. 最后选取典型船舶二维结构进行算例分析, 并把计算结果与有限元法(FEM)结果进行比较验证了所提方法的有效性.

关键词: 船舶结构分析; Daubechies 小波基; 尺度函数; 无网格法; 二维弹性问题

中图分类号: U661.42

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb201505008

0 引言

目前船舶结构分析中最为有效也是最常用的计算方法就是有限元法(FEM)^[1]. 但有限元法因其本身固有的缺陷, 在分析结构场过程中, 当场量变化剧烈时, 会出现计算精度降低甚至计算中断的现象, 而有限元法采用的通常处理方法是对问题区域进行网格细分或者使用高阶单元, 其负面结果就是加大了有限元法前后处理的工作量, 降低了计算效率, 事实上这种方法也并不能从根本上消除问题的产生.

作为与有限元法相对应的另一种数值分析方法——无网格法, 在近 20 年中有了很大的发展^[2-5]. 同传统的有限元法相比较, 无网格法由于没有网格背景, 所以在计算过程中可以按照需要来增加或减少节点, 同时不需要对各个节点之间的拓扑信息进行处理, 因而对于自适应分析计算具有很大的优势. 但无网格法的计算精度受节点密度、基函数的选用、阶次以及支撑域半径大小等因素的影响, 使得求解形函数的工作过程代价昂贵. 本文基于上述现状, 提出基于样条小波的船舶结构无网格分析技术.

近几年发展起来的小波分析技术是一种解决

工程和科学问题的强有力的数值分析技术^[6-10]. 小波分析技术的特点在于它的时频定位功能, 可以运用小波基来近似求解问题域上的待求场函数, 这样就避免了像有限元法和其他无网格法那样需要构建场量的形函数, 并且可以根据精度需要灵活地调整尺度.

本文选用具有紧支性和正交性特征的 Daubechies 小波作为形函数的基函数来求解船舶二维结构问题. 然后运用增量法对构建的船舶二维结构的 Daubechies 无网格场函数进行求解. 最后选取典型船舶二维结构进行计算分析, 把计算结果与有限元法结果进行比较以验证所提方法的有效性.

1 船舶二维结构场函数的小波近似表达

一般情况下, 船体结构板的板厚要远小于板的另外两个维度上的几何尺寸, 故在分析其受力时, 可以采用 Mindlin-Reissner 板壳理论和 Kirchhoff-Love 板壳理论, 这意味着一般的船舶结构模型在进行适当的简化后都可以转化为典型的二维弹性模型. 所以本文研究均以二维弹性模

收稿日期: 2015-04-08; 修回日期: 2015-07-21.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(重点项目 51239007); 工信部高技术船舶科研项目(重大专项); 广东省自然科学基金资助项目(2014A030313792).

作者简介: 陈建平^{*}(1973-), 男, 博士, 副教授, E-mail: wchchenjp@sina.com; 唐文勇(1970-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, E-mail: wytang@sjtu.edu.cn.

型作为基础.

1.1 Daubechies 小波的尺度函数

Daubechies 小波原理是基于实直线的,但在实际应用中,绝大多数问题的求解域又都是有限域,那么问题的关键就是如何把基于实直线的 Daubechies 小波适用到有限域中去.当前虽然已经构造出有限域小波,但是这种类型的小波过于复杂,很难直接应用于二维和三维问题.本文采用张量积降维的方法,将二维问题转化为一维问题,这样就可以使用 Daubechies 小波来近似表达二维弹性问题.

一维小波中,尺度函数可以表达如下:

$$\varphi_{m,k}(x) = \varphi(2^m x - k) \tag{1}$$

式中: m 为小波空间的尺度, k 为小波空间的位置参数.

根据小波理论^[11],尺度函数序列 $\varphi_{m,k}^j(x)$ 的支撑为

$$\sup \varphi_{m,k}^j(\xi) = [k2^{-m}, (2j - 1 + k)2^{-m}] \tag{2}$$

式中: j 为该小波序列的序数.

假定在某一任意设定区间 $[l_1, l_2]$ 上的函数 $f(x)$ 可以运用在某一尺度下的 Daubechies 小波近似表达,有

$$f_m(x) := \sum_k a_k \varphi_{m,k}(x); x \in [l_1, l_2], m, k \in \mathbf{Z} \tag{3}$$

因 $\varphi_{m,k}^j(x)$ 具有紧支性,所以 $f_m(x)$ 同样具有紧支性,故位置参数 k 为有限数.

为了用 Daubechies 小波近似支撑为 $[l_1, l_2]$ 的函数 $f(x)$,故对于尺度小波序列 $\varphi_{m,k}^j(x)$ 的每一个支撑都必须适用,所以在尺度函数序列 $\varphi_{m,k}^j(x)$ 的支撑下,有 $j \in [-2j + 1 + \lceil l_1/2^{-m} \rceil, \lceil l_2/2^{-m} \rceil - 1]$,则式(3)可以进一步表达为

$$f_m(x) := \sum_{k=-2j+1+\lceil l_1/2^{-m} \rceil}^{\lceil l_2/2^{-m} \rceil-1} a_k \varphi_{m,k}^j(x); \\ x \in [l_1, l_2], m, k \in \mathbf{Z} \tag{4}$$

式中: $\lceil l_i/2^{-m} \rceil$ 表示大于 $l_i/2^{-m}$ 的最小整数, $i = 1, 2$.

对于尺度函数式(1),不失一般性,可以进一步简化为

$$\varphi_{m,k}(x) = \varphi(mx - k) \tag{5}$$

把式(5)代入式(4)中,可以得到近似公式

$$f_m(x) := \sum_{k=-2j+1+\lceil l_1/m \rceil}^{\lceil l_2/m \rceil-1} a_k \varphi^j(mx - k); \\ x \in [l_1, l_2], k \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{R} \tag{6}$$

这样就得到了基于 Daubechies 小波的场函

数近似表达式.

1.2 二维结构的近似表达

由于式(6)是建立在基于实直线基础上的 Daubechies 小波近似表达式,是一个一维小波,显然是不适合于二维问题的.下面运用小波分析中尺度函数的张量积形式来构造二维基函数,进而以构造的二维基函数来近似表达问题域场函数,有下式:

$$\phi_{m,k,r,s}^t(x,y) = \varphi_{m,r}^t(x) \varphi_{k,s}^t(y) \tag{7}$$

式中: $\phi_{m,k,r,s}^t(x,y)$ 为构造的二维基函数.

由式(7)可以得出,构造的二维基函数可以由两个一维尺度函数来获得.这样对于定义在有限域的二维函数 $f(x,y)$ 可以根据新构造的二维基函数近似表示出来.根据式(6),可以得出二维场函数的近似公式:

$$f_{m,k}(x) = \sum_{r=-2j+1+\lceil l_1/2^{-m} \rceil}^{\lceil l_2/2^{-m} \rceil-1} \sum_{s=-2j+1+\lceil l_3/2^{-k} \rceil}^{\lceil l_4/2^{-k} \rceil-1} a_{r,s} \phi_{m,k,r,s}^t(x,y); \\ x \in [l_1, l_2], y \in [l_3, l_4] \tag{8}$$

式中: $[l_1, l_2] \times [l_3, l_4]$ 表示一个正方形有限区域.

把式(7)代入式(8),进一步得到

$$f_{m,k}(x) = \sum_{r=-2j+1+\lceil l_1/2^{-m} \rceil}^{\lceil l_2/2^{-m} \rceil-1} \sum_{s=-2j+1+\lceil l_3/2^{-k} \rceil}^{\lceil l_4/2^{-k} \rceil-1} [a_{r,s} \times \\ \varphi_{m,r}^t(x) \varphi_{k,s}^t(y)]; \\ x \in [l_1, l_2], y \in [l_3, l_4] \tag{9}$$

式(8)和(9)是建立在一个正方形有限域 $[l_1, l_2] \times [l_3, l_4]$ 上的.但大多数情况下,问题的有限域是不规则的,本文采用的处理办法为从基函数序列 $\phi_{m,k,r,s}^t(x,y)$ 中提取对问题求解域有影响的基函数,即满足条件

$$\sup \phi \cap \Omega \neq \emptyset \tag{10}$$

式中: Ω 为求解域.

这样对于给定求解域内二维函数 $f(x,y)$ 可以表达为

$$f(x,y) \approx f_{m,k}(x,y) = \sum_r \sum_s a_{r,s} \phi_{m,k,r,s}^t(x,y) \tag{11}$$

2 增量无网格法

增量法的基本原理是建立在迭代运算的基础上的.假定在 t 时刻结构的荷载及边界条件下的位移、应变和应力为 u_i^t, ϵ_i^t 和 σ_i^t ,那么在经历了一个增量时间 Δt 后,即 $t + \Delta t$ 时刻,其对应的荷载以及位移也应当有一个增量.根据机械能守恒定

律,在经历弹性变形后,系统必须满足增量虚位移原理.利用系统增量虚位移平衡关系式,推导出前文给出的 Daubechies 小波无网格场函数的求解方程.

2.1 增量公式

根据增量虚位移原理^[12],在经历时间增量 Δt 后的应力 $\sigma'_{ij} + \Delta\sigma_{ij}$ 、体力 $\bar{F}'_i + \Delta\bar{F}_i$ 和边界条件 $\bar{T}'_i + \Delta\bar{T}_i$ 必须满足虚功平衡式,有

$$\int_V (\sigma'_{ij} + \Delta\sigma_{ij}) \delta(\Delta\epsilon_{ij}) dV - \int_V [(\bar{F}'_i + \Delta\bar{F}_i) \times \delta(\Delta u_i)] dV = \int_{S_\sigma} (\bar{T}'_i + \Delta\bar{T}_i) \delta(\Delta u_i) dS \quad (12)$$

式中: $\delta(\Delta u_i)$ 为增量的虚位移, $\delta(\Delta\epsilon_{ij})$ 为增量的应变.

将弹性应力-应变关系式代入式(12),可以得到增量虚功平衡矩阵关系式为

$$\begin{aligned} &\int_V \delta(\Delta\epsilon)^T \mathbf{D}^e \Delta\epsilon dV - \int_V \delta(\Delta\mathbf{u})^T \Delta\bar{\mathbf{F}} dV - \\ &\int_{S_\sigma} \delta(\Delta\mathbf{u})^T \Delta\bar{\mathbf{T}} dS = \\ &-\int_V \delta(\Delta\epsilon)^T \boldsymbol{\sigma}' dV + \int_V \delta(\Delta\mathbf{u})^T \bar{\mathbf{F}}' dV + \\ &\int_{S_\sigma} \delta(\Delta\mathbf{u})^T \bar{\mathbf{T}}' dS \end{aligned} \quad (13)$$

2.2 位移场函数

将前文给出的 Daubechies 小波无网格场函数式(11)表示为增量矩阵形式:

$$\Delta\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}\Delta\mathbf{a} \quad (14)$$

把式(14)代入式(13)中,则式(13)可以简化为下面的矩阵形式:

$${}^t\mathbf{k}_e \Delta\mathbf{a} = \Delta\mathbf{Q} \quad (15)$$

式中: ${}^t\mathbf{k}_e$ 为弹性刚度矩阵, $\Delta\mathbf{a}$ 为增量位移向量, $\Delta\mathbf{Q}$ 为不平衡力向量. 它们的计算式为

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{k}_e &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_e \mathbf{B} dV \\ \Delta\mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_i^{t+\Delta t} - \mathbf{Q}_i^t \\ \mathbf{Q}_i^{t+\Delta t} &= \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{F}}^{t+\Delta t} dV + \int_{S_\sigma} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}}^{t+\Delta t} dS \\ \mathbf{Q}_i^t &= \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}' dV \\ \mathbf{B} &= \mathbf{L}\boldsymbol{\phi} \end{aligned} \quad (16)$$

式中: $\mathbf{L}$ 为微分算子.

