第55卷第6期 大 连 理 工 大 学 学 报 Vol. 55, No. 6
2015年11月 Journal of Dalian University of Technology Nov. 2015

文章编号：1000-8608(2015)06-0657-04

k-阶圈链 $Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k})$ Hosoya 指标最大值

任胜章*[1,2]， 邓方安[1]， 许晓阳[1]， 李 坤[1]， 陕 萍[1]

（1. 陕西理工学院 数学与计算机科学学院，陕西 汉中 723000；
2. 兰州大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730000）

摘要： 图族 k-阶圈链 $Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k})$ 是 n 个顶点的图，由 k 个圈 $C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k}$ 通过使相邻两个圈 C_i 和 $C_{i+1}(i=1,2,\cdots,k-1)$ 分别被路 P_2 的两个顶点点粘接而得到. 通过对图族 k-阶圈链 $Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k})$ 的 Hosoya 指标进行研究，刻画出该类图族的 Hosoya 指标取得最大值的图是 $Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_{n-4(k-1)})$.

关键词： 独立集；匹配集；Hosoya 指标

中图分类号： O157.5 **文献标识码：** A **doi：** 10.7511/dllgxb201506015

0 引 言

设图 $G=(V,E)$ 是简单的连通无向图，且 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别是它的顶点集和边集. 对图 G 的任意两条边 e_1 和 e_2，如果它们不相邻，则称它们是相互独立的. 一个边集 $E(G)$ 的子集 M，如果它的任意两条边都相互独立，则称它是图 G 的一个匹配集. 用 $m(G)$ 表示图 G 的匹配集的个数，在化学中 $m(G)$ 也被称为 Hosoya 指标，此指标与化学分子的许多物理和化学性质密切相关，如分子的熔点、沸点等. 图族 k-阶圈链 $Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k})$ 是 n 个顶点的图，由 k 个圈 $C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k}$ 通过使相邻两个圈 C_i 和 $C_{i+1}(s_i\geqslant 3,i=1,2,\cdots,k-1)$ 分别被路 P_2 的两个顶点点粘接而得到；图族 $Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\})$ 是由 k-阶圈链 $Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k})$ 的圈 C_{s_k} 的顶点 $u_i(i=1,2,\cdots,s_k-1)$ 处点粘接 P_2，然后在 P_2 的另一个顶点 v 处同时点粘接两条路 P_{l_1}、P_{l_2} 得到. 本文通过对图族 k-阶圈链 $Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k})$ 的 Hosoya 指标进行研究，刻画出该类图族的 Hosoya 指标取得最大值时的图. 在本文中没有给出的术语、记号可参见文献[1].

1 基本引理

引理 1[1] 设图 G_1 和 G_2 是图 G 的两个连通分支，则有 $m(G)=m(G_1)m(G_2)$.

引理 2[2] 设图 G 是简单的连通图，对任意的顶点 $u,v\in V(G)$ 且 u,v 在 G 中相邻，则有 $m(G)=m(G-uv)+m(G-u-v)$.

引理 3[3] 设 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，并且 $F(n)$ 和 $L(n)$ 分别为 Fibonacci 数列和 Lucas 数列（参见文献[4、5]），则有

(1) $F(n)=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$，$L(n)=\alpha^n+\beta^n$；

(2) $F(n)F(m)=\dfrac{1}{5}(L(n+m)-(-1)^nL(m-n))$；

(3) $L(n)F(m)=F(n+m)-(-1)^mF(n-m)=F(n+m)+(-1)^nF(m-n)$；

(4) $L(n)L(m)=L(n+m)+(-1)^nL(m-n)$.

2 主要结论

定理 1 设图族 $Q(C_m,P_2,C_{n-m})$ 是顶点数为 n 的 2 阶圈链，则有 $m(Q(C_m,P_2,C_{n-m}))\leqslant$

收稿日期： 2015-07-09； **修回日期：** 2015-09-30.
基金项目： 陕西省教育厅资助项目(15JK1135)；甘肃省人社厅博士后择优资助项目(GSRST141210)；陕西理工学院科研基金资助项目(SLGQD14-14).
作者简介： 任胜章*(1980-)，男，博士，在站博士后，副教授，E-mail：renshengzhang1980@163.com.

$m(Q(C_4,P_2,C_{n-4}))$成立，当且仅当$Q(C_m,P_2,C_{n-m})\cong Q(C_4,P_2,C_{n-4})$.

证明 由Hosoya指标的定义和引理1～3得到

$$m(Q(C_m,P_2,C_{n-m}))=$$
$$L(m)L(n-m)+F(m)F(n-m)=$$
$$L(n)+(-1)^m L(n-2m)+\frac{1}{5}(L(n)-$$
$$(-1)^m L(n-2m))=$$
$$\frac{6}{5}L(n)+(-1)^m\ \frac{4}{5}L(n-2m)$$

由上式可知：当$m=4$时，图族$Q(C_m,P_2,C_{n-m})$的Hosoya指标取得最大值，所以定理的结论成立.

