

含弱界面结构断裂分析中辛方法

徐新生^{*1,2}, 程显贺^{1,2}, 徐成辉^{1,2}, 周震寰^{1,2}

(1. 大连理工大学 工程力学系, 辽宁 大连 116024;

2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 基于哈密顿体系, 提出了一种分析含弱界面弹性材料断裂问题的辛方法. 通过引入对偶变量, 建立基本问题的哈密顿体系. 在该体系下, 问题的解可被辛本征解的级数形式所表示. 利用辛本征解之间的辛共轭正交关系, 以及裂纹面条件、弱界面条件和结构外边界条件, 可确定辛本征解级数的待定系数, 从而得到问题的解. 这样, 可以获得 I 型和 II 型广义应力强度因子解析表达式. 数值结果揭示了各种边界条件对应应力强度因子的影响, 同时也表明该方法对复杂的混合边界条件问题更有效.

关键词: 哈密顿体系; 辛方法; 应力强度因子; 弱界面

中图分类号: TP273

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb201602001

0 引言

随着科学技术的发展, 层状复合材料以其优良的力学性能被广泛应用于土木、机械、航空航天以及电子工程领域中. 该类材料通常由一种或多种材料通过黏合等方式构成, 在使用中易产生界面裂纹, 从而影响结构的整体性能以及寿命. 目前, 针对层状复合材料界面断裂的研究多集中于强连接界面情况, 即假定材料界面位移和应力连续. 然而, 由于制造技术等原因, 各层材料间界面往往达不到强连接的黏结强度. 此外, 对某些复合材料结构层裂的修复也不能作为强连接问题. 因此, 考虑具有弱连接界面的断裂问题具有重要的实际意义.

目前对弱界面问题研究中多采用弹簧模型^[1-5], 即界面上的应力连续、位移间断, 并且应力与间断位移间存在比例关系. Zhong 等^[1]和 Li 等^[3]使用傅里叶变换及奇异积分方程分析了垂直于弱连接界面的 I 型深埋裂纹问题和平行于弱连接界面的 III 型裂纹问题. Chen 等^[2]采用状态空间法给出了简支状态下弱连接压电层合板自由振动的精确解. Wang 等^[6]利用边界元法讨论了具有

弱连接界面的 III 型裂纹问题. 薛雁等^[7]研究了具有弱连接界面的压电夹层结构在反平面变形情况下的端部效应. 从上述文献可以看出, 现有关于弱连接界面断裂问题的文献非常有限, 针对裂纹修复问题甚至尚未提及. 因此, 对该类界面裂纹及其修复效果的评估研究是必要的.

Zhong 针对弹性力学问题首次提出哈密顿体系下的辛方法^[8], 突破传统拉格朗日求解体系的限制, 将问题在哈密顿体系下进行研究, 并形成比较完整的求解方法. 后来此方法被推广到许多其他研究方向^[9-11]. 本文将哈密顿体系辛方法拓广到弱界面断裂问题中, 在哈密顿体系下, 利用对偶变量构造基本控制方程, 将问题归结为本征值和本征解问题, 直接得到界面裂纹的应力强度因子, 以评估含裂纹结构的安全性.

1 基本问题

考虑两种弹性材料, 其界面含一裂纹, 如图 1 所示. 两种材料的弹性模量和泊松比分别记为 E_1 和 ν_1 与 E_2 和 ν_2 , 它们的区域分别为 Ω_1 与 Ω_2 , 区域对应的外边界分别为 $\partial\Omega_1$ 与 $\partial\Omega_2$. 采用极坐标系

(r, θ) , 原点在裂纹尖端处, 且 $\theta = \pm\pi$ 为裂纹界面 (OB 和 OC), $\theta = 0$ 为材料连接界面 (OA), 裂纹长度为 a , 如图 1 所示. 设 $u_r^{(i)}$ 和 $u_\theta^{(i)}$ 分别为 Ω_i ($i = 1, 2$) 区域内两个方向的位移, 所对应的应力和应变分别为 $\sigma_r^{(i)}, \sigma_\theta^{(i)}, \sigma_{r\theta}^{(i)}$ 和 $\epsilon_r^{(i)}, \epsilon_\theta^{(i)}, \epsilon_{r\theta}^{(i)}$. 材料连接界面 ($\theta = 0$) 处的边界条件为^[1-5]

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(1)}|_{\theta=0} = \sigma_\theta^{(2)}|_{\theta=0} = k_1(r)(u_\theta^{(1)}|_{\theta=0} - u_\theta^{(2)}|_{\theta=0}) \\ \sigma_{r\theta}^{(1)}|_{\theta=0} = \sigma_{r\theta}^{(2)}|_{\theta=0} = k_2(r)(u_r^{(1)}|_{\theta=0} - u_r^{(2)}|_{\theta=0}) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $k_1(r)$ 与 $k_2(r)$ 分别为连接界面的法向与切向界面参数. 裂纹面 ($\theta = \pm\pi$) 处的边界条件为^[1-5]

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(1)}|_{\theta=\pi} = \sigma_\theta^{(2)}|_{\theta=-\pi} = -k_3(r)(u_\theta^{(1)}|_{\theta=\pi} - u_\theta^{(2)}|_{\theta=-\pi}) \\ \sigma_{r\theta}^{(1)}|_{\theta=\pi} = \sigma_{r\theta}^{(2)}|_{\theta=-\pi} = -k_4(r)(u_r^{(1)}|_{\theta=\pi} - u_r^{(2)}|_{\theta=-\pi}) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $k_3(r)$ 与 $k_4(r)$ 分别为裂纹面的法向与切向界面参数. 这里需要特别指出, $k_1(r) = k_2(r) = \infty$ 表示界面强连接情况; $k_3(r) = k_4(r) = 0$ 表示自由裂纹面情况, 即裂纹未做修复处理情况; $k_3(r) = k_4(r) \neq 0$ 表示裂纹面被黏结修复, 等效为弱连接.