3 本质边界条件

因尺度函数缺乏插值性质,所以本质边界条件不能够像有限元法那样直接施加. 本文使用罚

函数法来施加本质边界条件. 对于式(13),通过引入罚系数 α 来使得关系式成立,有

$$\begin{aligned} &\int_V \delta(\Delta\epsilon)^T \mathbf{D}^e \Delta\epsilon dV - \int_V \delta(\Delta\mathbf{u})^T \Delta\bar{\mathbf{F}} dV - \\ &\int_{S_\sigma} \delta(\Delta\mathbf{u})^T \Delta\bar{\mathbf{T}} dS + \alpha \int_{S_u} \delta(\Delta\mathbf{u})^T (\Delta\mathbf{u} - \Delta\bar{\mathbf{u}}) dS = \\ &-\int_V \delta(\Delta\epsilon)^T \boldsymbol{\sigma}' dV + \int_V \delta(\Delta\mathbf{u})^T \bar{\mathbf{F}}' dV + \\ &\int_{S_\sigma} \delta(\Delta\mathbf{u})^T \bar{\mathbf{T}}' dS \end{aligned} \quad (17)$$

对于式(15) 同样成立,有

$${}^t\mathbf{k} \Delta\mathbf{a} = \Delta\mathbf{Q} \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{k} &= {}^t\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_{\text{pen}} \\ \mathbf{k}_{\text{pen}} &= \alpha \int_{S_u} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS \end{aligned} \quad (19)$$

4 方程求解思路

由 Daubechies 小波推导出的场函数近似公式和增量无网格法的迭代运算,可以归纳出场函数的解答思路如下:

- (1) 根据施加了本质边界条件的位移场函数方程式(18),求得增量位移 $\Delta\mathbf{a}$;
- (2) 由式(12) 和弹性问题的应力 - 应变关系式可以进一步求得 $\Delta\epsilon$ 和 $\Delta\sigma$, 这样可以获得 $t + \Delta t$ 时刻的应力 $\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}' + \Delta\boldsymbol{\sigma}$;
- (3) 把 $t + \Delta t$ 时刻的应力 $\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t}$ 代入式(16) 中不平衡力关系式,迭代运算直至 $\Delta\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{0}$, 求出 $t + \Delta t$ 下的 $\Delta\mathbf{a}$ 、 $\Delta\epsilon$ 、 $\Delta\sigma$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t}$;
- (4) 转入下一个迭代运算.

5 算 例

为了验证本文方法的正确性,给出船舶结构中船体梁、开孔板和裂纹板 3 种典型船舶结构的计算比较分析. 本文算例中材料的弹性模量 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$,泊松比 $\mu = 0.3$.

5.1 船体梁

梁结构是船体结构中的基本结构. 图 1 为一端固支(左端)、一端自由(右端)的船体梁简化结构. 上顶边受均匀分布荷载 $p = 10 \text{ N/m}$.

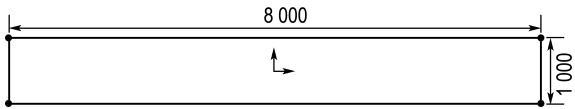


图 1 受均匀分布荷载的船体梁
Fig. 1 Ship beam under uniform loading

本算例中采用节点 387 个,计算得出算例梁的应力分布云图见图 2(a). 与 FEM 计算的应力分布云图(图 2(b))相比较,发现应力分布是一致的.