定理2 设图族$Q(C_m,P_2,C_{n-m},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\})$是圈上的顶点数为$n$的2阶圈链，则有$m(Q(C_m,P_2,C_{n-m},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\}))\leqslant m(Q(C_4,P_2,C_{n-4},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\}))$成立，当且仅当$Q(C_m,P_2,C_{n-m},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\})\cong Q(C_4,P_2,C_{n-4},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\})$.

证明 由Hosoya指标的定义和引理1～3得到

$$m(Q(C_m,P_2,C_{n-m},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\}))=$$
$$L(m)[L(n-m)F(l_1+l_2)+F(n-m)\times$$
$$F(l_1)F(l_2)]+F(m)[F(n-m)F(l_1+l_2)+$$
$$F(i+1)F(n-m-i-1)F(l_1)F(l_2)]=$$
$$F(l_1+l_2)[L(n)+(-1)^m L(n-2m)]+$$
$$F(l_1)F(l_2)[F(n)+(-1)^m F(n-2m)]+$$
$$\frac{1}{5}F(l_1+l_2)[L(n)-(-1)^m L(n-2m)]+$$
$$\frac{1}{5}F(l_1)F(l_2)[F(i+1)L(n-i-1)-$$
$$(-1)^m F(i+1)L(n-2m-i-1)]=$$
$$\frac{1}{5}\{F(l_1+l_2)[6L(n)+4(-1)^m L(n-2m)]+$$
$$F(l_1)F(l_2)[6F(n)+4(-1)^m F(n-2m)+$$
$$(-1)^i F(n-2i-2)-(-1)^i F(n-2m-$$
$$2i-2)]\}$$

由上式可知：当$m=4,i=0$时，图族$Q(C_m,P_2,C_{n-m},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\})$的Hosoya指标取得最大值.

用$a_{4,k}$、$b_{4,k}$分别表示k个圈的$Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_4)$图和$Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_4,P_2,v,\{P_1,P_3\})$图的Hosoya指标，则有下列定理成立.

定理3 设图$Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_4)$和$Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_4,P_2,v,\{P_1,P_3\})$的顶点数分别是$4k$和$4k+3$的$k$-阶圈链（参见图1），则有

(1)$a_{4,k}=7a_{4,k-1}+3b_{4,k-2}$；

(2)$b_{4,k}=3a_{4,k}+2b_{4,k-1}$.

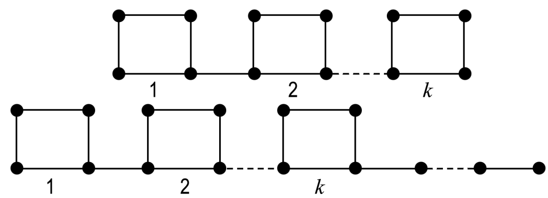

图1 k-阶圈链

Fig.1 k-th circles

证明 由引理1、2及Hosoya指标的定义易证.

定理4 设图族$Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\})$是圈的顶点数为$n$的$k$-阶圈链，则有$m(Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\}))\leqslant m(Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_{n-4(k-1)},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\}))$成立，当且仅当$Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\})\cong Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_{n-4(k-1)},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\})$.

证明 （归纳法）证明方法和思路与下面的定理5相似，易证.

定理5 设图族$Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k})$是$n$个顶点的$k$-阶圈链（参见图2），则有$m(Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k}))\leqslant m(Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_{n-4(k-1)}))$成立，当且仅当$Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k})\cong Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_{n-4(k-1)})$.

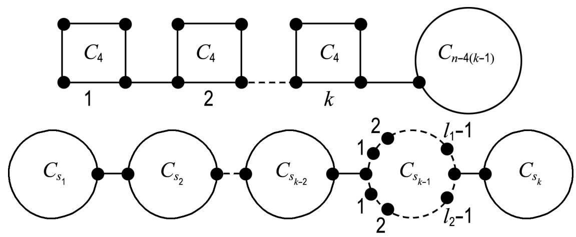

图2 n个顶点的k-阶圈链

Fig.2 k-th circles with n vertexes

证明 （归纳法）当圈链的阶数为2时，由定理1可知，结论成立.假设定理5的结论对圈链的阶数小于k的自然数都成立.在图2的标记中，假设$l_1-1\geqslant 1$，$l_2-1\geqslant 1$，那么当阶数为k时，由