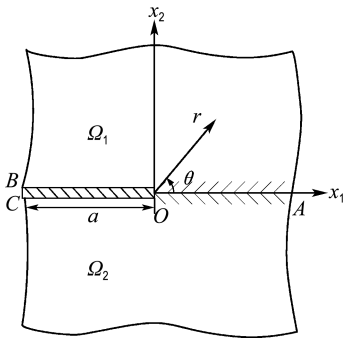


图 1 含边裂纹区域

Fig. 1 An edge-cracked domain

外边界条件可归结为位移条件和应力条件, 它们分别可以表示为

$$u_r^{(i)}|_{\partial\Omega_i^{(1)}} = \bar{u}_r^{(i)}, u_\theta^{(i)}|_{\partial\Omega_i^{(1)}} = \bar{u}_\theta^{(i)}; i = 1, 2 \quad (3)$$

$$\sigma_r^{(i)}|_{\partial\Omega_i^{(2)}} = \bar{\sigma}_r^{(i)}, \sigma_\theta^{(i)}|_{\partial\Omega_i^{(2)}} = \bar{\sigma}_\theta^{(i)}; i = 1, 2 \quad (4)$$

其中 $\partial\Omega_i^{(1)}$ 与 $\partial\Omega_i^{(2)}$ 分别为区域 i 的位移边界和应力边界; $\bar{u}_r^{(i)}$ 与 $\bar{u}_\theta^{(i)}$ 为给定位移; $\bar{\sigma}_r^{(i)}$ 与 $\bar{\sigma}_\theta^{(i)}$ 为给定应力. 在平面应力下, 本构关系和几何关系分别可描述为

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(i)} &= [E_i/(1-\nu_i^2)](\epsilon_r^{(i)} + \nu_i\epsilon_\theta^{(i)}) \\ \sigma_\theta^{(i)} &= [E_i/(1-\nu_i^2)](\epsilon_\theta^{(i)} + \nu_i\epsilon_r^{(i)}) \\ \sigma_{r\theta}^{(i)} &= [E_i/(1+\nu_i)]\epsilon_{r\theta}^{(i)} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\epsilon_r^{(i)} = \partial_r u_r^{(i)}$$

$$\epsilon_\theta^{(i)} = (u_r^{(i)} + \partial_\theta u_\theta^{(i)})/r \quad (6)$$

$$\epsilon_{r\theta}^{(i)} = [(\partial_\theta u_r^{(i)} - u_\theta^{(i)})/r + \partial_r u_\theta^{(i)}]/2$$

其中 $\partial_r \equiv \partial/\partial r$, $\partial_\theta \equiv \partial/\partial \theta$.

2 问题的哈密顿体系描述

为了导入哈密顿体系, 引入广义坐标 $\xi = \ln r$, 记 $\partial_\xi \equiv r\partial_r$. 将 ξ 模拟为“时间”, 并定义 $\dot{f} = \partial_\xi f$, 引入势能密度函数 $U^{(i)} = \frac{1}{2}[\sigma_r^{(i)}\epsilon_r^{(i)} + \sigma_\theta^{(i)}\epsilon_\theta^{(i)} +$

$2\sigma_{r\theta}^{(i)}\epsilon_{r\theta}^{(i)}]$, 拉格朗日密度函数可以表示为

$$\begin{aligned} L^{(i)} &= rU^{(i)} - ru_r^{(i)}f_r^{(i)} - ru_\theta^{(i)}f_\theta^{(i)} = \\ &= [E_i/(1-\nu_i^2)]\{\dot{u}_r^{(i)}\dot{u}_r^{(i)} + [u_r^{(i)} + \partial_\theta u_\theta^{(i)}]^2 + \\ &+ 2\nu_i[u_r^{(i)} + \partial_\theta u_\theta^{(i)}]\dot{u}_r^{(i)} + [(1-\nu_i)/2] \times \\ &\times [\partial_\theta u_r^{(i)} + \dot{u}_\theta^{(i)} - u_\theta^{(i)}]^2\}/2 - ru_r^{(i)}f_r^{(i)} - \\ &- ru_\theta^{(i)}f_\theta^{(i)} \end{aligned} \quad (7)$$

这里 $f_r^{(i)}$ 和 $f_\theta^{(i)}$ 为体力.

记位移变量 $\mathbf{q}^{(i)} = (u_r^{(i)} \ u_\theta^{(i)})^T$, 则对偶变量可以表示为 $\mathbf{p}^{(i)} = \partial L^{(i)}/\partial \dot{\mathbf{q}}^{(i)} = (r\sigma_r^{(i)} \ r\sigma_\theta^{(i)})^T = (s_r^{(i)} \ s_\theta^{(i)})^T$. 引入哈密顿函数 $H^{(i)} = (\mathbf{p}^{(i)})^T \dot{\mathbf{q}}^{(i)} - L^{(i)}$, 利用哈密顿变分原理可以得到哈密顿对偶方程:

$$\dot{\Psi}^{(i)} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}^{(i)} \\ \dot{\mathbf{p}}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta H^{(i)}/\delta \mathbf{p}^{(i)} \\ -\delta H^{(i)}/\delta \mathbf{q}^{(i)} \end{pmatrix} = \mathbf{H}^{(i)} \Psi^{(i)} + \mathbf{f}^{(i)} \quad (8)$$

$$\text{式中: } \mathbf{H}^{(i)} = \begin{pmatrix} -\nu_i & -\nu_i\partial_\theta & \frac{1-\nu_i^2}{E} & 0 \\ -\partial_\theta & 1 & 0 & \frac{2(1+\nu_i)}{E_i} \\ E_i & E_i\partial_\theta & \nu_i & -\partial_\theta \\ -E_i\partial_\theta & -E_i\partial_\theta^2 & -\nu_i\partial_\theta & -1 \end{pmatrix}$$

为哈密顿算子矩阵; $\Psi^{(i)} = (u_r^{(i)} \ u_\theta^{(i)} \ s_r^{(i)} \ s_\theta^{(i)})^T$ 和 $\mathbf{f}^{(i)} = (0 \ 0 \ rf_r^{(i)} \ rf_\theta^{(i)})^T$ 分别为对偶向量和体力向量.

哈密顿体系下材料连接界面 ($\theta = 0$) 处的边界条件如下^[4]:

$$\begin{aligned} s_\theta^{(1)}|_{\theta=0} = s_\theta^{(2)}|_{\theta=0} = k_1[u_\theta^{(1)}|_{\theta=0} - u_\theta^{(2)}|_{\theta=0}] \\ s_{r\theta}^{(1)}|_{\theta=0} = s_{r\theta}^{(2)}|_{\theta=0} = k_2[u_r^{(1)}|_{\theta=0} - u_r^{(2)}|_{\theta=0}] \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $s_\theta = r\sigma_\theta$, k_1 与 k_2 分别为连接界面的法向与切向界面参数. 裂纹面 ($\theta = \pm\pi$) 处的边界条件如下^[4]:

$$\left. s_{\theta}^{(1)} \right|_{\theta=\pi}=s_{\theta}^{(2)} \Big|_{\theta=-\pi}=-k_3 \Big[\left. u_{\theta}^{(1)} \right|_{\theta=\pi}-\left. u_{\theta}^{(2)} \right|_{\theta=-\pi} \Big]$$
$$\left. s_{r\theta}^{(1)} \right|_{\theta=\pi}=s_{r\theta}^{(2)} \Big|_{\theta=-\pi}=-k_4 \Big[\left. u_r^{(1)} \right|_{\theta=\pi}-\left. u_r^{(2)} \right|_{\theta=-\pi} \Big]$$

(10)

这里 k_3 与 k_4 分别为裂纹面的法向与切向界面参数.

3 辛本征解和辛共轭正交关系

不考虑体力,哈密顿方程式(8)可改写为

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}^{(i)}=\boldsymbol{H}^{(i)}\boldsymbol{\Psi}^{(i)}; i=1,2$$

(11)

采用广义分离变量法

$$\boldsymbol{\Psi}^{(i)}(\xi,\theta)=\boldsymbol{\psi}^{(i)}(\theta)\mathrm{e}^{\mu\xi}$$

(12)

则有

$$\boldsymbol{H}^{(i)}\boldsymbol{\psi}_m^{(i)}=\mu_m\boldsymbol{\psi}_m^{(i)}$$

(13)

由文献[8]可知本征解形式如下：

$$\boldsymbol{\psi}^{(i)}=\begin{pmatrix} A_1^{(i)}\alpha_{11}^{(i)}\cos[(1+\mu)\theta]+A_2^{(i)}\alpha_{12}^{(i)}\sin[(1+\mu)\theta]+\\ A_3^{(i)}\alpha_{13}^{(i)}\cos[(1-\mu)\theta]+A_4^{(i)}\alpha_{14}^{(i)}\sin[(1-\mu)\theta]\\ A_1^{(i)}\alpha_{21}^{(i)}\sin[(1+\mu)\theta]+A_2^{(i)}\alpha_{22}^{(i)}\cos[(1+\mu)\theta]+\\ A_3^{(i)}\alpha_{23}^{(i)}\sin[(1-\mu)\theta]+A_4^{(i)}\alpha_{24}^{(i)}\cos[(1-\mu)\theta]\\ A_1^{(i)}\alpha_{31}^{(i)}\cos[(1+\mu)\theta]+A_2^{(i)}\alpha_{32}^{(i)}\sin[(1+\mu)\theta]+\\ A_3^{(i)}\alpha_{33}^{(i)}\cos[(1-\mu)\theta]+A_4^{(i)}\alpha_{34}^{(i)}\sin[(1-\mu)\theta]\\ A_1^{(i)}\alpha_{41}^{(i)}\sin[(1+\mu)\theta]+A_2^{(i)}\alpha_{42}^{(i)}\cos[(1+\mu)\theta]+\\ A_3^{(i)}\alpha_{43}^{(i)}\sin[(1-\mu)\theta]+A_4^{(i)}\alpha_{44}^{(i)}\cos[(1-\mu)\theta] \end{pmatrix}$$

(14)

式中: $\alpha_{11}^{(i)}=\alpha_{12}^{(i)}=\alpha_{13}^{(i)}=-\alpha_{21}^{(i)}=\alpha_{22}^{(i)}=\alpha_{24}^{(i)}=1$, $\alpha_{14}^{(i)}=\beta_3^{(i)}/\beta_2^{(i)}$, $\alpha_{23}^{(i)}=-\beta_2^{(i)}/\beta_3^{(i)}$, $\alpha_{31}^{(i)}=\alpha_{32}^{(i)}=-\alpha_{41}^{(i)}=\alpha_{42}^{(i)}=E_i\mu/\beta_1^{(i)}$, $\alpha_{33}^{(i)}=E_i\mu(3-\mu)/\beta_3^{(i)}$, $\alpha_{34}^{(i)}=E_i\mu(3-\mu)/\beta_2^{(i)}$, $\alpha_{43}^{(i)}=E_i\mu(1-\mu)/\beta_3^{(i)}$, $\alpha_{44}^{(i)}=-E_i\mu(1-\mu)/\beta_2^{(i)}$, $\beta_1^{(i)}=1+v_i$, $\beta_2^{(i)}=(3-v_i)+(1+v_i)\mu$, $\beta_3^{(i)}=(3-v_i)-(1+v_i)\mu$.