图 2 本文方法与 FEM 计算应力云图(船体梁)
Fig. 2 The stress fringe with method in this paper and FEM (ship beam)

图 3 给出了按照本文无网格法与有限元 ANSYS 计算结果和解析解比较曲线. 为了简单起见,仅对比板 X 方向中线截面上正应力分布情况和板 X 方向中线截面上位移变化. 由图比较可以得出: FEM 和本文方法的相对误差范数都在 5% 以下;本文方法比 FEM 的结果更为接近解析解. 可见本文方法具有更高的计算精度.

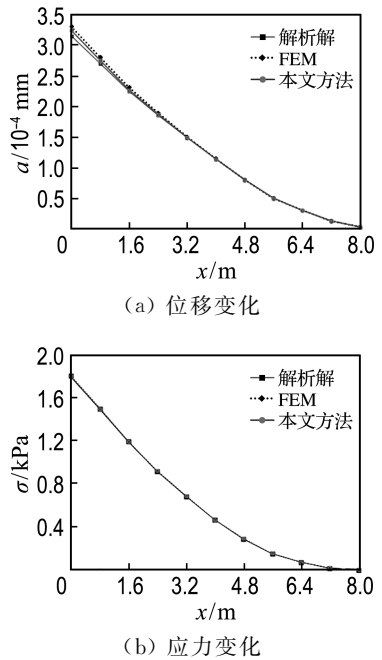


图 3 板 X 方向中线截面上位移和正应力变化
Fig. 3 Deformation and Mises stress along the X-direction in the middle section of plate

5.2 开孔板

图 4 为简化为上下两端自由、左右两侧承受均匀拉力且中间开有圆孔的平直船体板. 此类型结构在船舶结构上也非常普遍(如船底肋板). 板侧均布拉力 $q=1\text{ MPa}$.

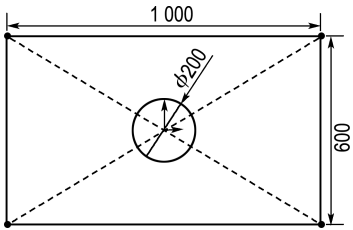


图 4 开孔平直板示意图
Fig. 4 Sketch map of plate with opening hole

本算例中采用节点 749 个,计算得出开孔板的应力分布云图见图 5(a). 与 FEM 计算的应力分布云图(图 5(b))相比较发现,应力分布是一致的.

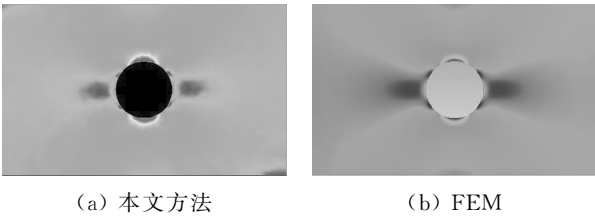


图 5 本文方法与 FEM 计算应力云图(开孔板)
Fig. 5 The stress fringe with method in this paper and FEM (plate with opening hole)

为了进一步验证本文方法的正确性,将本文方法计算结果与 FEM 计算结果进行比较. 方便起见,算例仅对比板 Y 方向中线截面上正应力分布情况和沿板 X 方向中线截面上位移变化,结果见图 6、7. FEM 的位移相对误差范数最大为 2.5%、应力误差范数最大为 2.4%,而本文方法的位移相对误差范数为 0.30%、应力误差范数最大为 0.28%,可见本文方法的计算精度具有明显的优势.

