第56卷第1期
2016年1月
大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology
Vol. 56, No. 1
Jan. 2016

文章编号：1000-8608(2016)01-0064-06

# 索赔盈余风险模型中精确大偏差

华志强*[1,2]，宋立新[2]，冯敬海[2]，齐晓梦[2]

（1.内蒙古民族大学 数学学院，内蒙古 通辽 028000；
2.大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024）

**摘要：** 考虑了控制变化族($D$族)上索赔过程与保费过程构成的索赔盈余风险模型，研究了此风险模型中带相依关系的随机变量的非随机和与随机和的尾概率渐近问题，利用求相依不同分布的随机变量的非随机和与随机和的精确大偏差方法，得到了带上延拓负相依和$\phi$混合相依关系的不同分布的随机变量构成的索赔风险模型中的非随机和与随机和的精确大偏差渐近的结论，最后建立了索赔盈余风险模型中精确大偏差的渐近公式.

**关键词：** 精确大偏差；上延拓负相依；索赔过程
**中图分类号：** O211.4 **文献标识码：** A **doi：** 10.7511/dllgxb201601010

## 0 引言

极端事件的发生对大型企业及保险公司会产生致命的伤害，甚至会导致公司的破产，例如2014年马来西亚航空公司的两次飞机空难事件就导致了公司的破产. 在保险风险理论中，常用重尾分布来刻画极端事件，而大偏差理论是研究重尾分布的非常有用的工具. 研究重尾分布族上的大偏差理论，有利于估计大型企业及保险公司的破产概率，使得大型企业及保险公司更好地进行风险调控. 称随机变量$X$(或分布$F$)是服从重尾分布的，如果该随机变量不存在指数矩. 重尾分布族包含了控制变化族($D$族)等，本文主要研究$D$族上相依索赔盈余风险模型中的精确大偏差，其中称随机变量$X$的分布$F$是属于$D$族的，若对于任意的$y\in(0,1)$，$\limsup\limits_{x\to\infty}\overline{F}(xy)/\overline{F}(x)<\infty$成立. 为了叙述方便，引入一些记号. 设$f_1(x,t)$和$f_2(x,t)$是两个二元函数，当$\lim\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{x\in\Delta}|(f_1(x,t)/f_2(x,t))-1|=0$时，记为$f_1(x,t)\sim f_2(x,t)$；当$\liminf\limits_{t\to\infty}\inf\limits_{x\in\Delta}f_1(x,t)/f_2(x,t)\geqslant 1$时，记为$f_1(x,t)\gtrsim f_2(x,t)$；当$\limsup\limits_{t\to\infty}\sup\limits_{x\in\Delta}f_1(x,t)/f_2(x,t)\leqslant 1$时，记为$f_1(x,t)\lesssim f_2(x,t)$，这里$\Delta$是关于$t$的某个区域. 设$f_3(x)$和$f_4(x)$是两个一元函数，当$\lim\limits_{x\to\infty}f_3(x)/f_4(x)=1$时，记$f_3(x)\sim f_4(x)$；当$\lim\limits_{x\to\infty}f_3(x)/f_4(x)=0$时，记$f_3(x)=o(f_4(x))$. 对于任意的实数$x$，记$[x]$为不超过$x$的最大整数. 记$\overline{F}_*(y):=\liminf\limits_{x\to\infty}\overline{F}(xy)/\overline{F}(x)$，$L_F=\lim\limits_{y\downarrow 1}\overline{F}_*(y)$，$\gamma_F^+:=\inf\{-\log\overline{F}_*(y)/\log y: y>1\}$. 由文献[1]可得如下等价结论：(1)$F\in D$；(2)$0<L_F\leqslant 1$；(3)$0\leqslant\gamma_F^+<\infty$.

设$\{X_k,k\geqslant 1\}$是一个重尾上服从不同分布的随机变量序列，其各自对应的分布为$F_k(x)$，存在各自相应的有限的均值$\mu_k$，记$\overline{F}_k(x)=1-F_k(x)$. 在保险风险模型中，$\{X_k,k\geqslant 1\}$常常表示索赔过程. 设$\{N_t,t\geqslant 0\}$是一个与$\{X_k,k\geqslant 1\}$相互独立的、取非负的整数值的计数过程，对于任意的$t\geqslant 0$有$E(N_t)=\lambda(t)$，当$t\to\infty$时有$\lambda(t)\to\infty$. 记$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$和$S_{N_t}=\sum\limits_{k=1}^{N_t}X_k$为$\{X_k,k\geqslant 1\}$的非随机和与随机和. 若$\{X_k,k\geqslant 1\}$是一个一致变化族上的、服从不同分布的实值随机变量序列，文献[2]研究了由此随机变量序列构成的延拓负相依的索赔风险模型中的非随机和与随机和的精确大偏差，即对于任意固定的$\gamma>0$，有

