第56卷第3期
2016年5月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 56, No. 3
May 2016

文章编号：1000-8608(2016)03-0309-04

# 完全二部图 $K_{5,7}$ 点强可区别全染色方案探讨

王蓓蓓[1]，祁丽娟*[2]，刘信生[1]，陈祥恩[1]

（1. 西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070；
2. 兰州工业学院 基础学科部，甘肃 兰州 730050）

**摘要**：利用组合分析的方法先讨论了完全二部图 $K_{5,7}$ 的点强可区别全染色，在此基础之上给出了两种具体的关于完全二部图 $K_{5,7}$ 的点强可区别全染色方案. 此结果的给出不仅确定了完全二部图 $K_{5,7}$ 的点强可区别全色数为 9，而且对于胡志涛所提出的关于完全二部图的点强可区别全染色的猜想："如果 $m\geqslant 4$ 且 $n<2m-2$ 时，那么 $\chi_{\mathrm{vst}}(K_{m,n})=n+3$" 中当 $m=5$ 时作出了否定，从而进一步确定了此猜想成立的范围.

**关键词**：正常全染色；完全二部图；点强可区别全染色；点强可区别全色数

**中图分类号**：O157.5　　**文献标识码**：A　　**doi**：10.7511/dllgxb201603014

## 0 引言

图染色的基本问题就是确定其各种染色法的色数. 图的染色问题一直是图论研究的重要问题之一，具有重要的理论和实际意义. 现实生活中的许多领域都会涉及图的着色，如任务分配问题、排课表问题、存储问题、交通定向问题等. 所以染色问题一直是图论研究领域较为活跃的一部分. 文献[1]中，Zhang 等提出了邻点强可区别全染色的概念，并研究讨论了完全二部图的邻点强可区别全染色. 在文献[2]中胡志涛等通过对图的邻点强可区别全染色的要求加强之后提出了图的点强可区别正常全染色，并研究了完全二部图 $K_{4,n}$($n>4$)的点强可区别全染色；文献[3-4]研究了当 $1\leqslant m\leqslant 3$ 时的完全二部图 $K_{m,n}$($m\leqslant n$)的点强可区别全染色；文献[5-8]给出了一些相关染色的结果. 本文讨论完全二部图 $K_{5,7}$ 的点强可区别全色数的确切值，以进一步拓宽图的染色理论的应用范围.

## 1 定义

**定义 1** 设 $G=(V,E)$，$f$ 是从 $V\cup E$ 到 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的一个映射，其中 $k$ 是正整数. 对任意 $x\in V$，令 $C[x]=\{f(x)\}\cup\{f(y)\mid y\in V, y$ 和 $x$ 相邻$\}\cup\{f(e)\mid e\in E, e$ 和 $x$ 相关联$\}$，称之为 $x$ 在 $f$ 下的强色集合. 令 $\overline{C}[x]=\{1,2,\cdots,k\}\backslash C[x]$.

若：(i)对任意 $uv,uw\in E$，$v\neq w$，有 $f(uv)\neq f(uw)$；

(ii)对任意 $uv\in E$，$f(u)\neq f(v)$，有 $f(u)\neq f(uv)$，$f(v)\neq f(uv)$；

(iii)对任意 $u,v\in V$，$u\neq v$，有 $C[u]\neq C[v]$

那么称 $f$ 是图 $G$ 的一个使用了 $k$ 种颜色的点强可区别正常全染色. 简记为 $k$-VSDTC，且称 $\chi_{\mathrm{vst}}(G)=\min\{k\mid G$ 存在 $k$-VSDTC$\}$ 为 $G$ 的点强可区别全色数.

在本文中设 $V(K_{5,7})=\{u_1,u_2,\cdots,u_5,v_1,v_2,\cdots,v_7\}$，$E(K_{5,7})=\{u_iv_j\mid i=1,2,\cdots,5, j=1,2,\cdots,7\}$. 并且为了表示和叙述的简洁，用$[n,m]$表示集合$\{n,n+1,n+2,\cdots,m\}$，用$[n]$表示集合$\{1,2,\cdots,n\}$.

## 2 主要结果

**引理 1**[9] 如果 $2\leqslant m<n$，那么 $n+2\leqslant\chi_{\mathrm{vst}}(K_{m,n})\leqslant n+3$.

**定理 1** 设 $K_{5,7}$ 为完全二部图，则 $\chi_{\mathrm{vst}}(K_{5,7})=9$.

**证明** 由引理 1 可以看出 $9\leqslant\chi_{\mathrm{vst}}(K_{5,7})\leqslant 10$. 下面探讨使用 9 种色的 $K_{5,7}$ 点强可区别全染色是否存在，如果存在，有哪些染色方案.

**收稿日期**：2015-12-05；　**修回日期**：2016-03-20.
**基金项目**：国家自然科学基金资助项目(61163037，61163054，61363060).
**作者简介**：王蓓蓓(1990-)，女，硕士生，E-mail：924174362@163.com；祁丽娟*(1972-)，女，副教授，E-mail：282455295@qq.com.

假设 $K_{5,7}$ 有一使用了颜色1、2、3、4、5、6、7、8、9的9-VSDTC $f$，设在本文的染色过程中，点 $u_i(i=1,2,\cdots,5)$ 均染以颜色1，进而根据点 $v_j(j=1,2,\cdots,7)$ 的染色分以下情形讨论：

**情形1** 当 $f(v_1)=f(v_2)=f(v_3)=f(v_4)=f(v_5)=f(v_6)=f(v_7)=2$ 时，$f(u_iv_j)\in[3,9]$，$i=1,2,\cdots,5$，$j=1,2,\cdots,7$，此时无论边 $f(u_iv_j)$ 如何染以颜色均导致 $C[u_i]$ 及 $C[v_j]$ 不可区别，矛盾.

**情形2** 当 $f(v_1)=f(v_2)=f(v_3)=f(v_4)=f(v_5)=f(v_6)=2$，$f(v_7)=3$ 时，$f(u_iv_j)\in[2,9]$，不失一般性，设 $f(u_1v_1)=3$，则 $f(u_1v_j)\in\{2,4,5,6,7,8,9\}$，$j=2,3,\cdots,7$. 因为 $f(v_j)=2$，$j=1,2,\cdots,6$，可知边 $u_1v_7$ 的色是2，或者任意一条边的色都不是2，据此再分以下两种情形讨论：

(1) $f(u_1v_7)=2$

由 $f(u_1v_j)\in[4,9]$，$j=2,3,\cdots,6$. 不失一般性，设 $f(u_1v_2)=4$，$f(u_1v_3)=5$，$f(u_1v_4)=6$，$f(u_1v_5)=7$，$f(u_1v_6)=8$，有 $C[u_1]=[8]$，此时点 $u_1$ 的强色集合已被确定. 又因为 $f(u_1v_1)=3$ 且 $f(u_2)=1$，$f(v_1)=2$，所以边 $u_2v_1$ 的色不是3. 由 $f(u_2v_1)\in[4,9]$，不失一般性，可设 $f(u_2v_1)=4$，同理可知，边 $u_2v_2$ 的色不是4，边 $u_2v_3$ 的色不是5，边 $u_2v_4$ 的色不是6，边 $u_2v_5$ 的色不是7，边 $u_2v_6$ 的色不是8，边 $u_2v_7$ 的色不是2. 由 $f(u_2v_j)\in\{2,3,5,6,7,8,9\}$，不失一般性，可设 $f(u_2v_2)=3$，$f(u_2v_3)=6$，$f(u_2v_4)=7$，$f(u_2v_5)=8$，$f(u_2v_6)=9$，$f(u_2v_7)=5$. 此时 $C[u_1]=C[u_2]$，即点 $u_1$、$u_2$ 的强色集合不可区别，矛盾.

(2) $f(u_1v_7)\neq 2$

不失一般性，设 $f(u_1v_7)=9$，$f(u_1v_2)=4$，$f(u_1v_3)=5$，$f(u_1v_4)=6$，$f(u_1v_5)=7$，$f(u_1v_6)=8$，而此时边 $u_2v_j$ 无法按点强可区别的要求染以颜色，矛盾.

**情形3** 当 $f(v_1)=f(v_2)=f(v_3)=f(v_4)=f(v_5)=2$，$f(v_6)=f(v_7)=3$ 时，$f(u_iv_j)\in[2,9]$，不失一般性，设 $f(u_1v_1)=3$，$f(u_1v_2)=4$，$f(u_1v_3)=5$，$f(u_1v_4)=6$，$f(u_1v_5)=7$，$f(u_1v_6)=8$，$f(u_1v_7)=2$，有 $C[u_1]=[8]$. 因为 $f(u_1v_1)=3$，可知边 $u_2v_1$ 的色既不是2也不是3. 由 $f(u_2v_j)\in[2,9]$，$j=1,2,\cdots,7$，不失一般性，可设 $f(u_2v_1)=4$，$f(u_2v_4)=7$，$f(u_2v_5)=3$，$f(u_2v_6)=2$，$f(u_2v_7)=9$，可知 $C[u_2]=\{1,2,3,4,5,6,7,9\}$，且 $C[u_1]=C[u_2]$. 由 $f(u_1v_7)=f(u_2v_6)=2$ 且 $f(v_j)=2$，$j=1,2,\cdots,5$，所以 $f(u_3v_j)\in[3,9]$，$j=1,2,\cdots,7$. 同理，$f(u_4v_j)\in[3,9]$，$j=1,2,\cdots,7$，此时无论边 $u_4v_j$ 如何染以颜色，均导致 $C[u_3]=C[u_4]$，矛盾.

**情形4** 当 $f(v_1)=f(v_2)=f(v_3)=f(v_4)=2$，$f(v_5)=f(v_6)=3$，$f(v_7)=4$ 时，由 $f(u_iv_j)\in[2,9]$，可知边 $u_iv_5$、$u_iv_6$，$i=1,2,\cdots,5$ 的色都不是3，边 $u_iv_7$ 的色不是4，不失一般性，设 $f(u_1v_1)=3$，$f(u_1v_2)=4$，同理可得颜色2也只能用于染边 $u_iv_5$、$u_iv_6$、$u_iv_7$，$i=1,2,\cdots,5$，此时 $f(u_1v_j)\in[5,9]$，$j=3,4,5,6$. 不妨设 $f(u_1v_3)=5$，$f(u_1v_4)=6$，$f(u_1v_5)=7$，$f(u_1v_6)=8$，$f(u_1v_7)=2$，显然 $\overline{C}[u_1]=\{9\}$，由 $f(u_1v_1)=3$，可知边 $u_2v_1$ 的色不是3. 不失一般性，可设 $f(u_2v_1)=4$，同理可设 $f(u_2v_2)=3$，$f(u_2v_3)=6$，$f(u_2v_4)=7$，$f(u_2v_5)=8$，$f(u_2v_6)=2$，$f(u_2v_7)=9$，显然 $\overline{C}[u_2]=\{5\}$，$C[u_1]\neq C[u_2]$. 根据 $f(u_1v_1)=3$，$f(u_2v_1)=4$，可知 $f(u_3v_1)\in[5,9]$，不妨设 $f(u_3v_1)=5$，同理可设 $f(u_3v_2)=6$，$f(u_3v_3)=3$，$f(u_3v_4)=4$，$f(u_3v_5)=2$，$f(u_3v_6)=9$，$f(u_3v_7)=8$，此时，$\overline{C}[u_3]=\{7\}$ 且点 $u_1$、$u_2$、$u_3$ 的强色集合互不相等. 由 $f(u_1v_7)=2$，$f(u_2v_6)=2$，$f(u_3v_5)=2$，以及 $f(u_4v_j)\in[3,9]$，$j=1,2,\cdots,7$，可知此时无论边 $u_4v_j$ 如何染以颜色，均有 $\overline{C}[u_4]=\varnothing$ 且点 $u_1$、$u_2$、$u_3$、$u_4$ 的强色集合互不相等. 同理可知，$f(u_5v_j)\in[3,9]$，此时无论边 $u_5v_j$ 如何染以颜色，均有 $\overline{C}[u_5]=\overline{C}[u_4]=\varnothing$，矛盾.

**情形5** 当 $f(v_1)=f(v_2)=f(v_3)=2$，$f(v_4)=f(v_5)=3$，$f(v_6)=f(v_7)=4$ 时，由 $f(u_iv_j)\in[2,9]$，可知边 $u_iv_1$、$u_iv_2$、$u_iv_3$，$i=1,2,\cdots,5$ 均不可染以颜色2，不失一般性，可设 $f(u_1v_1)=3$，$f(u_1v_2)=4$，$f(u_1v_3)=5$，$f(u_1v_4)=6$，$f(u_1v_5)=7$，$f(u_1v_6)=8$，$f(u_1v_7)=2$，可得 $\overline{C}[u_1]=\{9\}$. 由 $f(u_1v_7)=2$，可知边 $u_2v_7$ 的色不是2. 不妨设 $f(u_2v_6)=2$，此时根据边 $u_1v_j$ 的染色，不失一般性，可设 $f(u_2v_1)=4$，$f(u_2v_2)=3$，$f(u_2v_3)=7$，$f(u_2v_4)=8$，$f(u_2v_5)=9$，$f(u_2v_7)=5$，显然有 $\overline{C}[u_2]=\{6\}$，此时 $C[u_1]\neq C[u_2]$. 又因为 $f(u_1v_7)=2$，$f(u_2v_6)=2$，所以 $f(u_3v_7)\neq 2$ 且 $f(u_3v_6)\neq 2$. 由 $f(u_3v_j)\in[2,9]$，$j=1,2,\cdots,7$，不妨设 $f(u_3v_5)=2$，$f(u_3v_1)=9$，$f(u_3v_2)=8$，$f(u_3v_3)=3$，$f(u_3v_4)=4$，$f(u_3v_6)=5$，$f(u_3v_7)=6$. 可得 $\overline{C}[u_3]=\{7\}$ 且点 $u_1$、$u_2$、$u_3$ 的强色集合互不相等. 又因为 $f(u_1v_7)=2$，$f(u_2v_6)=2$，

$f(u_3v_5)=2$，所以在边 $u_4v_j$，$j=1,2,\cdots,7$ 中，只有 $u_4v_4$ 边可以染以颜色 2，下面根据 $u_4v_4$ 边是否选择染以颜色 2 分以下两种情形讨论：

(1) $f(u_4v_4)=2$

由 $f(u_4v_j)\in[2,9]$，$j=1,2,\cdots,7$ 且 $f(u_1v_1)=3$，$f(u_1v_2)=4$ 和 $f(u_2v_1)=4$，$f(u_2v_2)=3$，知 $f(u_4v_j)\in[5,9]$，$j=1,2,3,5,6,7$. 不失一般性，可设 $f(u_4v_1)=7$，$f(u_4v_2)=6$，$f(u_4v_3)=5$，$f(u_4v_5)=8$，$f(u_4v_6)=9$，$f(u_4v_7)=3$. 此时 $\overline{C}[u_4]=\varnothing$，进而可知 $f(u_5v_j)\neq 2$. 所以 $f(u_5v_j)\in[3,9]$，$j=1,2,\cdots,7$，此时导致 $u_5v_j$ 边无法正常染色，矛盾.

(2) $f(u_4v_4)\neq 2$

由 $f(u_4v_j)\in[2,9]$，$j=1,2,\cdots,7$ 及 $f(u_1v_4)=6$，$f(u_2v_4)=8$ 和 $f(u_3v_4)=4$，$f(v_4)=3$，可设 $f(u_4v_4)=5$，$f(u_4v_1)=8$，$f(u_4v_2)=7$，$f(u_4v_3)=6$，$f(u_4v_5)=4$，$f(u_4v_6)=3$，$f(u_4v_7)=9$，此时 $\overline{C}[u_4]=\varnothing$. 因为 $f(u_4v_j)\neq 2$，$j=1,2,\cdots,7$，所以边 $u_5v_j(j\neq 4)$ 的色都不是 2. 以下根据边 $u_5v_4$ 是否染以颜色 2 分两种情形讨论：

① $f(u_5v_4)\neq 2$

由 $f(u_5v_j)\in[3,9]$，$j=1,2,3,5,6,7$ 可知 $C[u_5]$ 中不含颜色 2，即 $\overline{C}[u_5]=\{2\}$. 根据 $f(u_iv_j)$，$i=1,2,3,4$，$j=1,2,\cdots,7$ 的染色，可设 $f(u_5v_1)=5$，$f(u_5v_2)=9$，$f(u_5v_3)=4$，$f(u_5v_4)=7$，$f(u_5v_5)=8$，$f(u_5v_6)=6$，$f(u_5v_7)=3$，此时可得点 $u_1$、$u_2$、$u_3$、$u_4$、$u_5$ 的强色集合互不相等，但 $\overline{C}[v_2]=\overline{C}[v_5]=\{5,6\}$，所以点 $v_2$、$v_5$ 的强色集合不可区别，矛盾.

② $f(u_5v_4)=2$

此时有 $f(u_5v_j)\in[3,9]$，$j=1,2,3,5,6,7$. 又因为 $\overline{C}[u_1]=\{9\}$，$\overline{C}[u_2]=\{6\}$，$\overline{C}[u_3]=\{7\}$，$\overline{C}[u_4]=\varnothing$，为了使点 $u_1$、$u_2$、$u_3$、$u_4$、$u_5$ 的强色集合两两可区别，则必有 $\overline{C}[u_5]=\{5\}$. 而由 $f(u_1v_1)=f(u_2v_2)=f(u_3v_3)=f(u_4v_6)=3$，可知颜色 3 只能用于染边 $u_5v_7$，即 $f(u_5v_7)=3$. 同理可得颜色 4 只能用于染边 $u_5v_3$，即 $f(u_5v_3)=4$. 进而可得 $f(u_5v_1)=7$，$f(u_5v_2)=6$，$f(u_5v_5)=8$，$f(u_5v_6)=9$. 此时可得 $\overline{C}[u_5]=\{5\}$，且点 $u_1$、$u_2$、$u_3$、$u_4$、$u_5$ 的强色集合互不相等，并使得 $\overline{C}[v_1]=\{5,8\}$，$\overline{C}[v_2]=\{5,9\}$，$\overline{C}[v_3]=\{6,9\}$，$\overline{C}[v_4]=\{7,9\}$，$\overline{C}[v_5]=\{5,6\}$，$\overline{C}[v_6]=\{6,7\}$，$\overline{C}[v_7]=\{7,8\}$，即 $\overline{C}[v_1]$、$\overline{C}[v_2]$、$\overline{C}[v_3]$、$\overline{C}[v_4]$、$\overline{C}[v_5]$、$\overline{C}[v_6]$、$\overline{C}[v_7]$ 互不相等，从而点 $v_1$、$v_2$、$v_3$、$v_4$、$v_5$、$v_6$、$v_7$ 的强色集合两两可区别. 综上可知在所给正常全染色下，图 $K_{5,7}$ 的任意两个顶点的强色集合不同，因此 $f$ 是点强可区别的，具体染色如图 1 所示.

所以 $\chi_{\mathrm{vst}}(K_{5,7})=9$.

除了图 1 所给出的染色方案，图 2 给出了完全二部图 $K_{5,7}$ 的另一种点强可区别全染色的方案.

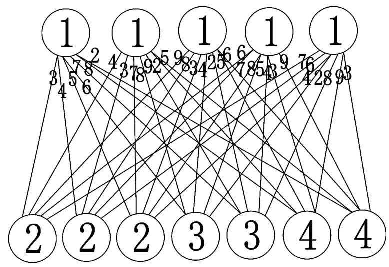


图 1　$K_{5,7}$ 的点强可区别全染色方案 1

Fig. 1　Scheme 1 of the vertex strongly distinguishing total coloring of $K_{5,7}$

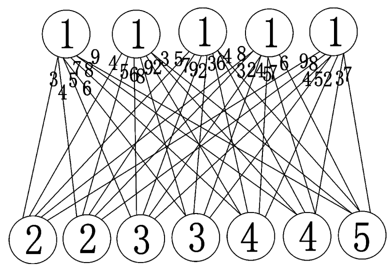


图 2　$K_{5,7}$ 的点强可区别全染色方案 2

Fig. 2　Scheme 2 of the vertex strongly distinguishing total coloring of $K_{5,7}$

## 3　结　语

本文利用组合分析法讨论了完全二部图 $K_{5,7}$ 的点强可区别全染色，并得到完全二部图 $K_{5,7}$ 的点强可区别全色数 $\chi_{\mathrm{vst}}(K_{5,7})=9$，并在此基础之上给出了两种具体的关于完全二部图 $K_{5,7}$ 的点强可区别全染色方案. 此结果的得出直接对文献[9]当中胡志涛提出的关于完全二部图的点强可区别的猜想："如果 $m\geqslant 4$ 且 $n<2m-2$ 时，那么 $\chi_{\mathrm{vst}}(K_{m,n})=n+3$"中当 $m=5$ 时作出了否定，从而进一步确定了此猜想成立的范围. 此结论的得出不仅为研究 $K_{m,n}(m\geqslant 4,n<2m-2)$ 这类完全二部图的点强可区别全染色奠定了基础，也为研究更多类的完全二部图 $K_{m,n}$ 的点强可区别全染色提供了思路方法.

## 参考文献：


[1] ZHANG Zhong-fu, CHENG Hui, YAO Bing, *et al*. On the adjacent-vertex-strongly-distinguishing total coloring of graphs [J]. **Science in China Series A: Mathematics**, 2008, **51**(3): 427-436.

[2] 胡志涛，王治文，陈祥恩. 完全二部图 $K_{4,n}$ 的点强可区别全染色[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，**35**(3)：64-68.

HU Zhi-tao, WANG Zhi-wen, CHEN Xiang-en. Vertex strongly distinguishing total coloring of the complete bipartite graph $K_{4,n}$ [J]. **Journal of Southwest University (Natural Science)**, 2013, **35**(3):64-68. (in Chinese)

[3] 陈祥恩，胡志涛，王治文. 完全二部图 $K_{1,n}$，$K_{2,n}$ 和 $K_{3,n}$ 的点强可区别全染色[J]. 数学的实践与认识，2012，**42**(11):214-218.

CHEN Xiang-en, HU Zhi-tao, WANG Zhi-wen. Vertex strongly distinguishing total coloring of the complete bipartite graphs $K_{1,n}$, $K_{2,n}$ and $K_{3,n}$ [J]. **Mathematics in Practice and Theory**, 2012, **42**(11):214-218. (in Chinese)

[4] CHEN Xiang-en, HU Zhi-tao, YAO Bing, *et al*. Vertex strongly distinguishing total coloring of complete bipartite graph $K_{3,3}$ [C] // **2012 International Conference on Systems and Informatics (ICSAI)**. Piscataway: IEEE, 2012:2687-2691.

[5] ZHANG Zhong-fu, Woodall D R, YAO Bing, *et al*. Adjacent strong edge colorings and total colorings of regular graphs [J]. **Science in China Series A: Mathematics**, 2009, **52**(5):973-980.

[6] 张忠辅，陈祥恩，李敬文，等. 关于图的邻点可区别全染色[J]. 中国科学：A辑数学，2004，**34**(5)：574-583.

ZHANG Zhong-fu, CHEN Xiang-en, LI Jing-wen, *et al*. On adjacent vertex distinguishing total coloring of graphs [J]. **Science in China (Ser. A Mathematics)**, 2004, **34**(5): 574-583. (in Chinese)

[7] 陈祥恩，王治文，赵飞虎，等. 若干强积图及合成图的邻点可区别一般边染色[J]. 山东大学学报(理学版)，2013，**48**(6):18-22.

CHEN Xiang-en, WANG Zhi-wen, ZHAO Fei-hu, *et al*. General neighbor-distinguishing edge coloring of strong products and compositions of graphs [J]. **Journal of Shandong University (Natural Science)**, 2013, **48**(6):18-22. (in Chinese)

[8] 刘信生，王志强，苏旺辉. 图的邻点可区别 VI-全色数的一个上界[J]. 兰州大学学报(自然科学版)，2011，**47**(6):81-83,92.

LIU Xin-sheng, WANG Zhi-qiang, SU Wang-hui. An upper bound for the adjacent vertex-distinguishing VI-total chromatic number of graphs [J]. **Journal of Lanzhou University (Natural Sciences)**, 2011, **47**(6):81-83,92. (in Chinese)

[9] 胡志涛. 图的点强可区别全染色的研究[D]. 兰州：西北师范大学，2013.

HU Zhi-tao. Research on vertex strongly distinguishing total coloring of graphs [D]. Lanzhou: Northwest Normal University, 2013. (in Chinese)


# Probe of schemes for vertex strongly distinguishing total coloring of complete bipartite graph $K_{5,7}$


WANG Bei-bei[1], QI Li-juan[*2], LIU Xin-sheng[1], CHEN Xiang-en[1]

(1. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;
2. Department of Basic Sciences, Lanzhou Institute of Technology, Lanzhou 730050, China)



**Abstract**: Firstly, the vertex strongly distinguishing total coloring of complete bipartite graph $K_{5,7}$ is discussed using the method of combinatorial analysis. