

城市路网的鲁棒预测控制

刘安东*, 李 佳, 俞 立

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

摘要: 针对模型不确定的城市路网系统, 设计了使闭环系统渐近稳定的鲁棒预测状态反馈控制器. 首先, 将“存储与向前”路段线性模型扩展为城市路网拓扑模型. 同时考虑实际情况中路况变化、测量误差等因素引起的饱和流量、车辆数的不确定性的影响, 提出了具有不确定参数的城市路网系统模型. 然后, 采用线性矩阵不等式处理方法求解一个具有约束的凸优化问题, 给出了状态反馈控制器设计方法. 最后通过 Matlab 仿真验证了所提方法能有效缓解城市交通拥堵和优化信号灯.

关键词: 鲁棒预测控制; 城市路网系统; 参数不确定; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb201602014

0 引言

近几十年来, 随着车辆数的增加, 交通拥堵已经成为阻碍社会经济发展的重要因素. 在城市路网系统中, 由于交通流的时段性及交通基础设施的不可扩展性, 拥堵问题尤为严重^[1]. 因此, 迫切需要一种有效的控制策略来缓解城市交通拥堵和优化路口信号灯. 在已有的控制策略中, 实时控制策略具有对当前变化的交通状况做出及时调整的优点, 从而比定时控制策略具有更广阔的发展前景^[2]. 实时控制可分为基于实时交通流和基于状态空间模型的实时控制, 其中基于模型的控制方法能更好地运用现代控制理论方法, 故近年来得到了较快的发展与应用^[3], 并成为当前的一个研究热点.

目前, 城市路段模型主要有“存储与向前”线性模型、改进型“存储与向前”非线性模型、细胞模型等^[4-11]. 在这些模型中, Gazis 和 Potts 等提出的“存储与向前”线性模型相比于其他模型更直观简洁、适用性强, 且该模型适用于饱和状态下的城市路段^[4]. 基于该线性模型, 学者们提出了一系列控制算法: Diakaki 等采用 LQR 算法求解绿灯相位时间的反馈控制控制律^[5], 虽然简单方便, 但是不能处理带有约束的最优化问题; Aboudolas 等采用集中式或分布式模型预测控制方法解决带有约

束的绿灯相位时间的最优化问题^[6-8]; 为了能准确描述交通系统, Lin 等通过对“存储与向前”线性模型的改进得到了非线性模型, 并使用了模型预测控制算法, 达到了较好的控制效果^[9]. 但是“存储与向前”线性模型和非线性模型是一种精确模型, 而实际情况中路况变化、测量误差等因素引起的饱和流量、车辆数的不确定性会导致“存储与向前”模型的参数不确定^[12], 因此基于该模型的算法在具有不确定因素影响下无法获得很好的控制效果.

针对实际情况中路况变化、测量误差等因素引起的饱和流量、车辆数的不确定性所导致的“存储与向前”线性模型的参数不确定, 本文采用鲁棒预测控制方法设计一个状态反馈控制器用于调节各个路口的绿灯相位时间. 首先改进由“存储与向前”路段线性模型增广得到的城市路网拓扑模型, 同时考虑参数不确定性和绿灯时间约束, 得到带有参数不确定的路网系统模型; 然后利用线性矩阵不等式(LMI)处理方法解决具有约束的凸优化问题, 并给出控制器求解方法; 最后, 通过仿真验证鲁棒模型预测控制策略.

1 城市路网系统建模

文中常用符号定义见表 1.

表1 符号定义

Tab.1 Symbols definition

符号	定义
T	采样周期,即信号灯的信号周期
$q_z(k)$	$[kT, (k+1)T]$ 时间段内,车辆从上游路段通过路口 M 进入路段 z 的平均流量
$u_z(k)$	$[kT, (k+1)T]$ 时间段内,车辆从路段 z 通过路口 N 进入下游路段的平均流量
$s_z(k)$	$[kT, (k+1)T]$ 时间段内,车辆从路段 z 中途驶离的平均流量
$d_z(k)$	$[kT, (k+1)T]$ 时间段内,车辆从路段 z 中途驶入的平均流量
$x_z(k)$	kT 时刻路段 z 中的车辆数
I_j	路口 j 的上游路段集合
O_j	路口 j 的下游路段集合
$t_{w,z}$	从上游路段 w 通过路口 M 进入路段 z 的转弯率
$t_{z,o}$	从路段 z 中途离开的车辆占路段 z 中总车辆数的百分比
$G_z(k)$	$[kT, (k+1)T]$ 时间段内,路段 z 中车辆有权通过路口 N 的总时间占路口 N 的信号周期的百分比
S_z	路段 z 的饱和流量
$g_{N,i}(k)$	$[kT, (k+1)T]$ 时间段内,路口 N 的第 i 个相位时间占路口 N 的信号周期的百分比
v_z	路段 z 中车辆有权通过路口 N 的相位集合