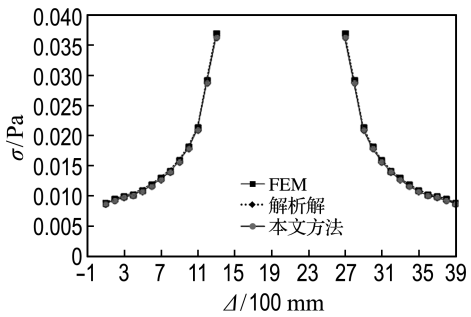


图 6 板 Y 方向中线截面上正应力变化
Fig. 6 Mises stress along the Y-direction in the middle section of plate

为了进一步了解本文方法的正确性,下面给出沿板中线 X 方向上使用 FEM 和本文方法计算的位移相对误差范数变化图,如图 8 所示. 由图 8 和前

面的分析可以看出本文方法具有良好的计算精度。

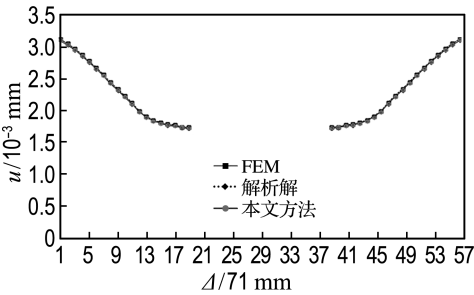


图 7 板 X 方向中线截面上位移变化图

Fig. 7 Deformation along the X-direction in the middle section of plate

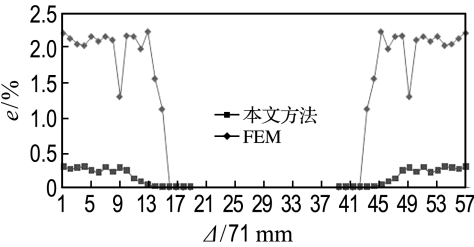


图 8 位移相对误差范数

Fig. 8 The relative error norm of the displacement

5.3 裂纹板

在船舶结构分析中存在着大量的疲劳分析,对疲劳的直接结果——裂纹处的应力分析尤显重要. 给出一个典型裂纹板的形式:板的上下为自由端,其两侧承受均匀拉力,板沿 Y 方向中间有裂纹,如图 9 所示.

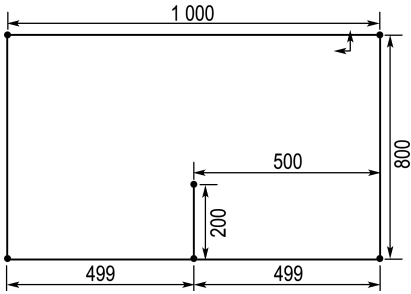


图 9 平直裂纹板结构

Fig. 9 Structure of the plate with crack

本算例中采用节点 947 个,计算得出裂纹板的应力分布云图见图 10(a). 与 FEM 计算的应力分布云图(图 10(b))相比较,发现应力分布是一致的.

为了进一步验证本文方法的正确性,将本文方法计算结果与 FEM 计算结果进行比较. 方便

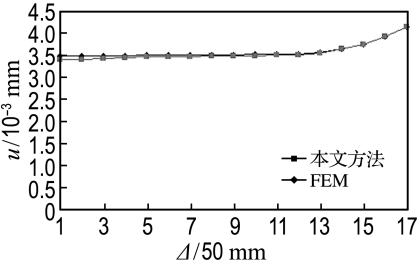
起见,算例对沿板裂纹方向的应力和位移情况进行比较和分析,结果见图 11. FEM 法的位移相对误差范数最大为 3.5%、应力误差范数最大为 3.7%,而本文方法的位移相对误差范数最大为 0.45%、应力误差范数最大为 0.57%,计算的相对误差在 2.5% 以下,可见本文方法的计算精度具有明显的优势.



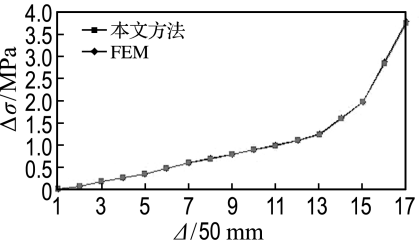
(a) 本文方法 (b) FEM

图 10 本文方法与 FEM 计算应力云图(裂纹板)

Fig. 10 The stress fringe with method in this paper and FEM (plate with crack)