**收稿日期：** 2014-12-15； **修回日期：** 2015-11-20.
**基金项目：** 国家自然科学基金资助项目(11371077，11571058)；内蒙古民族大学科学研究基金资助项目(NMDYB1436，NMDYB1437)；中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(DUT15LK19).
**作者简介：** 华志强*(1981-)，男，博士生，讲师，E-mail：huazhiqiang1981@mail.dlut.edu.cn；宋立新(1966-)，男，教授，博士生导师，E-mail：lxsong@dlut.edu.cn.

$$P(S_n-n\mu>x)\sim n\overline{F}(x)$$

和

$$P(S_{N_t}-\mu\lambda(t)>x)\sim\lambda(t)\overline{F}(x)$$

成立，其中分布 $F$ 满足：存在某个实数 $T>0$，当 $n\to\infty$ 时，对于任意的 $x\geqslant T$ 一致地有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k(x)\sim\overline{F}(x)$$

和

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F_k(-x)\sim F(-x)$$

若 $\{X_k,k\geqslant1\}$ 是一个一致变化族上的、服从不同分布的非负实值随机变量序列，且随机变量之间的关系满足上延拓负相依和 $\phi$ 混合时，文献[3]给出了由此随机变量序列构成的索赔风险模型中的非随机和的渐近尾概率的结论，并获得了随机和的精确大偏差. 设 $\{M_t,t\geqslant0\}$ 是一个严平稳的更新计数过程，$\{Y_k,k\geqslant1\}$ 是一个取值非负同分布的、负相依的随机变量序列. 在文献[4]中引入了一个推广的相依聚合更新风险模型：

$$S(t)=\sum_{k=1}^{N_t}X_k-\sum_{k=1}^{M_t}Y_k;\ t\geqslant0$$

称此风险模型为索赔盈余模型，其中用 $\{Y_k,k\geqslant1\}$ 来表示保费过程，而 $\{S(t),t\geqslant0\}$ 代表了索赔盈余过程. 在此基础上，当索赔过程 $\{X_k,k\geqslant1\}$ 是一个 $D$ 族上的、服从不同分布的非负实值随机变量序列，且随机变量之间的关系满足延拓负相依和 $\phi$ 混合时，本文讨论索赔盈余风险模型中 $D$ 族上随机变量和的精确大偏差，对文献[4]中的相应结论进行推广.

# 1　预备知识

**定义 1**[2]　称 $\{X_k,k\geqslant1\}$ 是一个上延拓负相依的随机变量序列，如果对于每一个 $k=1,2,\cdots$，以及任意的实数 $x_1,x_2,\cdots$，存在某个 $M>0$，有 $P(X_1>x_1,\cdots,X_k>x_k)\leqslant MP(X_1>x_1)\cdots P(X_k>x_k)$ 成立；若 $P(X_1\leqslant x_1,\cdots,X_k\leqslant x_k)\leqslant MP(X_1\leqslant x_1)\cdots P(X_k\leqslant x_k)$ 成立，则称 $\{X_k,k\geqslant1\}$ 是下延拓负相依的；若上述两式同时成立，称 $\{X_k,k\geqslant1\}$ 是延拓负相依的.

**定义 2**[3]　称 $\{X_k,k\geqslant1\}$ 是一个 $\phi$ 混合的随机变量序列，若当 $n\to\infty$ 时有 $\phi(n)=\sup\limits_{k\geqslant1}\phi(\mathbf{F}_1^k,\mathbf{F}_{n+k}^{\infty})\to0$，$\phi(A,B)=\sup\limits_{A\in\mathscr{A}_1,B\in\mathscr{A}_2,P(A)>0}|P(B|A)-P(B)|$，$\mathbf{F}_1^k=\sigma(X_i,1\leqslant i\leqslant k)$，$\mathbf{F}_{n+k}^{\infty}=\sigma(X_i,i\geqslant n+k)$.

通常地，$\phi(n)$ 是一个递减函数.

**命题 1**[5]　设 $\{X_k,k\geqslant1\}$ 是一个 $\phi$ 混合的随机变量序列，且混合速度满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\phi^{1/2}(2^i)<\infty$. 设存在随机变量 $X$，存在某个 $\tau\in[1,2)$ 及 $T>0$，使得 $E|X|^{\tau}<\infty$，且对于任意的 $x\geqslant T$ 及任意的 $i=1,2,\cdots$，都有 $P(|X_i|\geqslant x)\leqslant P(|X|\geqslant x)$，则 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-E(X_i))=o(n^{-(1-1/\tau)})$，a. s.