Hosoya 指标的定义及引理 1～3 和定理 4 得到

$$
\begin{aligned}
&m(Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k}))\leqslant\\
&a_{4,k-2}[L(s_k)L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}-4(k-2))]+\\
&b_{4,k-3}[L(s_k)F(s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}-4(k-2))]+\\
&a_{4,k-3}[F(s_k)L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4(k-3))\times\\
&F(l_1+l_2)+F(s_k)F(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-\\
&4(k-3))F(l_1)F(l_2)]+b_{4,k-4}[F(l_1+l_2)F(s_k)\times\\
&F(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4(k-3))+F(l_1)F(l_2)\times\\
&F(s_k)F(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4(k-3)-1)]=\\
&a_{4,k-2}[L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}+s_k-4(k-2))+\\
&(-1)^{s_k}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}-s_k-4(k-2))]+\\
&\frac{1}{5}b_{4,k-3}[L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}+s_k-4(k-2)+\\
&2)-L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}+s_k-4(k-2)-2)+\\
&(-1)^{s_k}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}-s_k-4(k-2)+2)-\\
&(-1)^{s_k}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}-s_k-4(k-2)-\\
&2)]+\frac{1}{5}a_{4,k-3}\{L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k+s_{k-1}-\\
&4(k-3))-(-1)^{s_{k-1}}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k-\\
&s_{k-1}-4(k-3))-(-1)^{s_k}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-\\
&s_k+s_{k-1}-4(k-3))+(-1)^{s_k+s_{k-1}}L(s_1+s_2+\cdots+\\
&s_{k-2}-s_k-s_{k-1}-4(k-3))+F(l_1)F(l_2)[L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k-4(k-3))-(-1)^{s_k}L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_{k-2}-s_k-4(k-3))]\}+\frac{1}{25}b_{4,k-4}\{L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k+s_{k-1}-4(k-3)+2)-L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k+s_{k-1}-4(k-3)-2)-\\
&(-1)^{s_{k-1}}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k-s_{k-1}-\\
&4(k-3)+2)+(-1)^{s_{k-1}}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}+\\
&s_k-s_{k-1}-4(k-3)-2)-(-1)^{s_k}L(s_1+s_2+\cdots+\\
&s_{k-2}-s_k+s_{k-1}-4(k-3)+2)+(-1)^{s_k}L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_{k-2}-s_k+s_{k-1}-4(k-3)-2)+\\
&(-1)^{s_k+s_{k-1}}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-s_k-s_{k-1}-\\
&4(k-3)+2)-(-1)^{s_k+s_{k-1}}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-\\
&s_k-s_{k-1}-4(k-3)-2)+5F(l_1)F(l_2)[L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k-4(k-3)-1)-(-1)^{s_k}L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_{k-2}-s_k-4(k-3)-1)]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&m(Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_{n-4(k-1)}))=\\
&a_{4,k-1}L(s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1))+\\
&b_{4,k-2}F(s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1))=\\
&a_{4,k-2}[7L(s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1))+\\
&3F(2)F(s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1))]+\\
&b_{4,k-3}[3L(s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1))+\\
&2F(2)F(s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1))]=\\
&\frac{1}{5}a_{4,k-2}[35L(s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1))+\\
&3L(s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1)+2)-3L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_k-4(k-1)-2)]+\frac{1}{5}b_{4,k-3}\times\\
&[15L(s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1))+2L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_k-4(k-1)+2)-2L(s_1+s_2+\cdots+\\
&s_k-4(k-1)-2)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&m(Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_{n-4(k-1)}))-\\
&m(Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k}))\geqslant\\
&\frac{1}{5}a_{4,k-2}[35L(s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1))+\\
&3L(s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1)+2)-3L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_k-4(k-1)-2)-5L(s_1+s_2+\cdots+\\
&s_{k-1}+s_k-4(k-2))-5(-1)^{s_k}L(s_1+s_2+\cdots+\\
&s_{k-1}-s_k-4(k-2))]+\frac{1}{5}b_{4,k-3}[15L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_k-4(k-1))+2L(s_1+s_2+\cdots+s_k-\\
&4(k-1)+2)-2L(s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1)-\\
&2)-L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}+s_k-4(k-2)+2)+\\
&L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}+s_k-4(k-2)-2)-\\
&(-1)^{s_k}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}-s_k-4(k-2)+2)+\\
&(-1)^{s_k}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-1}-s_k-4(k-2)-\\
&2)]-\frac{1}{5}a_{4,k-3}\{L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k+s_{k-1}-\\
&4(k-3))-(-1)^{s_{k-1}}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k-\\
&s_{k-1}-4(k-3))-(-1)^{s_k}L(s_1+s_2+\cdots+\\
&s_{k-2}-s_k+s_{k-1}-4(k-3))+(-1)^{s_k+s_{k-1}}L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_{k-2}-s_k-s_{k-1}-4(k-3))+F(l_1)\times\\
&F(l_2)[L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k-4(k-3))-\\
&(-1)^{s_k}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-s_k-4(k-3))]\}-\\
&\frac{1}{25}b_{4,k-4}\{L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k+s_{k-1}-4(k-\\
&3)+2)-L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k+s_{k-1}-4(k-\\
&3)-2)-(-1)^{s_{k-1}}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k-\\
&s_{k-1}-4(k-3)+2)+(-1)^{s_{k-1}}L(s_1+s_2+\cdots+\\
&s_{k-2}+s_k-s_{k-1}-4(k-3)-2)-(-1)^{s_k}L(s_1+\\
&s_2+\cdots+s_{k-2}-s_k+s_{k-1}-4(k-3)+2)+\\
&(-1)^{s_k}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-s_k+s_{k-1}-4(k-\\
&3)-2)+(-1)^{s_k+s_{k-1}}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-s_k-\\
&s_{k-1}-4(k-3)+2)-(-1)^{s_k+s_{k-1}}L(s_1+s_2+\cdots+\\
&s_{k-2}-s_k-s_{k-1}-4(k-3)-2)+5F(l_1)F(l_2)\times\\
&[L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}+s_k-4(k-3)-1)-\\
&(-1)^{s_k}L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-s_k-4(k-3)-1)]\}
\end{aligned}
$$