(a) 位移变化



(b) 正应力变化

图 11 沿裂纹方向位移和正应力变化

Fig. 11 The deformation and Mises stress along crack line direction

6 结 语

本文首先选用具有紧支性和正交性特征的 Daubechies 小波尺度函数以张量积的形式来构造船舶二维结构的近似表达. 然后采用增量法对构建的船舶二维结构的 Daubechies 无网格函数进行迭代求解. 最后运用所提方法对船舶典型结构——梁结构和开孔板进行计算,同时分析了裂纹板的位移场和应力场,并把计算结果与有限元法(FEM)进行比较,得出应用本文提出的无网格

分析方法来求解船舶结构的变形(位移)和应力是可行的结论.

参考文献:

- [1] 孙丽萍, 李力波. 船舶结构有限元分析[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2013.
SUN Li-ping, LI Li-bo. **Finite Element Analysis of Ship Structures** [M]. Harbin: Harbin Engineering University Press, 2013. (in Chinese)
- [2] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, *et al.* Meshless methods: An overview and recent developments [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1996, **139**(1-4):3-47.
- [3] Liu W K, Hao S, Belytschko T, *et al.* Multiple scale meshless methods for damage fracture and localization [J]. **Computational Materials Science**, 1999, **16**:197-206.
- [4] Atluri S N, SHEN Sheng-ping. The basis of meshless domain discretization: the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method [J]. **Advances in Computational Mathematics**, 2005, **23**(1-2):73-93.
- [5] Oden J T, Duarte C A M, Zienkiewicz O C. A new cloud-based *hp* finite element method [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1998, **153**(1-2):117-126.
- [6] Amaratunga K, Williams J R. Wavelet-Galerkin solution of boundary value problems [J]. **Archives of Computational Methods in Engineering**, 1997, **4**(3):243-285.
- [7] Bertoluzza S. An adaptive collocation method based on interpolating wavelets [M] // Dahmen W, Kurdila A J, Oswald P, eds. **Multiscale Wavelet Methods for Partial Differential Equations**. San Diego: Academic Press, 1997.
- [8] Cohen A, Masson R. Wavelet methods for second order elliptic problems, preconditioning and adaptivity [J]. **SIAM Journal of Scientific Computing**, 1999, **21**(3):1006-1026.
- [9] Monasse P, Perrier V. Orthonormal wavelet bases adapted for partial differential equations with boundary conditions [J]. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, 1998, **29**(4):1040-1065.
- [10] Kim Jae-eun, Jang Gang-won, Kim Yoon-young. Adaptive multiscale wavelet-Galerkin analysis for plane elasticity problems and its application to multiscale topology design optimization [J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2003, **40**(23):6473-6496.
- [11] Mallat S G. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(r)$ [J]. **Transactions of the American Mathematical Society**, 1989, **315**(1):69-87.
- [12] Chui C K, Quak E. Wavelets on a bounded interval [M] // Braess D, Schumaker L L, eds. **Numerical Methods of Approximation Theory**. Basel: Birkhäuser, 1992:1-24.

Study of meshless analysis method for ship structures based on Daubechies wavelet basis theory

CHEN Jian-ping^{*1,2}, TANG Wen-yong¹

(1. School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;
2. School of Ship Engineering, Guangzhou Maritime Institute, Guangzhou 510725, China)

Abstract: A new meshless analysis method is proposed using Daubechies wavelet scaling function to approximate the field function of ship structure. Firstly, Daubechies wavelet with compact support and orthogonality feature is chosen as the basis function, and using the wavelet scaling function with the tensor product form, the approximate expression of the two-dimensional ship structure is constructed and the complexity of solving problem is reduced. And then, by the incremental method, the field function of the two-dimensional ship structure is solved iteratively with the meshless field function of Daubechies wavelet. Finally, typical examples of ship structures are selected, and the calculation results are compared with those of the finite element method (FEM) to verify the validity of the proposed method.

Key words: ship structural analysis; Daubechies wavelet basis; scaling function; meshless method; 2D elastic problem