**命题 2**[6]　设 $\{X_k,k\in\mathbf{Z}\}$ 是一个 $\phi$ 混合的随机变量序列，若存在 $X\in\mathbf{F}_{-\infty}^{i}$，$Y\in\mathbf{F}_{n+i}^{\infty}$，及正数 $C$，且满足 $E|X|<\infty$，$E|Y|\leqslant C$，则有 $|E(XY)-E(X)E(Y)|\leqslant2C\phi(n)E|X|$.

**命题 3**[7]　$\{X_k,k\geqslant1\}$ 是一个延拓负相依的、取值非负同分布的随机变量序列，其共同分布为 $F$，数学期望为 $\mu$. 对于任意的正整数 $n$，记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$，则当 $n\to\infty$ 时有 $S_n/n\to\mu$，a. s.

# 2　*D* 族上索赔风险模型中的精确大偏差

**定理 1**　设 $\{X_k,k\geqslant1\}$ 是一个非负的、上延拓负相依的和 $\phi$ 混合的随机变量序列，其对应的分布函数列为 $\{F_k,k\geqslant1\}$，对应的数学期望为 $\{\mu_k,k\geqslant1\}$，且混合速度满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\phi^{1/2}(2^i)<\infty$. 设存在非负的随机变量 $X$，其分布函数 $F\in D$，数学期望为 $\overline{\mu}$，且 $\{F_k,k\geqslant1\}$ 与 $F$ 满足以下假设条件：

(1) $\{F_k,k\geqslant1\}$ 与 $F$ 满足假设条件 A1：存在某个 $T>0$，使得当 $n\to\infty$ 时对 $x\geqslant T$ 一致地有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{F}_k(x)\sim n\overline{F}(x)$，且存在常数 $c\geqslant1$，使得对于 $k=1,2,\cdots,n$，有 $\overline{F}_k(x)\leqslant c\overline{F}(x)$；

(2) $\{\mu_k,k\geqslant1\}$ 与 $\overline{\mu}$ 满足假设条件 A2：当 $n\to\infty$ 时 $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k\sim\overline{\mu}$ 或 $\sup\limits_{n\geqslant1}\mu_n<\infty$.

则对于任意固定的 $\gamma>0$ 和任意的 $q>0$，当 $n\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma n^{1+q}$ 一致地有

$$P(S_n-E(S_n)>x)\gtrsim n\overline{F}(x)L_F$$

和

$$P(S_n-E(S_n)>x)\lesssim n\overline{F}(x)L_F^{-1}$$

**证明**　首先来证明 $P(S_n-E(S_n)>x)\gtrsim n\overline{F}(x)L_F$ 成立. 设 $S_i^j=\sum\limits_{k=i}^{j}X_k$，$j>i$. 对于任意的常数 $m_1>1$，及满足 $0<a<b<1$ 的两个常数 $a$ 和 $b$，当 $n$ 充分大时，对 $x\geqslant\gamma n^{1+q}$ 一致地有

$P(S_n - E(S_n) > x) \geqslant$

$P\left(S_n - \sum_{k=1}^{n} \mu_k > x, \max_{k\in[1,[an]]} X_k > m_1 x\right) =$

$P\left(S_1^{[an]} + S^{[bn]-1}_{[an]+1} + S^n_{[bn]} - \sum_{k=1}^{n} \mu_k > x,\right.$

$\left.\max_{k\in[1,[an]]} X_k > m_1 x\right) \geqslant$

$P\left(S^n_{[bn]} - \sum_{k=1}^{n} \mu_k > x - m_1 x, \max_{k\in[1,[an]]} X_k > m_1 x\right) =$

$E\left(I_{(S^n_{[bn]} - \sum_{k=1}^{n}\mu_k > x - m_1 x)} I_{(\max_{k\in[1,[an]]} X_k > m_1 x)}\right) \geqslant$

$E\left(I_{(S^n_{[bn]} - \sum_{k=1}^{n}\mu_k > x - m_1 x)} - 2\phi([bn]-[an])\right) \times$

$$E\left(I_{(\max_{k\in[1,[an]]} X_k > m_1 x)}\right) \tag{1}$$

这里最后一步用到了命题2.由 $\lim_{n\to\infty}\phi(n)=0$ 及定义2可知,对于任意的 $0<\delta<1/2$,当 $n$ 充分大时就有

$$\phi([bn]-[an]) < \delta/2 \tag{2}$$

当 $\tau=1$ 时,利用命题1,有 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i)) = 0$, a.s. 从而对于任意的 $0<\delta<1/2$,当 $n$ 充分大时,对 $x \geqslant \gamma n^{1+q}$ 有

$$P\left(S^n_{[bn]} - \sum_{k=1}^{n} \mu_k > x - m_1 x\right) \geqslant$$

$$P\left(S^n_{[bn]} - \sum_{k=1}^{n} \mu_k > (1-m_1)\gamma n^{1+q}\right) > 1-\delta \tag{3}$$