由图2的标记方法及假设可知 $l_1+l_2=s_{k-1}$，$l_1\geqslant 2, l_2\geqslant 2, s_i\geqslant 3(i=1,2,\cdots,k)$，所以

$$m(Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_{n-4(k-1)}))-m(Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k}))\geqslant \frac{1}{5}a_{4,k-3}[292L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+12)+30L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+14)-30L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+10)-36L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+16)-34L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+8)-3L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+18)+3L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+6)-L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+20)-L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+4)]+\frac{1}{25}b_{4,k-4}[675L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+12)+77L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+14)-77L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+10)-75L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+16)-75L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+8)-9L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+18)+9L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+6)-L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+22)+L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+2)-5L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+15)+5L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+7)]=\frac{1}{5}a_{4,k-3}[21L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+9)+11L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+8)+3L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+5)+2L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+4)]+\frac{1}{25}b_{4,k-4}[55L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+9)+31L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+8)+5L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+7)+9L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+6)+L(s_1+s_2+\cdots+s_{k-2}-4k+2)]\geqslant 0$$

由上面两个证明过程可知，当 k 取遍所有大于1的自然数时，结论都成立.

3 结 语

本文以定理4的形式刻画出了 k-阶圈链图族 $Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k},P_2,v,\{P_{l_1},P_{l_2}\})$ 的 Hosoya 指标取得最大值时的图，并在定理4的基础上刻画出了 k-阶圈链图族 $Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k})$ 的 Hosoya 指标取得最大值时的图是 $Q(C_4,P_2,C_4,\cdots,P_2,C_{n-4(k-1)})$.

参考文献：

[1] Bondy J A, Murty U S R. **Graph Theory with Application** [M]. New York: North Holland, 1976.

[2] Simmons H, Merrifield R E. **Topological Methods in Chemistry** [M]. New York: Wiley-Interscience, 1989.

[3] Zhao H, Li X. On the Fibonacci numbers of trees [J]. **The Fibonacci Quarterly**, 2006, **44**(1):32-38.

[4] Prodinger H, Tichy R F. Fibonacci numbers of graphs [J]. **The Fibonacci Quarterly**, 1982, **20**(1):16-21.

[5] REN Sheng-zhang, HE Wan-sheng. The study of σ index on $Q(P_k; C_{s_1}, C_{s_2}, \cdots, C_{s_k})$ graphs [J]. **Scientia Magna**, 2008, **4**(4):1-14.

The largest Hosoya index of k-th $Q(C_{s_1},P_2,C_{s_2},\cdots,P_2,C_{s_k})$ graphs

REN Sheng-zhang*[1,2], DENG Fang-an[1], XU Xiao-yang[1], LI Kun[1], SHAN Ping[1]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Shaanxi University of Technology, Hanzhong 723000, China;
2. School of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract: Let the k-th $Q(C_{s_1}, P_2, C_{s_2}, \cdots, P_2, C_{s_k})$ graphs with n vertexes be obtained from k circles $C_{s_1}, C_{s_2}, \cdots, C_{s_k}$ by sticking two vertexes of adjacent circles C_i and $C_{i+1}(i=1,2,\cdots,k-1)$ with path P_2. It is shown that the graph achieving the largest bound of Hosoya index of the k-th $Q(C_{s_1}, P_2, C_{s_2}, \cdots, P_2, C_{s_k})$ graphs is $Q(C_4, P_2, C_4, \cdots, P_2, C_{n-4(k-1)})$ graph by researching into the Hosoya indexes of those graphs.

Key words: independent set; matching set; Hosoya index