1.1 “存储与向前”路段模型

“存储与向前”路段模型由两个相邻路口(M 、 N)及连接两个路口的一条道路 z 组成,且 $z \in O_M, z \in I_N$,如图1所示。

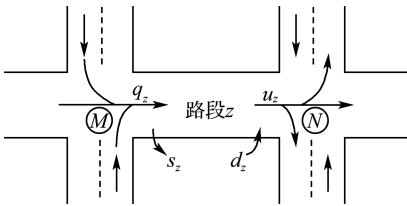


图1 “存储与向前”路段模型

Fig.1 Store-and-forward segment model

根据图1及表1可建立如下的路段模型:

$$x_z(k+1) = x_z(k) + T[q_z(k) - s_z(k) - d_z(k) - u_z(k)] \quad (1)$$

其中

$$q_z(k) = \sum_{w \in I_M} t_{w,z} u_w(k)$$

$$u_z(k) = G_z(k) S_z = \left(\sum_{i \in v_z} g_{N,i}(k) \right) S_z \quad (2)$$

$$s_z(k) = t_{z,o} q_z(k)$$

将式(2)代入式(1),并令 $\mathbf{X}(k+1) = (x_1(k+1) \ x_2(k+1) \ \cdots \ x_{n_x}(k+1))^T$,即可得如下的城市路网拓扑模型:

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{X}(k) + \mathbf{B}\mathbf{U}(k) + \mathbf{d}(k) \quad (3)$$

式中: $\mathbf{X}(k) = (x_1(k) \ x_2(k) \ \cdots \ x_{n_x}(k))^T$,其中的各分量表示 kT 时刻含有 n_x 条路段的路网系统中的各条路段中的车辆数; $\mathbf{U}(k) = (u_1(k) \ u_2(k) \ \cdots \ u_{n_u}(k))^T$,其中的各分量表示 $[kT, (k+1)T]$ 期间路网系统中的全部路口信号灯的各相位绿灯时间占所在信号灯周期的百分比;矩阵 $\mathbf{B}$ 是由路段模型(1)推导得到的系数矩阵;列向量 $\mathbf{d}(k)$ 的各元素分别表示 $[kT, (k+1)T]$ 期间车辆从各路段中途驶入的平均流量。

在实际交通系统中,每个相位时间必须大于最短绿灯时间且小于最长绿灯时间,故控制变量 $\mathbf{U}(k)$ 具有以下约束条件:

$$u_{z,\min} \leq u_z(k) \leq u_{z,\max} \quad (4)$$

其中 $u_{z,\min}$ 、 $u_{z,\max}$ 分别表示路段 z 中车辆有权通过路口的最短、最长相位时间占信号周期的百分比, $u_{z,\min}$ 可以为零,表示相应相位的绿灯时间为零,即出现全红相位。另外,路口 j 的各相位绿灯时间百分比之和应满足

$$\sum_{z=1}^{P_j} u_z(k) \leq 1 - L_j / C_j \quad (5)$$

式中: L_j 表示路口 j 的黄灯时间之和; C_j 表示路口 j 的信号周期; P_j 表示路口 j 的相位数。

1.2 不确定模型

为了使得路网控制系统的控制效果达到一个稳态点,从而协调路网系统中各路段的交通状况,首先给出如下定义:

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_N, \Delta \mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}_N, \Delta \mathbf{d} = \mathbf{d} - \mathbf{d}_N \quad (6)$$

式中: $\mathbf{X}_N$ 表示状态量 $\mathbf{X}$ 的名义值,即各路段的期望车队长度; $\mathbf{U}_N$ 表示控制量 $\mathbf{U}$ 的名义值; $\mathbf{d}_N$ 表示 $\mathbf{d}$ 的名义值,并满足 $\mathbf{d} = \mathbf{d}_N$,则 $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}$ 。由 $\mathbf{X}_N(k+1) = \mathbf{X}_N(k)$ 得如下名义系统:

$$\mathbf{X}_N(k) = \mathbf{X}_N(k) + \mathbf{B}\mathbf{U}_N + \mathbf{d}_N \quad (7)$$

由式(7)可知

$$\mathbf{B}\mathbf{U}_N + \mathbf{d}_N = \mathbf{0} \quad (8)$$

从而求解 $\mathbf{U}_N$ 转化为如下的求可行解问题:

$$\mathbf{B}\mathbf{U}_N + \mathbf{d}_N = \mathbf{0}$$

$$\text{s. t.} \quad u_{z,\min} \leq u_{z,N} \leq u_{z,\max} \quad (9)$$

$$\sum_{z=1}^{P_j} u_{z,N} \leq 1 - L_j / C_j$$

结合式(3)和(7)可得如下状态空间模型:

$$\Delta \mathbf{X}(k+1) = \Delta \mathbf{X}(k) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{U}(k) \quad (10)$$

在实际交通状况中,测量误差、饱和流量的浮动等多种外界因素对交通流量的影响,将会导致

交通模型具有不确定性,为此引入不确定矩阵,则式(10)可以转换为

$$\Delta \mathbf{X}(k+1) = (\mathbf{I} + \Delta \mathbf{A}(k)) \Delta \mathbf{X}(k) + (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}(k)) \Delta \mathbf{U}(k) \tag{11}$$

其中 $\Delta \mathbf{A}(k)$ 和 $\Delta \mathbf{B}(k)$ 为不确定矩阵且满足以下等式:

$$\Delta \mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_a(k) \mathbf{F}_a = \begin{pmatrix} \delta_1^a(k) & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_{n_x}^a(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1^a & & \\ & \ddots & \\ & & \gamma_{n_x}^a \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\Delta \mathbf{B}(k) = \mathbf{E}_b \mathbf{A}_b(k) \mathbf{F}_b = \mathbf{E}_b \begin{pmatrix} \delta_1^b(k) & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_{n_u}^b(k) \end{pmatrix} \mathbf{F}_b \tag{13}$$

其中 $\|\mathbf{A}_a(k)\| \leq 1, \|\mathbf{A}_b(k)\| \leq 1, \mathbf{F}_a, \mathbf{E}_b$ 和 $\mathbf{F}_b$ 为适当维数的矩阵.

2 鲁棒预测控制

针对具有不确定参数的城市路网模型(11),采用基于 LMI 的鲁棒预测控制方法,设计一个状态反馈控制器调节每个路口各相位的绿灯时间,从而解决城市路网系统拥堵问题.在给出主要定理前,首先引入以下引理:

引理 1^[13] 设 $\mathbf{W}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{G}$ 为具有适当维数的实矩阵,其中 $\mathbf{G}$ 满足 $\mathbf{G}^T \mathbf{G} \leq \mathbf{I}, \mathbf{W}$ 为对称矩阵,那么

$$\mathbf{W} + \mathbf{N}^T \mathbf{G}^T \mathbf{M}^T + \mathbf{M} \mathbf{G} \mathbf{N} < \mathbf{0} \tag{14}$$

当且仅当存在常数 $\epsilon > 0$,使得

$$\mathbf{W} + \epsilon^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} + \epsilon \mathbf{M} \mathbf{M}^T < \mathbf{0}$$

2.1 无穷时域极小-极大问题

首先定义如下的无穷时域性能指标:

$$\min_{\Delta \mathbf{U}(k+i|k), i \geq 0} \max_{[A(k+i)B(k+i)] \in \Omega, i \geq 0} J(k) \\ J(k) = \sum_{i=0}^{\infty} [\Delta \mathbf{X}^T(k+i|k) \mathbf{S} \Delta \mathbf{X}(k+i|k) + \Delta \mathbf{U}^T(k+i|k) \mathbf{R} \Delta \mathbf{U}(k+i|k)] \tag{15}$$

式中: $\mathbf{S}$ 和 $\mathbf{R}$ 为给定的对称正定加权矩阵; $\Delta \mathbf{X}(k) = \Delta \mathbf{X}(k|k)$ 为 kT 时刻的状态测量值; $\Delta \mathbf{X}(k+i|k)$ 为 kT 时刻对 $(k+i)T$ 时刻的状态预测值; $\Delta \mathbf{U}(k+i|k)$ 为 kT 时刻求得的 $(k+i)T$ 时刻的最优控制输入.

本文的目的是设计一个如下所示的无记忆状态反馈控制器:

$$\Delta \mathbf{U}(k+i|k) = \mathbf{K}(k) \Delta \mathbf{X}(k+i|k) \tag{16}$$

使得对所有允许的不确定性,闭环系统

$$\Delta \mathbf{X}(k+1) = [\mathbf{I} + \Delta \mathbf{A}(k) + (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}(k)) \mathbf{K}(k)] \Delta \mathbf{X}(k) \tag{17}$$

稳定.

定理 1 对于闭环系统(17),如果存在矩阵 $\mathbf{Q}(k), \mathbf{Y}(k)$ 以及常数 $\xi_1(k), \xi_2(k)$ 和 $\gamma(k)$,使得以下优化问题

$$\min_{\xi_1(k), \xi_2(k), \gamma(k), \mathbf{Q}(k), \mathbf{Y}(k)} \gamma(k) \\ \text{s. t.} \quad \begin{pmatrix} -1 & \Delta \mathbf{X}^T(k|k) \\ * & -\mathbf{Q}(k) \end{pmatrix} \leq \mathbf{0} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}(k) & \mathbf{\Phi}(k) \\ * & \mathbf{\Psi}(k) \end{pmatrix} < \mathbf{0} \tag{18}$$

有解,则存在状态反馈控制器(16),使得闭环系统(17)渐近稳定. 其中

$$\mathbf{\Gamma}(k) = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}^{-1} \gamma(k) & \mathbf{0} & \mathbf{Y}(k) \\ * & \mathbf{H}_1(k) & \mathbf{H}_2(k) \\ * & * & -\mathbf{Q}(k) \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}_1(k) = -\mathbf{Q}(k) + \xi_1(k) \mathbf{I} + \mathbf{E}_b \mathbf{E}_b^T \xi_2(k) \\ \mathbf{H}_2(k) = \mathbf{Q}(k) + \mathbf{B} \mathbf{Y}(k) \\ \mathbf{\Phi}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}^T(k) \mathbf{F}_b^T & \mathbf{Q}(k) \mathbf{F}_a^T & \mathbf{Q}(k) \mathbf{S}^{1/2} \end{pmatrix} \\ \mathbf{\Psi}(k) = \begin{pmatrix} -\xi_2(k) \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & -\xi_1(k) \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & * & -\gamma(k) \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

状态反馈控制器增益 $\mathbf{K}(k) = \mathbf{Y}(k) \mathbf{Q}^{-1}(k)$.

证明 选取 Lyapunov 函数 $V(k) = \Delta \mathbf{X}^T(k) \cdot \mathbf{P}(k) \Delta \mathbf{X}(k)$, 其中 $\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}^T(k) > \mathbf{0}$. 若以下不等式

$$V(k+i+1|k) - V(k+i|k) \leq -[\Delta \mathbf{X}^T(k+i|k) \mathbf{S} \Delta \mathbf{X}(k+i|k) + \Delta \mathbf{U}^T(k+i|k) \mathbf{R} \Delta \mathbf{U}(k+i|k)] \tag{19}$$

成立,则式(19)满足 Lyapunov 稳定条件:

$$V(k+i+1|k) - V(k+i|k) \leq 0 \tag{20}$$

从而可知闭环系统(17)渐近稳定.

将闭环系统(17)代入不等式(19)可得

$$\mathbf{L}^T(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{L}(k) - \mathbf{P}(k) + \mathbf{S} + \mathbf{K}^T(k) \mathbf{R} \mathbf{K}(k) \leq \mathbf{0} \tag{21}$$

其中 $\mathbf{L}(k) = \mathbf{I} + \Delta \mathbf{A}(k) + \mathbf{B} \mathbf{K}(k) + \Delta \mathbf{B}(k) \mathbf{K}(k)$.

对式(21)应用 Schur 补定理可得

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{K}(k) \\ * & -\mathbf{P}^{-1}(k) & \mathbf{L}(k) \\ * & * & -\mathbf{P}(k) + \mathbf{S} \end{pmatrix} \leq \mathbf{0} \tag{22}$$

对式(22)依次应用引理 1 和 Schur 补定理可知,上式成立当且仅当存在常数 $\epsilon_1(k) > 0$ 和 $\epsilon_2(k) > 0$ 满足

$$\begin{pmatrix} \bar{\Gamma}(k) & \bar{\Phi}(k) \\ * & \bar{\Psi}(k) \end{pmatrix} \leq 0 \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}(k) &= \begin{pmatrix} -\mathbf{R}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{K}(k) \\ * & \bar{\mathbf{H}}_1(k) & \bar{\mathbf{H}}_2(k) \\ * & * & -\mathbf{P}(k) \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{H}}_1(k) &= -\mathbf{P}^{-1}(k) + \varepsilon_1(k)\mathbf{I} + \varepsilon_2(k)\mathbf{E}_b\mathbf{E}_b^\top \\ \bar{\mathbf{H}}_2(k) &= \mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{K}(k) \\ \bar{\Phi}(k) &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^\top(k)\mathbf{F}_b^\top & \mathbf{F}_a^\top & \mathbf{S}^{1/2} \end{pmatrix} \\ \bar{\Psi}(k) &= \begin{pmatrix} -\varepsilon_2(k)\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & -\varepsilon_1(k)\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

对式(23)两边分别左乘、右乘矩阵 $\text{diag}\{\gamma^{1/2}(k)\mathbf{I}, \gamma^{1/2}(k)\mathbf{I}, \gamma^{1/2}(k)\mathbf{I}, \gamma^{1/2}(k)\mathbf{P}^{-1}(k), \gamma^{1/2}(k)\mathbf{I}, \gamma^{1/2}(k)\mathbf{I}, \gamma^{1/2}(k)\mathbf{I}\}$, 并令 $\mathbf{Q}(k) = \gamma(k)\mathbf{P}^{-1}(k)$, $\mathbf{Y}(k) = \gamma(k)\mathbf{K}(k)\mathbf{P}^{-1}(k)$, $\xi_1(k) = \varepsilon_1(k)\gamma(k)$, $\xi_2(k) = \varepsilon_2(k)\gamma(k)$, 可得式(18)的条件2.

将式(19)两边从 $i=0$ 到 $i=\infty$ 求和可得

$$J(k) \leq V(k) \quad (24)$$

令 Lyapunov 函数的上界为 $\gamma(k)$, 则由上式可得

$$J(k) \leq V(k) \leq \gamma(k) \quad (25)$$

即求解性能指标 $J(k)$ 的上界可转化为求解 $V(k)$ 的上界. 由上式可得

$$V(k) = \Delta \mathbf{X}^\top(k) \mathbf{P}(k) \Delta \mathbf{X}(k) \leq \gamma(k) \quad (26)$$

对式(26)应用 Schur 补定理可得到式(18)的条件1.

2.2 约束处理

为了使用线性矩阵不等式处理方法处理鲁棒预测控制, 需要对约束(4)、(5)进行必要的处理.

首先, 根据问题(9)求得 $\mathbf{U}_N$ 后, 式(4)、(5)的左右两边分别减去控制变量的名义值 $\mathbf{U}_N$, 并令 $u_{z,\min} = 0$, 每个路口的信号周期均为 C , 则式(4)、(5)可转换为

$$-u_{z,N} \leq \Delta u_z(k+i|k) \leq u_{z,\max} - u_{z,N} \quad (27)$$

$$\mathbf{w}_j^\top \Delta \mathbf{U}(k+i|k) \leq 1 - \sum_{z=1}^{P_j} u_{z,N} - L_j/C = b_j \quad (28)$$

其中 $\mathbf{w}_j$ 是与 $\sum_{z=1}^{P_j}$ 对应的元素为1或0的列向量.

首先, 对约束(27)作如下处理:

$$|\Delta u_z| \leq u_z^* \quad (29)$$

其中

$$u_z^* = \begin{cases} u_{z,\max} - u_{z,N}; & u_{z,N} \geq u_{z,\max}/2 \\ u_{z,N}; & u_{z,N} < u_{z,\max}/2 \end{cases} \quad (30)$$

进而将式(30)转换为以下线性矩阵不等式:

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ * & -\mathbf{Q} \end{pmatrix} \leq 0; \quad X_{jj} \leq (u_z^*)^2, \quad j=1, \dots, n_u \quad (31)$$

同理, 可将约束(28)转换为

$$|\mathbf{w}_j^\top \Delta \mathbf{U}(k+i|k)| \leq |b_j| \quad (32)$$

由式(32)可得如下线性矩阵不等式:

$$\begin{pmatrix} -b_j^2 & \mathbf{w}_j^\top \mathbf{Y} \\ * & -\mathbf{Q} \end{pmatrix} \leq 0; \quad j=1, \dots, n_u \quad (33)$$

2.3 鲁棒预测控制算法

对城市路网采用鲁棒控制策略, 能有效处理由测量误差、饱和和流量的浮动等引起的交通状态的不确定性. 本文提出的鲁棒预测控制算法步骤具体如下:

步骤1 在控制算法迭代初始时刻, 设 $k=0, \mathbf{K}=\mathbf{0}$.

步骤2 算法迭代开始, 采集 kT 时刻的状态量, 并在线求解优化问题(18)、(31)、(33), 得到最优解 $\mathbf{Q}(k), \mathbf{Y}(k)$, 进而得到控制器增益

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{Y}(k)\mathbf{Q}(k)$$

步骤3 求解得到控制量 $\Delta \mathbf{U}(k) = \mathbf{K}(k) \cdot \Delta \mathbf{X}(k)$.

步骤4 进入下一采样时刻, 令 $k=k+1$, 返回步骤2.

3 仿真与实现

在仿真与实现中, 考虑采用包含4个路口的路网系统, 如图2所示.

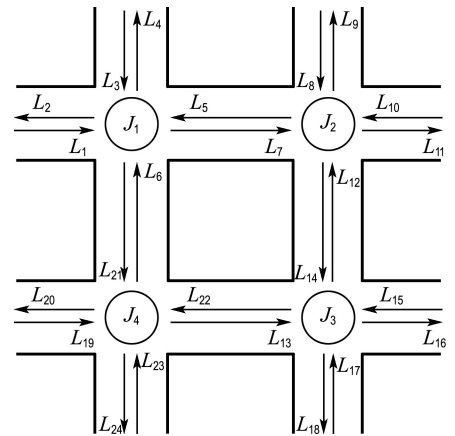


图2 4个路口的路网系统

Fig.2 Road network of four intersections

该路网系统共包含24条车道 $\{L_1, L_2, \dots, L_{24}\}$, 但是受控的车道只有 $\{L_1, L_3, L_5, L_6, L_7,$

$L_8, L_{10}, L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{15}, L_{17}, L_{19}, L_{21}, L_{22}, L_{23}\}$.

各车道的转弯率如下:

$t_{1,4}=0.05, t_{1,21}=0.15, t_{3,2}=0.12, t_{3,7}=0.20,$
 $t_{5,4}=0.05, t_{5,21}=0.15, t_{6,2}=0.12, t_{6,7}=0.20,$
 $t_{7,9}=0.05, t_{7,14}=0.15, t_{8,5}=0.20, t_{8,11}=0.12,$
 $t_{10,9}=0.15, t_{10,14}=0.15, t_{12,5}=0.20, t_{12,11}=0.12,$
 $t_{13,12}=0.15, t_{13,18}=0.05, t_{14,22}=0.20, t_{14,16}=0.12,$
 $t_{15,12}=0.15, t_{15,18}=0.10, t_{17,22}=0.20, t_{17,16}=0.12,$
 $t_{19,6}=0.15, t_{19,24}=0.15, t_{21,20}=0.12, t_{21,13}=0.20,$
 $t_{22,6}=0.15, t_{22,24}=0.05, t_{23,20}=0.12, t_{23,13}=0.20$

定义 $p=ST$,且

$p_1=40, p_3=50, p_5=50, p_6=50;$
 $p_7=45, p_8=50, p_{10}=50, p_{12}=50;$
 $p_{13}=50, p_{14}=50, p_{15}=50, p_{17}=50;$
 $p_{19}=50, p_{21}=50, p_{22}=50, p_{23}=50$

每个路口的信号灯周期均为 $C=120\text{ s}$, 其中, 黄灯损失时间为 $L_1=L_2=L_3=L_4=16\text{ s}$, 每个周期含有 4 个相位, 如图 3 所示.

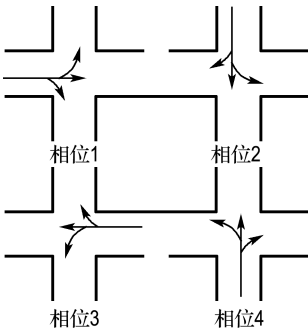


图 3 路口的相位示意图

Fig. 3 Phase diagram of intersections

名义系统的 $\mathbf{X}_N$ 和 $\mathbf{d}_N$ 分别为

$\mathbf{X}_N=(25\ 25\ 20\ 20\ 20\ 25\ 25\ 20$
 $20\ 20\ 25\ 25\ 25\ 20\ 20\ 25)^T$
 $\mathbf{d}_N=(9\ 9\ 0\ 0\ 0\ 9\ 9\ 0\ 0\ 0$
 $9\ 9\ 9\ 0\ 0\ 9)^T$

根据式(9)可求解得 $\mathbf{U}_N$. 选取加权矩阵 $\mathbf{S}=\mathbf{I}, \mathbf{R}=1\ 000\mathbf{I}$. 采用鲁棒预测控制方法, 设计控制器调节路口信号灯, 使得路口车队长度趋于期望值, 从而缓解交通拥堵.

根据本文所提的鲁棒预测控制算法, 在 kT 时刻在线求解优化问题(18)、(31)、(32), 可求得每个采样时刻的输入控制 $\mathbf{U}(k)$, 现选取路口 J_1 作为分析对象, 其控制输入如图 4 所示, 其中横坐标表示时间, 纵坐标表示 J_1 路口各相位时间所占信号周期的百分比. 由图 4 可知, 控制输入量满足

输入约束 $\sum_{m=1}^4 u_m(k) \leq 13/15$ 和 $\mathbf{0} \leq (u_1(k) \ u_2(k) \ u_3(k) \ u_4(k))^T \leq (0.45 \ 0.36 \ 0.40 \ 0.36)^T$. 采用鲁棒预测控制后的闭环系统状态轨迹和无控制作用时的状态量如图 5 所示.

对比图 5 中(a)、(b)可知, 在无控制情况下, J_1 路口的各车队长度逐渐变长, 导致交通拥堵状况恶化; 采用本文提出的具有输入约束的状态反馈控制器, J_1 路口的车道 L_1 、 L_3 和 L_6 中的车队长度经过多个信号周期的控制调整后趋于期望的车队长度, 防止了拥堵状况的恶化, 有效缓解了路口的拥堵状况.

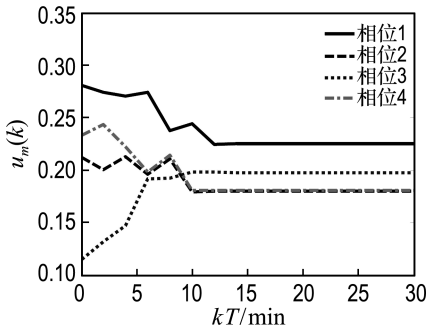
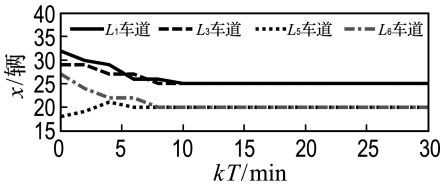
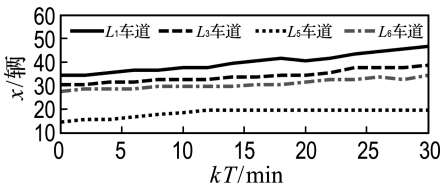


图 4 路口 J_1 的控制输入

Fig. 4 Control inputs of intersection J_1



(a) 鲁棒预测控制



(b) 无控制

图 5 路口 J_1 的状态轨迹

Fig. 5 State trajectory of intersection J_1

4 结 语

本文将“存储与向前”路段模型改进为具有不确定性的路网系统模型, 并且使得输入量满足一定的约束条件, 采用鲁棒预测控制方法解决了带有约束的凸优化问题. 仿真研究表明: 系统满足约束条件, 具有较强的鲁棒性, 能有效协调路网系统中的交通状况.

参考文献:

- [1] Papageorgiou M, Diakaki C, Dinopoulou V, *et al.* Review of road traffic control strategies [J]. **Proceedings of the IEEE**, 2003, **91**(12):2043-2065.
- [2] Bruno G, Improta G. Urban traffic control: current methodologies [M] // **Artificial Intelligence Applications to Traffic Engineering**. Zeist: VSP International Science Publishers, 1994:69-93.
- [3] Burger M, Van Den Berg M, Hegyi A, *et al.* Considerations for model-based traffic control [J]. **Transportation Research Part C: Emerging Technologies**, 2013, **35**:1-19.
- [4] Daganzo C F. Cell transmission model: a dynamic representation of highway traffic consistent with the hydrodynamic theory [J]. **Transportation Research Part B: Methodological**, 1994, **28**(4):269-287.
- [5] Diakaki C, Papageorgiou M, Aboudolas K. A multivariable regulator approach to traffic-responsive network-wide signal control [J]. **Control Engineering Practice**, 2002, **10**(2):183-195.
- [6] Aboudolas K, Papageorgiou M, Kosmatopoulos E. Store-and-forward based methods for the signal control problem in large-scale congested urban road networks [J]. **Transportation Research Part C: Emerging Technologies**, 2009, **17**(2):163-174.
- [7] De Souza F A, Peccin V B, Camponogara E. Distributed model predictive control applied to urban traffic networks; Implementation, experimentation, and analysis [C] // **2010 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering, CASE 2010**. Piscataway: IEEE Robotics and Automation Society, 2010:399-405.
- [8] De Oliveira L B, Camponogara E. Multi-agent model predictive control of signaling split in urban traffic networks [J]. **Transportation Research Part C: Emerging Technologies**, 2010, **18**(1):120-139.
- [9] LIN Shu, De Schutter B, XI Yu-geng, *et al.* Efficient network-wide model-based predictive control for urban traffic networks [J]. **Transportation Research Part C: Emerging Technologies**, 2012, **24**:122-140.
- [10] Ng K M, Reaz M B I, Ali M A M. A review on the applications of petri nets in modeling, analysis, and control of urban traffic [J]. **IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems**, 2013, **14**(2):858-870.
- [11] Le T, Vu H L, Nazarathy Y, *et al.* Linear-quadratic model predictive control for urban traffic networks [J]. **Transportation Research Part C: Emerging Technologies**, 2013, **36**:498-512.
- [12] Wakasa Y, Iwaoka K, Tanaka K. Modelling and robust control of traffic signal systems [C] // **European Control Conference, ECC 2003**. Piscataway: IEEE, 2003:1928-1933.
- [13] 樊卫华, 蔡 骅, 陈庆伟, 等. 时延网络控制系统的稳定性[J]. **控制理论与应用**, 2004, **21**(6):880-884.
FAN Wei-hua, CAI Hua, CHEN Qing-wei, *et al.* Stability of networked control systems with time-delay [J]. **Control Theory & Applications**, 2004, **21**(6):880-884. (in Chinese)

Robust predictive control for urban road network

LIU An-dong*, LI Jia, YU Li

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: For urban road network system with model uncertainty, a robust predictive state feedback controller is designed to ensure the closed-loop system asymptotically stable. Firstly, the store-and-forward segment linear model is extended to the urban road network topology model. Considering the influence of saturation flow rate and vehicle number uncertainty caused by the road conditions change and the error of measurement, the urban road network system model with parameters uncertainty is proposed. Furthermore, a convex optimization problem with constraints is solved by linear matrix inequality (LMI) treatment to design the state feedback controller. Finally, the effectiveness of the proposed method to alleviate the urban traffic congestion and optimize the signal lights is demonstrated by Matlab simulation.

Key words: robust predictive control; urban road network system; parameter uncertainty; linear matrix inequality (LMI)