根据定义1,有

$$P(\max_{k\in[1,[an]]} X_k > mx) \geqslant$$

$$\sum_{k=1}^{[an]} P(X_k > mx) -$$

$$\sum_{1\leqslant k\neq l\leqslant[an]} P(X_k > mx, X_l > mx) \geqslant$$

$$\sum_{k=1}^{[an]} P(X_k > mx) - M\left(\sum_{k=1}^{[an]} P(X_k > mx)\right)^2 \tag{4}$$

根据假设条件A1,对于任意的 $0<\delta<1/2$,当 $n$ 充分大时,对 $x \geqslant \gamma n^{1+q}$ 有

$$(1-\delta)[an]\overline{F}(m_1 x) \leqslant \sum_{k=1}^{[an]} \overline{F}_k(m_1 x) \leqslant$$

$$(1+\delta)[an]\overline{F}(m_1 x) \tag{5}$$

由式(4)和(5)可得

$$P(\max_{k\in[1,[an]]} X_k > m_1 x) \geqslant (1-\delta)[an]\overline{F}(m_1 x) -$$

$$M[(1+\delta)[an]\overline{F}(m_1 x)]^2 \tag{6}$$

将式(2)、(3)和(6)代入式(1)中,得

$$P(S_n - E(S_n) > x) \geqslant (1-2\delta)[an]\overline{F}(m_1 x) \times$$

$$[1-\delta-M(1+\delta)^2 \times$$

$$[an]\overline{F}(m_1 x)]$$

由 $X$ 的数学期望存在及 $L_F$ 的定义可得

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{x\geqslant\gamma n^{1+\delta}} \frac{P(S_n - E(S_n) > x)}{n\overline{F}(x)} \geqslant$$

$$\lim_{a\uparrow 1}\lim_{m_1\downarrow 1}\liminf_{n\to\infty} \inf_{x\geqslant\gamma n^{1+\delta}} \left(\frac{P(S_n - E(S_n) > x)}{[an]\overline{F}(m_1 x)} \times \right.$$

$$\left.\frac{[an]}{n}\frac{\overline{F}(m_1 x)}{\overline{F}(x)}\right) \geqslant L_F$$

所以 $P(S_n - E(S_n) > x) \gtrsim n\overline{F}(x) L_F$ 成立.

其次,来证明 $P(S_n - E(S_n) > x) \lesssim n\overline{F}(x) \cdot L_F^{-1}$ 成立.对于任意的 $0<m_2<1$ 及 $0<\delta<1/2$,设 $\widehat{X}_k = \min\{X_k, m_2 x\}$, $\widehat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \widehat{X}_k$, $\widehat{x} = x + \sum_{k=1}^{n} \mu_k$,则由文献[3]的命题2可知 $\{\widehat{X}_k, k\geqslant 1\}$ 仍然是上延拓负相依的随机变量序列,由假设条件A1可得

$$P(S_n - E(S_n) > x) \leqslant$$

$$P(\max_{k\in[1,n]} X_k > m_2 x) +$$

$$P(S_n - E(S_n) > x, \max_{k\in[1,n]} X_k \leqslant m_2 x) \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{n} P(X_k > m_2 x) + P(\widehat{S}_n > \widehat{x}) \leqslant$$

$$(1+\delta) n\overline{F}(m_2 x) + P(\widehat{S}_n > \widehat{x})$$

由 $F \in D$ 得 $\lim_{m_2\uparrow 1} \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\geqslant\gamma n^{1+q}} \overline{F}(m_2 x)/\overline{F}(x) \leqslant \lim_{m_2\uparrow 1} \limsup_{x\to\infty} \overline{F}(m_2 x)/\overline{F}(x) = L_F^{-1}$.要想使 $P(S_n - E(S_n) > x) \lesssim n\overline{F}(x) L_F^{-1}$ 成立,只需证明 $\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\geqslant\gamma n^{1+q}} P(\widehat{S}_n > \widehat{x})/n\overline{F}(x) = 0$ 成立即可.令 $b := b_n(x) = -\log(n\overline{F}(m_2 x))$,则 $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geqslant\gamma n^{1+q}} b_n(x) = \infty$.对于给定的正函数

$$h = (b - 2\rho\log b)/m_2 x$$

对于任意的 $0<\delta<1/2$,当 $n$ 充分大时,对 $x \geqslant \gamma n^{1+q}$ 有

$$\frac{P(\widehat{S}_n > \widehat{x})}{n\overline{F}(m_2 x)} \leqslant \exp(-h\widehat{x} + b) M \prod_{k=1}^{n} E\exp(h\widehat{X}_k) \leqslant$$

$$\exp(-h\widehat{x} + b) \times$$

$$M \prod_{k=1}^{n} \left(h\exp(hm_2 x/b^2)\mu_k + \right.$$

$$\left.\exp(hm_2 x)\overline{F}_k(m_2 x/b^2) + 1\right) \leqslant$$

$$\exp(-h\widehat{x} + b) M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(h \times\right.$$

$$\exp(hm_2 x/b^2)\mu_k) +$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\exp(hm_2x)\overline{F}_k(m_2x/b^2)+1\Big)^n\leqslant\exp(-h\hat{x}+b)\times$$
$$M\exp\Big\{\sum_{k=1}^{n}h\exp(hm_2x/b^2)\mu_k+\sum_{k=1}^{n}\exp(hm_2x)\overline{F}_k(m_2x/b^2)\Big\}\leqslant$$
$$M\exp\Big\{\Big(\exp(hm_2x/b^2)-1\Big)\times h\sum_{k=1}^{n}\mu_k+(1+\delta)n\exp(hm_2x)\times\overline{F}(m_2x/b^2)-hx+b\Big\}\leqslant$$
$$M\exp\{(1+\delta)nh(\exp(hm_2x/b^2)-1)\overline{\mu}+(1+\delta)B\exp(hm_2x-b+2\rho\log b)-hx+b\}=$$
$$M\exp((1+\delta)B)\exp\Big\{\frac{b-2\rho\log b}{m_2x}\times(\exp((b-2\rho\log b)/b^2)-1)n(1+\delta)\overline{\mu}+\frac{2\rho\log b}{m_2}+\Big(1-\frac{1}{m_2}\Big)b\Big\}$$

其中第1步用到了切比雪夫不等式及定义1；第3步用到了不等式 $c_1c_2\cdots c_n\leqslant[(c_1+c_2+\cdots+c_n)/n]^n$；第4步用到了不等式 $1+x\leqslant\exp x$；第5步用到了假设条件A1和A2；第6步用到了文献[3]的命题1(2)，此处 $B$ 是一个正数. 由于

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma n^{1+q}}\Big[\frac{b-2\rho\log b}{m_2x}\Big(\exp((b-2\rho\log b)/b^2)-1\Big)n(1+\delta)\overline{\mu}+\frac{2\rho\log b}{m_2}\Big]\Big/b=0$$

所以就有

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma n^{1+q}}\frac{P(\hat{S}_n>\hat{x})}{n\overline{F}(x)}\leqslant$$
$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{x\geqslant\gamma n^{1+q}}M\exp B\exp\Big\{o(b)+\Big(1-\frac{1}{m_2}\Big)b\Big\}\frac{\overline{F}(m_2x)}{\overline{F}(x)}=0$$

故 $P(S_n-E(S_n)>x)\lesssim n\overline{F}(x)L_F^{-1}$ 成立，定理得证.

**定理2**　设 $X$、$\{X_k,k\geqslant1\}$ 满足定理1的条件，$\{N_t,t\geqslant0\}$ 是一个与 $\{X_k,k\geqslant1\}$ 相互独立的、取非负的整数值的计数过程，对于任意的 $t\geqslant0$ 有 $E(N_t)=\lambda(t)$，当 $t\to\infty$ 时有 $\lambda(t)\to\infty$，且 $\{N_t,t\geqslant0\}$ 满足假设条件A3：对于任意的 $p>\gamma_F^+$ 及 $\delta>0$，有 $E((N_t)^pI_{(N_t>(1+\delta)\lambda(t))})=O(\lambda(t))$. 则对于任意固定的 $\gamma>0$ 和任意的 $q>0$，当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+q}$ 一致地有

$$P(S_{N_t}-E(S_{N_t})>x)\gtrsim\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^2$$

和

$$P(S_{N_t}-E(S_{N_t})>x)\lesssim\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^{-2}$$

**证明**　采用类似于文献[3]中定理1的证明方法来证明. 设 $\delta$ 是取值在(0,1)的任意正数. 假设条件A3意味着当 $t\to\infty$ 时

$$N_t/\lambda(t)\xrightarrow{P}1\tag{7}$$

且文献[3]中引理1的结论在定理2的条件下也成立，即当 $t\to\infty$ 时有 $E(S_{N_t})\sim\overline{\mu}\lambda(t)$. 它的等价结论是当 $t$ 充分大以后就有

$$(1-\delta)\lambda(t)\overline{\mu}\leqslant E(S_{N_t})\leqslant(1+\delta)\lambda(t)\overline{\mu}\tag{8}$$