可见本征解(14)中含有 8 个未知数,由方程(9)可得

$$\boldsymbol{K}_{11}^{(1)}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}=\boldsymbol{K}_{12}^{(2)}\boldsymbol{\varphi}^{(2)}$$

(15)

其中

$$\boldsymbol{K}_{11}^{(1)}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\beta_1^{(1)}} & 0 & \frac{1+\mu}{\beta_3^{(1)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_1^{(1)}} & 0 & \frac{\mu-1}{\beta_2^{(1)}} \\ \frac{-\mu}{\beta_1^{(1)}} & \frac{-k_1}{E_1} & \frac{(1+\mu)\mu}{\beta_3^{(1)}} & \frac{-k_1}{E_1} \\ \frac{-k_2}{E_1} & \frac{\mu}{\beta_1^{(1)}} & \frac{-k_2}{E_1} & \frac{(\mu-1)\mu}{\beta_2^{(1)}} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varphi}^{(1)}=\begin{pmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \\ A_3^{(1)} \\ A_4^{(1)} \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{K}_{12}^{(2)}=\begin{pmatrix} \frac{-E_2}{E_1\beta_1^{(2)}} & 0 & \frac{E_2(1+\mu)}{E_1\beta_3^{(2)}} & 0 \\ 0 & \frac{E_2}{E_1\beta_1^{(2)}} & 0 & \frac{E_2(\mu-1)}{E_1\beta_2^{(2)}} \\ 0 & \frac{-k_1}{E_1} & 0 & \frac{-k_1}{E_1} \\ \frac{-k_2}{E_1} & 0 & \frac{-k_2}{E_1} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{\varphi}^{(2)}=\begin{pmatrix} A_1^{(2)} \\ A_2^{(2)} \\ A_3^{(2)} \\ A_4^{(2)} \end{pmatrix}$$

则有 $\boldsymbol{\varphi}^{(2)}=(\boldsymbol{K}_{12}^{(2)})^{-1}\boldsymbol{K}_{11}^{(1)}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}$,本征解(14)中仅含有 4 个独立的未知数.

将式(14)代入裂纹面条件(10),可得

$$\boldsymbol{K}_{21}^{(1)}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}=\boldsymbol{K}_{22}^{(2)}\boldsymbol{\varphi}^{(2)}$$

(16)

其中

$$\boldsymbol{K}_{21}^{(1)}=\begin{pmatrix} \frac{\cos(\mu\pi)}{\beta_1^{(1)}} & \frac{\sin(\mu\pi)}{\beta_1^{(1)}} & \frac{-(1+\mu)\cos(\mu\pi)}{\beta_3^{(1)}} & \frac{(1+\mu)\sin(\mu\pi)}{\beta_2^{(1)}} \\ \frac{\sin(\mu\pi)}{\beta_1^{(1)}} & \frac{-\cos(\mu\pi)}{\beta_1^{(1)}} & \frac{(1-\mu)\sin(\mu\pi)}{\beta_3^{(1)}} & \frac{(1-\mu)\cos(\mu\pi)}{\beta_2^{(1)}} \\ \frac{k_3\sin(\mu\pi)}{E_1} & \frac{-k_3\cos(\mu\pi)}{E_1} & \frac{-k_3\sin(\mu\pi)\beta_2^{(1)}}{E_1\beta_3^{(1)}} & \frac{-k_3\cos(\mu\pi)}{E_1} \\ \frac{-k_4\cos(\mu\pi)}{E_1} & \frac{-k_4\sin(\mu\pi)}{E_1} & \frac{-k_4\cos(\mu\pi)}{E_1} & \frac{k_4\sin(\mu\pi)\beta_3^{(1)}}{E_1\beta_2^{(1)}} \end{pmatrix}+$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu\cos(\mu\pi)}{\beta_1^{(1)}} & \frac{\mu\sin(\mu\pi)}{\beta_1^{(1)}} & \frac{-\mu(1+\mu)\cos(\mu\pi)}{\beta_3^{(1)}} & \frac{\mu(1+\mu)\sin(\mu\pi)}{\beta_2^{(1)}} \\ \frac{\mu\sin(\mu\pi)}{\beta_1^{(1)}} & \frac{-\mu\cos(\mu\pi)}{\beta_1^{(1)}} & \frac{\mu(1-\mu)\sin(\mu\pi)}{\beta_3^{(1)}} & \frac{\mu(1-\mu)\cos(\mu\pi)}{\beta_2^{(1)}} \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{K}_{22}^{(2)}=\begin{pmatrix} \frac{E_2\cos(\mu\pi)}{E_1\beta_1^{(2)}} & \frac{-E_2\sin(\mu\pi)}{E_1\beta_1^{(2)}} & \frac{-E_2(1+\mu)\cos(\mu\pi)}{E_1\beta_3^{(2)}} & \frac{-E_2(1+\mu)\sin(\mu\pi)}{E_1\beta_2^{(2)}} \\ \frac{-E_2\sin(\mu\pi)}{E_1\beta_1^{(2)}} & \frac{-E_2\cos(\mu\pi)}{E_1\beta_1^{(2)}} & \frac{-E_2(1-\mu)\sin(\mu\pi)}{E_1\beta_3^{(2)}} & \frac{E_2(1-\mu)\cos(\mu\pi)}{E_1\beta_2^{(2)}} \\ \frac{-k_3\sin(\mu\pi)}{E_1} & \frac{-k_3\cos(\mu\pi)}{E_1} & \frac{k_3\sin(\mu\pi)\beta_2^{(2)}}{E_1\beta_3^{(2)}} & \frac{-k_3\cos(\mu\pi)}{E_1} \\ \frac{-k_4\cos(\mu\pi)}{E_1} & \frac{k_4\sin(\mu\pi)}{E_1} & \frac{-k_4\cos(\mu\pi)}{E_1} & \frac{-k_4\sin(\mu\pi)\beta_3^{(2)}}{E_1\beta_2^{(2)}} \end{pmatrix}$$

由式(15)和(16)可得

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}=\boldsymbol{0}$$

(17)

其中 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_{21}^{(1)}-\boldsymbol{K}_{22}^{(2)}(\boldsymbol{K}_{12}^{(2)})^{-1}\boldsymbol{K}_{11}^{(1)}$.若 $\boldsymbol{\varphi}^{(1)}$ 存在非零

解,则式(17)的系数行列式必为 0,即

$$|\mathbf{K}|=0 \tag{18}$$

当区域 Ω_1 与区域 Ω_2 材料相同时,即 $E=E_1=E_2, \nu=\nu_1=\nu_2$ 时,上式可化简为

$$\begin{aligned} &[-4E\mu\cos(\mu\pi)(k_1+k_3)+\sin(\mu\pi)\times \\ &(E^2\mu^2-16k_1k_3)][-4E\mu\cos(\mu\pi)(k_2+k_4)+ \\ &\sin(\mu\pi)(E^2\mu^2-16k_2k_4)]\mu^2\sin^2(\mu\pi)=0 \end{aligned} \tag{19}$$

式(14)的本征值可以利用上式确定.

若 μ_m 是式(13)本征值,则 $-\mu_m$ 亦是其本征值.故本征值可分成以下两组:

$$\begin{aligned} (\alpha): & \mu_m^{(\alpha)}, m=1,2,\cdots, \operatorname{Re}(\mu_m^{(\alpha)})>0 \text{ 或} \\ & \operatorname{Re}(\mu_m^{(\alpha)})=0 \text{ 并且 } \operatorname{Im}(\mu_m^{(\alpha)})>0; \\ (\beta): & \mu_m^{(\beta)}, m=1,2,\cdots, \mu_m^{(\beta)}=-\mu_m^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

定义 $\boldsymbol{\Psi}_m=\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}_m^{(1)}; & (r,\theta)\in\Omega_1 \\ \boldsymbol{\Psi}_m^{(2)}; & (r,\theta)\in\Omega_2 \end{cases}$,并引入辛内积:

$$\langle \boldsymbol{\Psi}_m, \mathbf{J}, \boldsymbol{\Psi}_n \rangle = \sum_{i=1,2} \int_{\partial\Omega_i} [(\mathbf{q}_m^{(i)})^T \mathbf{p}_n^{(i)} - (\mathbf{p}_m^{(i)})^T \mathbf{q}_n^{(i)}] d\theta \tag{20}$$

则本征解满足辛共轭正交关系:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\Psi}_m^{(\alpha)}, \mathbf{J}, \boldsymbol{\Psi}_n^{(\alpha)} \rangle &= \langle \boldsymbol{\Psi}_m^{(\beta)}, \mathbf{J}, \boldsymbol{\Psi}_n^{(\beta)} \rangle = 0 \\ \langle \boldsymbol{\Psi}_m^{(\alpha)}, \mathbf{J}, \boldsymbol{\Psi}_n^{(\beta)} \rangle &= -\langle \boldsymbol{\Psi}_m^{(\beta)}, \mathbf{J}, \boldsymbol{\Psi}_n^{(\alpha)} \rangle = \delta_{mn} \end{aligned} \tag{21}$$

4 数值方法

由于 β -类本征解在 $r=0$ 处位移奇异,该类解为非物理解,只需考虑 α -类本征解.通解 $\boldsymbol{\Psi}_c$ 可以写为

$$\boldsymbol{\Psi}_c = \sum_{j=1}^N d_j \boldsymbol{\Psi}_j e^{\mu_j \xi} \tag{22}$$

这里 d_j 为待定系数.在 $r=a$ 处的边界条件为

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(i)}|_{\partial\Omega_1^{(i)}} &= (\bar{u}_r^{(i)}(\theta) \quad \bar{u}_\theta^{(i)}(\theta))^T \\ \mathbf{p}^{(i)}|_{\partial\Omega_2^{(i)}} &= (\bar{s}_r^{(i)}(\theta) \quad \bar{s}_\theta^{(i)}(\theta))^T; \quad i=1,2 \end{aligned} \tag{23}$$

利用通解(22),边界条件(23)可以改写为

$$\boldsymbol{\Psi}_c|_{r=a} = \begin{cases} \left(\mathbf{q}^{(i)}|_{r=a} \quad \sum_{j=1}^N d_j \mathbf{p}_j^{(i)} e^{\mu_j \ln a} \right)^T \partial\Omega_1^{(i)} \\ \left(\sum_{j=1}^N d_j \mathbf{q}_j^{(i)} e^{\mu_j \ln a} \quad \mathbf{p}^{(i)}|_{r=a} \right)^T \partial\Omega_2^{(i)} \end{cases} \tag{24}$$

利用式(24)和辛共轭正交关系(21)有

$$\sum_{j=1}^N C_{kj} d_j = C_k \tag{25}$$

其中

$$C_{kj} = \sum_{i=1,2} \left\{ \int_{\partial\Omega_1^{(i)}} (\mathbf{q}_k^{(i)})^T \mathbf{p}_j^{(i)} d\theta - \int_{\partial\Omega_2^{(i)}} (\mathbf{p}_k^{(i)})^T \mathbf{q}_j^{(i)} d\theta \right\} e^{\mu_j \ln a},$$

$$C_k = \sum_{i=1,2} \left\{ \int_{\partial\Omega_1^{(i)}} (\mathbf{p}_k^{(i)})^T \mathbf{q}^{(i)}|_{r=a} d\theta - \int_{\partial\Omega_2^{(i)}} (\mathbf{q}_k^{(i)})^T \mathbf{p}^{(i)}|_{r=a} d\theta \right\}$$

至此,通解的待定系数 d_j 可以由式(25)的线性代数方程组确定.

5 数值结果分析

为了研究界面连接对应力强度因子的影响,不妨考虑相同材料问题,采用量纲一的变量, $R=r/a, U_r=u_r/a, U_\theta=u_\theta/a, S_r=s_r/(aE), S_\theta=s_\theta/(aE), S_{r\theta}=s_{r\theta}/(aE), \tilde{k}_i=k_i/E$ (不妨仍记为 k_i), 并取泊松比 $\nu=0.3$.

数值模拟中主要考虑以下两种情况.

情况 1: $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 = 0, k_4 = 0$, 即裂纹面自由,材料界面弱连接.

情况 2: $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 \neq 0, k_4 \neq 0$, 即裂纹面弱连接,材料界面弱连接.

5.1 弱连接界面的奇异性分析

首先,讨论裂纹面自由,材料界面弱连接的情况 1 的奇异性问题.裂纹尖端的奇异性可以通过 $-1 < \operatorname{Re}(\mu-1) < 0$ 表示,表 1 给出不同界面参数 $k_1=k_2$ 对应的奇异性,其中 $k_1=k_2=\infty$ 对应强连接界面的结果.从表中可以看出,裂纹尖端奇异性随界面参数增大而增大,奇异性趋近于 $-1/2$. 这说明弱界面裂纹不具有传统界面裂纹的 $-1/2$ 奇异性,不能用传统的应力强度因子作为裂纹评估参数.从奇异性分析还可以看出,满足 $0 < \mu < 1$ 的本征值对应的本征解直接表征了裂纹尖端的奇异性分布.因此,广义应力强度因子可以描述为

$$K_{\text{I}} = \lim_{R \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} R^{-\mu} S_\theta(R, 0) \tag{26}$$

$$K_{\text{II}} = \lim_{R \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} R^{-\mu} S_{r\theta}(R, 0)$$

其中 K_{I} 和 K_{II} 分别为 I 型和 II 型广义应力强度因子.

表 1 不同界面参数下的奇异性

Tab. 1 The singularity of different interface parameters			
k_1, k_2	$\operatorname{Re}(\mu-1)$	k_1, k_2	$\operatorname{Re}(\mu-1)$
2/5	-0.581 4	5/3	-0.522 7
3/5	-0.558 0	5/2	-0.515 4
5/5	-0.536 7	∞	-0.500 0

5.2 弱连接界面在集中荷载作用下的问题

考虑所讨论的问题为圆形区域,如图 2 所示.有一对集中力作用在边界上,界面和裂纹面条件

如情况 1. $P_{\perp}$ 为作用在外边界 $\pm\theta_0$ 处的对称单位集中力, $P_{\parallel}$ 为作用在裂纹面上 B、C 点处的反对称单位集中力.

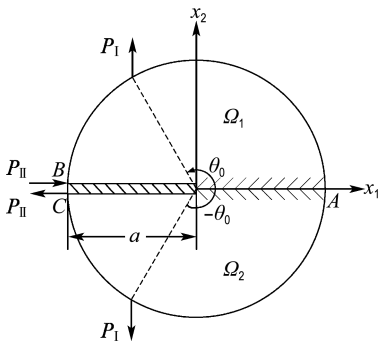


图 2 弱连接界面圆盘受 I / II 型集中力作用情况
Fig. 2 The imperfect interface disk subjected to mode I / II concentrated force

图 3 给出了受 $P_{\perp}$ 单独作用 ($\theta_0 = 180^\circ$) 产生的 I 型广义应力强度因子随本征解项数的收敛性曲线. 从图中可以看到, 当本征解项数超过 18 项之后, 界面强连接情况 ($k_1 = k_2 = \infty$) 对应的 $K_{\perp}$ 稳定收敛于理论值, 说明本文方法的可靠性; 界面弱连接 ($k_1 = k_2 = 5/5$) 情况对应的广义应力强度因子 $K_{\perp}$ 收敛值略低于强连接情况, 这与物理现象一致. 由此可见, 该方法的收敛性较好. 以下算例的计算均取 26 项辛本征解.

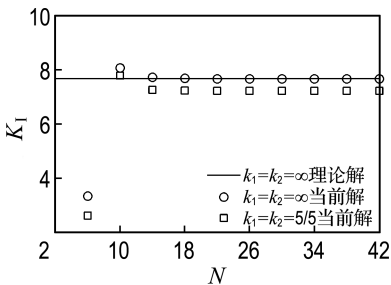


图 3 收敛性与本征解项数的关系
Fig. 3 The relationship between convergence and number of eigensolutions

图 4 给出对称荷载 $P_{\perp}$ 作用位置 θ_0 及界面参数 $k_1 = k_2$ 对 I 型广义应力强度因子 $K_{\perp}$ 的影响曲线. 从图中可看出, $K_{\perp}$ 随 θ_0 增大而增大. 这种现象是由于荷载作用位置与裂纹尖端在裂纹面的投影距离增大所致. $K_{\perp}$ 随界面参数 $k_1 = k_2$ 增大而增大, 即界面连接越牢固对应的 $K_{\perp}$ 越大. 且当 $k_1 = k_2 = \infty$ 时, 当前解与理论解^[12] 非常吻合.

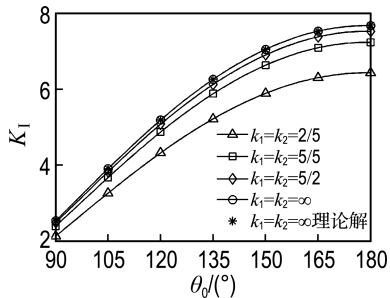


图 4 自由裂纹面 I 型广义应力强度因子
Fig. 4 $K_{\perp}$ for free cracked face

图 5 给出反对称荷载 $P_{\parallel}$ 作用下 II 型广义应力强度因子 $K_{\parallel}$ 的变化情况. $K_{\parallel}$ 随界面参数 $k_1 = k_2$ 增加而增大, 当 $k_1 = k_2 = 2.5$ 时, $K_{\parallel}$ 为 1.971 8. 另外可知, 当 $k_1 = k_2 = \infty$ 时, $K_{\parallel}$ 达到最大值 2.068 7, 可见 $k_1 = k_2 > 2.5$ 后 $K_{\parallel}$ 的变化不大. 说明这种情况可以被近似视为强连接问题.

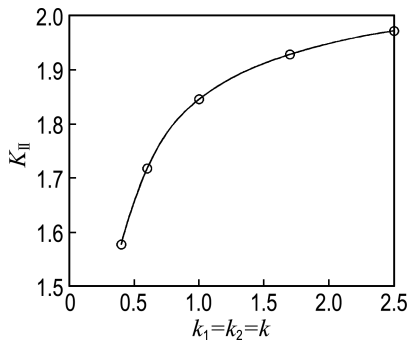


图 5 自由裂纹面 II 型广义应力强度因子
Fig. 5 $K_{\parallel}$ for free cracked face

5.3 弱连接裂纹面受集中荷载作用问题

考虑图 2 所示的情况 2. 图 6 与 7 分别给出弱界面参数 k_1 、 k_2 、 k_3 与 k_4 对 $K_{\perp}$ 及 $K_{\parallel}$ 的影响曲线. 图 6 表明自由裂纹面 ($k_3 = k_4 = 0$) 情况下, 集中力作用位置越远离裂纹尖端 $K_{\perp}$ 越大; 而裂纹

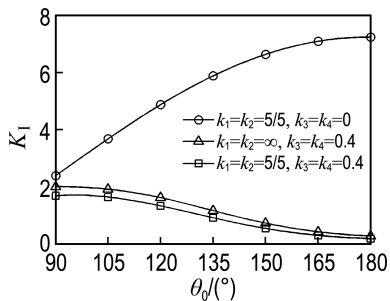


图 6 不同弱界面条件下 I 型广义应力强度因子
Fig. 6 $K_{\perp}$ for different imperfect interface conditions

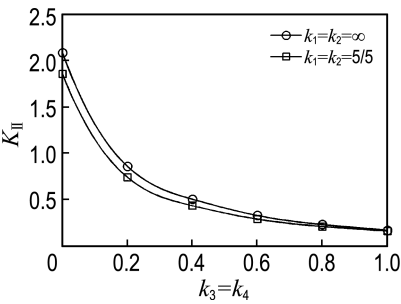


图 7 不同弱界面条件下Ⅱ型广义应力强度因子
Fig. 7 K_{II} for different imperfect interface conditions

修复后($k_3=k_4 \neq 0$), K_I 的变化趋势与自由裂纹面情况完全相反, 且 $\theta=0$ 的连接界面参数 k_1 与 k_2 越大 K_I 也越大. 这种现象说明, 裂纹修复(弱连接)有利于实现止裂效果. 图 7 表明反对称荷载作用下, K_{II} 随弱界面参数 k_3 与 k_4 增大而减小, 说明裂纹面连接越牢固, K_{II} 就越小. 且 $\theta=0$ 的界面参数 k_1 与 k_2 越大 K_{II} 也越大. 该规律与物理现象一致.

5.4 弱连接界面的混合边界条件问题

最后, 考虑情况 1 界面和裂纹且外边界为混合边界条件, 如图 8 所示. 不妨取

$$U_r=0, U_\theta=0; \theta \in [-180^\circ, \theta_0]$$
$$U_r=\sin\left(\frac{\theta-\theta_0}{180-\theta_0}\pi\right), U_\theta=0; \theta \in [\theta_0, 180^\circ]$$

图 9 给出不同弱界面参数 k_1 与 k_2 和不同角度 θ_0 对 K_I 的影响曲线. 从图中观察到, 当 $\theta_0=0^\circ$ 时, K_I 达到极大值; 当 $\theta_0>0^\circ$ 后, K_I 急剧下降. 图 10 给出 K_{II} 随角度 θ_0 的变化曲线. 该图表明, 当 $\theta_0=-45^\circ$ 时, K_{II} 达到极大值; 且在 $\theta_0=[-90^\circ, 90^\circ]$, 界面参数 k_1 与 k_2 越大, K_{II} 的绝对值亦越大.

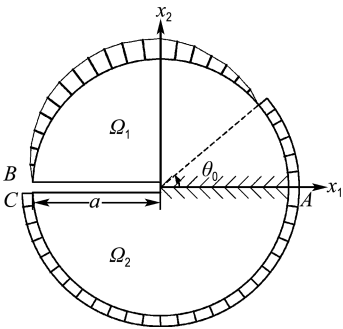


图 8 弱连接界面圆盘受混合边界条件作用
Fig. 8 The imperfect interface disk subjected to mixed boundary conditions

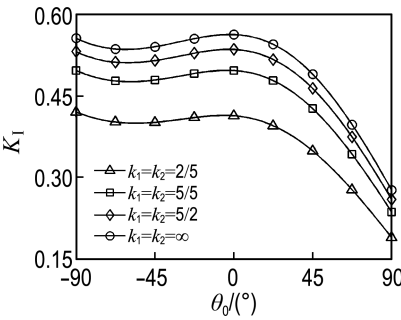


图 9 混合边界条件下Ⅰ型广义应力强度因子
Fig. 9 K_I for mixed boundary conditions

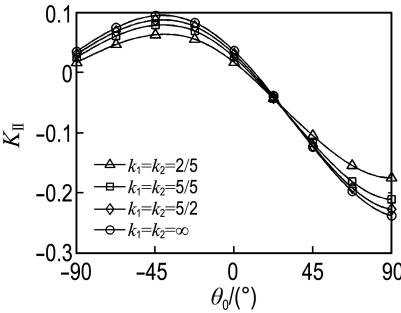


图 10 混合边界条件下Ⅱ型广义应力强度因子
Fig. 10 K_{II} for mixed boundary conditions

6 结 语

本文将辛方法应用于具有弱界面的断裂分析中. 在哈密顿体系下, 可直接得到界面裂纹的应力场、位移场及广义应力强度因子的解析表达式. 数值结果表明, 辛方法可以有效求解弱界面断裂问题, 方法具有良好的收敛性, 尤其对复杂边界条件同样有效. 裂纹面为自由表面时, 相同外边界条件下, 材料界面参数越大, 相应的广义应力强度因子越大. 然而, 该广义应力强度因子不会高于强连接界面问题的广义应力强度因子; 反之, 裂纹面亦为弱连接时, 相应的广义应力强度因子较之裂纹面为自由表面情况小得多, 说明裂纹经过修复之后, 可以承载更大的荷载.

参考文献:

[1] ZHONG Xian-ci, LI Xian-fang, Lee Kang-yong. Analysis of a mode-I crack perpendicular to an imperfect interface [J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2009, **46**(6):1456-1463.

[2] Chen W Q, Lee K Y. Exact solution of angle-ply piezoelectric laminates in cylindrical bending with interfacial imperfections [J]. **Composite Structures**, 2004, **65**(3-4):329-337.

- [3] LI Yong-dong, Lee Kang-yong. The shielding effect of the imperfect interface on a mode III permeable crack in a layered piezoelectric sensor [J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 2009, **76**(7):876-883.
- [4] 刘承斌,吕朝锋. 具有弱界面特性叠层压电球壳的自由振动[J]. 固体力学学报, 2012, **33**(3):317-324. LIU Cheng-bin, LV Chao-feng. Free vibration of multi-layered piezoelectric spherical shells with imperfect interfaces [J]. **Chinese Journal of Solids Mechanics**, 2012, **33**(3):317-324. (in Chinese)
- [5] 但敏. Hamilton体系下层合板弱粘接模型的应用[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(1):72-84. DAN Min. Application of composite laminated plates with bonding imperfection in Hamilton system [J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2013, **34**(1):72-84. (in Chinese)
- [6] WANG Xue, Ang Whye-teong, FAN Hui. Micro-mechanics models for an imperfect interface under anti-plane shear load: Hypersingular integral formulations [J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2012, **36**(12):1856-1864.
- [7] 薛雁,刘金喜. 反平面变形下弱界面压电夹层结构的圣维南端部效应[J]. 工程力学, 2013, **30**(6):41-46. XUE Yan, LIU Jin-xi. Saint-Venant end effect for anti-plane deformation of piezoelectric sandwich structures with weak interfaces [J]. **Engineering Mechanics**, 2013, **30**(6):41-46. (in Chinese)
- [8] ZHONG Wan-xie. **Duality System in Applied Mechanics and Optimal Control** [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [9] ZHOU Zhen-huan, XU Xin-sheng, Leung A Y T, *et al.* Stress intensity factors and T-stress for an edge interface crack by symplectic expansion [J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 2013, **102**:334-347.
- [10] XU Xin-sheng, CHENG Xian-he, ZHOU Zhen-huan, *et al.* An analytical approach for the mixed-mode crack in linear viscoelastic media [J]. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, 2015, **52**:12-25.
- [11] Leung A Y T, XU Xin-sheng, ZHOU Zhen-huan, *et al.* Analytic stress intensity factors for finite elastic disk using symplectic expansion [J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 2009, **76**(12):1866-1882.
- [12] Wu X R. The arbitrarily loaded single-edge cracked circular disc; accurate weight function solutions [J]. **International Journal of Fracture**, 1991, **49**(4):239-256.

A symplectic method for fracture analysis of structure with weak interface

XU Xin-sheng^{*1,2}, CHENG Xian-he^{1,2}, XU Cheng-hui^{1,2}, ZHOU Zhen-huan^{1,2}

(1. Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Based on Hamiltonian system, a symplectic method for analyzing the fracture problem of weak interface between two elastic media is presented. By introducing the dual variables, the Hamiltonian system is constructed, then the solution of the problem can be represented by series form of the symplectic eigensolutions. By means of the symplectic adjoint orthogonal relationship between symplectic eigensolutions, together with crack surface conditions, weak interfacial conditions and external boundary conditions of structure, the undetermined coefficients of the symplectic series can be determined. Therefore, the solution is obtained. In this way, the generalized stress intensity factors of Mode I and Mode II are expressed analytically. The numerical results reveal the influence of various boundary conditions on the stress intensity factors, and also show that the method is more effective for complex mixed boundary conditions.

Key words: Hamiltonian system; symplectic method; stress intensity factor; weak interface