取满足文献[3]中式(3)的 $\varepsilon(t)$，对于任意的 $\delta_1>0$，有

$$P(S_{N_t}-E(S_{N_t})>x)=\Big(\sum_{k-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}+\sum_{|k-\lambda(t)|<\varepsilon(t)\lambda(t)}+\sum_{\varepsilon(t)\lambda(t)<k-\lambda(t)<\delta_1\lambda(t)}+\sum_{k>(1+\delta_1)\lambda(t)}\Big)P(N_t=k)P(S_k-E(S_k)>x)=A_1+A_2+A_3+A_4\tag{9}$$

对于 $A_1$，记 $n=[(1-\varepsilon(t))\lambda(t)]$，由式(7)及定理1可知，当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+q}$ 一致地有

$$A_1\leqslant P(S_n-E(S_n)>x-E(S_n)+E(S_{N_t}))\sum_{k-\lambda(t)<-\varepsilon(t)\lambda(t)}P(N_t=k)=o(n\overline{F}(x)L_F^{-1})=o(\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^2)=o(\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^{-2})\tag{10}$$

对于 $A_2$，当 $|k-\lambda(t)|<\varepsilon(t)\lambda(t)$ 时，由假设条件A2有

$$(1-\delta)(1-\varepsilon(t))\lambda(t)\overline{\mu}\leqslant E(S_k)\leqslant(1+\delta)(1+\varepsilon(t))\lambda(t)\overline{\mu}$$

由定理1、式(7)、式(8)及上式可知，当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+q}$ 一致地有

$$A_2\leqslant\sum_{|k-\lambda(t)|<\varepsilon(t)\lambda(t)}P(S_k-E(S_k)>x-(1+\delta)(1+\varepsilon(t))\lambda(t)\overline{\mu}+(1-\delta)\times\lambda(t)\overline{\mu})P(N_t=k)\lesssim(1+\varepsilon(t))\lambda(t)\overline{F}(x-(2\delta+\delta\varepsilon(t)+\varepsilon(t))\times\lambda(t)\overline{\mu})L_F^{-1}\sum_{|k-\lambda(t)|<\varepsilon(t)\lambda(t)}P(N_t=k)\lesssim\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^{-2}\tag{11}$$

和

$$A_2\geqslant\sum_{|k-\lambda(t)|<\varepsilon(t)\lambda(t)}P(S_k-E(S_k)>$$

$$x-(1-\delta)(1-\varepsilon(t))\lambda(t)\overline{\mu}+(1+\delta)\times \lambda(t)\overline{\mu})P(N_t=k)\gtrsim (1-\varepsilon(t))\lambda(t)\overline{F}(x+(2\delta+\varepsilon(t)-\delta\varepsilon(t))\lambda(t)\overline{\mu})L_F \sum_{|k-\lambda(t)|<\varepsilon(t)\lambda(t)} P(N_t=k)\gtrsim\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^2 \tag{12}$$

对于 $A_3$，采用与估计 $A_1$ 的相似方法可得当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+q}$ 一致地有

$$A_3=o(\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^2)=o(\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^{-2}) \tag{13}$$

对于 $A_4$，设 $t=1$，$y_i=x/2v$，$v>1$，$y=x/v$，存在某个常数 $C'>0$，当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+q}$ 一致地有

$$\begin{aligned}A_4\leqslant&\sum_{k>(1+\delta_1)\lambda(t)}P(N_t=k)P(S_k>x)\leqslant\\&(1+\delta)\overline{F}\left(\frac{x}{2v}\right)\sum_{k>(1+\delta_1)\lambda(t)}kP(N_t=k)+\\&M\exp\left(v+\ln\left(\frac{x}{n\,\overline{\mu}(1+\delta)}\right)^{-v}\right)\times\\&\sum_{k>(1+\delta_1)\lambda(t)}k^vP(N_t=k)\leqslant\\&C'(1+\delta)\overline{F}(x)\sum_{k>(1+\delta_1)\lambda(t)}kP(N_t=k)+\\&M(e\,\overline{\mu}(1+\delta))^vx^{-v}\sum_{k>(1+\delta_1)\lambda(t)}k^vP(N_t=k)=\\&o(\lambda(t)\overline{F}(x))=o(\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^2)=\\&o(\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^{-2})\end{aligned} \tag{14}$$

这里第 2 步由假设条件 A1、A2 及文献[3]的引理 2 得到，第 3 步由文献[3]的命题 1(2)得到，第 4 步由文献[3]的命题 1(1)、式(7)及假设条件 A3 得到.

由式(9)～(14)可知定理 2 的结论成立.

## 3 D 族上索赔盈余风险模型中的精确大偏差

**定理 3** 设 $X$、$\{X_k,k\geqslant1\}$ 及 $\{N_t,t\geqslant0\}$ 满足定理 2 的条件，$\{Y_j,j\geqslant1\}$ 是一个取值非负同分布的、延拓负相依的随机变量序列，其数学期望为 $\tilde{\mu}=E(Y_1)$；$\{M_t,t\geqslant0\}$ 是一个更新计数过程，且有 $E(M_t)=\beta(t)$ 及存在某个正数 $a$ 使得 $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(t)/\lambda(t)=a$. 则对于任意固定的 $\gamma>0$ 和任意的 $q>0$，当 $t\to\infty$ 时，对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+q}$ 一致地有

$$P(S(t)-E(S(t))>x)\gtrsim\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^3$$

和

$$P(S(t)-E(S(t))>x)\lesssim\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^{-3}$$

**证明** 因 $\{M_t,t\geqslant0\}$ 是一个更新计数过程，且有 $E(M_t)=\beta(t)$，根据命题 3 可知，当 $t\to\infty$ 时有

$$\frac{1}{\beta(t)}\sum_{j=1}^{M_t}Y_j=\frac{M_t}{\beta(t)}\cdot\frac{1}{M_t}\sum_{j=1}^{M_t}Y_j\to\tilde{\mu}$$

所以存在非负函数 $\varepsilon(t)$，当 $t\to\infty$ 时有 $\varepsilon(t)\to0$，且有

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^{M_t}Y_j-\beta(t)\tilde{\mu}\right|\geqslant\varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu}\right)=o(1) \tag{15}$$

由于

$$\begin{aligned}&P(S(t)-E(S(t))>x)=\\&P\left(S_{N_t}-\sum_{k=1}^{M_t}Y_k-E(S_{N_t})+\tilde{\mu}E(M_t)>x\right)=\\&\int_0^\infty P(S_{N_t}-E(S_{N_t})>x-\tilde{\mu}\beta(t)+y)\mathrm{d}P\left(\sum_{k=1}^{M_t}Y_k\leqslant y\right)=\\&\left(\int_{y-\beta(t)\tilde{\mu}<-\varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu}}+\int_{|y-\beta(t)E(Y_1)|\leqslant\varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu}}+\int_{y-\beta(t)\tilde{\mu}>\varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu}}\right)P(S_{N_t}-E(S_{N_t})>\\&x-\beta(t)\tilde{\mu}+y)\mathrm{d}P\left(\sum_{k=1}^{M_t}Y_k\leqslant y\right):=J_1+J_2+J_3\end{aligned} \tag{16}$$

对于 $J_1$，利用定理 2、式(15)及 $D$ 族的定义可知，当 $t\to\infty$ 时对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+q}$ 一致地有

$$\begin{aligned}J_1\leqslant&\int_{y-\beta(t)\tilde{\mu}<-\varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu}}P(S_{N_t}-E(S_{N_t})>x-\beta(t)\tilde{\mu})\mathrm{d}P\left(\sum_{k=1}^{M_t}Y_k\leqslant y\right)=\\&\int_{y-\beta(t)\tilde{\mu}<-\varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu}}P\left(S_{N_t}-E(S_{N_t})>x\left(1-\frac{\beta(t)\tilde{\mu}}{x}\right)\right)\mathrm{d}P\left(\sum_{k=1}^{M_t}Y_k\leqslant y\right)\lesssim\\&L_F^{-2}\lambda(t)\overline{F}\left(x\left(1-\frac{\beta(t)\tilde{\mu}}{x}\right)\right)P\left(\sum_{k=1}^{M_t}Y_k-\beta(t)\tilde{\mu}<-\varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu}\right)\leqslant\\&L_F^{-2}\lambda(t)\overline{F}(x)\left(\overline{F}\left(x\left(1-\frac{\beta(t)\tilde{\mu}}{x}\right)\right)\Big/\overline{F}(x)\right)o(1)=\\&o(\lambda(t)\overline{F}(x))\end{aligned} \tag{17}$$

对于 $J_2$，利用定理 2 可知当 $t\to\infty$ 时对 $x\geqslant\gamma(\lambda(t))^{1+q}$ 一致地有

$$\begin{aligned}J_2\lesssim&\lambda(t)\overline{F}(x-\varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu})L_F^{-2}\times\\&P\left(\left|\sum_{k=1}^{M_t}Y_k-\beta(t)\tilde{\mu}\right|\leqslant\varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu}\right)\lesssim\\&\lambda(t)\overline{F}(x)L_F^{-3}\end{aligned} \tag{18}$$

和

$$J_2 \gtrsim \lambda(t)\overline{F}(x+\varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu})L_F^2 \times P\left(\left|\sum_{k=1}^{M_t} Y_k - \beta(t)\tilde{\mu}\right| \leqslant \varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu}\right) \gtrsim \lambda(t)\overline{F}(x)L_F^3 \tag{19}$$

对于 $J_3$，利用定理 2 及式(15)可知，当 $t\to\infty$ 时对 $x \geqslant \gamma(\lambda(t))^{1+q}$ 一致地有

$$J_3 \leqslant \int_{y-\beta(t)\tilde{\mu}>\varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu}} P(S_{N_t}-E(S_{N_t})> x)\mathrm{d}P\left(\sum_{k=1}^{M_t} Y_k \leqslant y\right) \lesssim L_F^{-2}\lambda(t)\overline{F}(x)P\left(\sum_{k=1}^{M_t} Y_k - \beta(t)\tilde{\mu} > \varepsilon(t)\beta(t)\tilde{\mu}\right) = o(\lambda(t)\overline{F}(x)) \tag{20}$$

由式(16)～(20)可知定理 3 的结论成立.

## 4　结　语

本文采用了求相依的随机变量的非随机和与随机和的精确大偏差的方法，得到了带上延拓负相依和 $\phi$ 混合关系的、服从 $D$ 族上不同分布的随机变量构成的索赔风险模型中的非随机和与随机和的精确大偏差结论；构造了索赔盈余风险模型，考虑了此模型中的随机和的尾概率问题，建立了索赔盈余风险模型中的精确大偏差公式.

## 参考文献：


[1] Goldie C M，Teugels J L，Bingham N H. **Regular Variation** [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1989.

[2] LIU Li. Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails [J]. **Statistics & Probability Letters**，2009，**79**(9)：1290-1298.

[3] 华志强，宋立新，冯敬海. UEND 和 $\varphi$ 混合随机变量随机和的精确大偏差[J]. 大连理工大学学报，2014，**54**(3)：371-376.
HUA Zhi-qiang，SONG Li-xin，FENG Jing-hai. Precise large deviations for random sum of UEND and $\varphi$-mixing random variables [J]. **Journal of Dalian University of Technology**，2014，**54**(3)：371-376.（in Chinese）

[4] CHEN Yu，ZHANG Wei-ping，SU Chun. Precise large deviations for generalized dependent compound renewal risk model with consistent variation [J]. **Frontiers of Mathematics in China**，2014，**9**(1)：31-44.

[5] 薛留根. 混合序列强大数定律的收敛速度[J]. 系统科学与数学，1994，**14**(3)：213-221.
XUE Liu-gen. Convergence rates of the strong law of large numbers for a mixing sequence [J]. **Journal of Systems Science and Mathematical Science**，1994，**14**(3)：213-221.（in Chinese）

[6] 陆传荣，林正炎. 混合相依变量的极限理论[M]. 北京：科学出版社，1997.
LU Chuan-rong，LIN Zheng-yan. **Limit Theorems for Mixing Dependent Random Variables** [M]. Beijing：Science Press，1997.（in Chinese）

[7] CHEN Yi-qing，CHEN An-yue，Ng K-W. The strong law of large numbers for extended negatively dependent random variables [J]. **Journal of Applied Probability**，2010，**47**(4)：908-922.


# Precise large deviations for claim surplus risk model


HUA Zhi-qiang*[1,2]，SONG Li-xin[2]，FENG Jing-hai[2]，QI Xiao-meng[2]

（1. College of Mathematics，Inner Mongolia University for the Nationalities，Tongliao 028000，China；
2. School of Mathematical Sciences，Dalian University of Technology，Dalian 116024，China）



**Abstract**：The claim surplus risk model with dominated variation class (class $D$) including claim process and premium process，is considered. The asymptotic behavior of the tail probabilities of non-random sum and random sum of dependent random variables in the claim surplus risk model is studied，and some asymptotic results about the precise large deviations for non-random sum and random sum of upper extended negatively dependence and $\phi$-mixing dependent random variables in the claim risk model are got by using the methods of precise large deviations for non-random sum and random sum of dependent and non-identically distributed random variables. Finally，the asymptotic formula of precise large deviation in the claim surplus risk model is obtained.



**Key words**：precise large deviation；upper extended negatively dependence；claim process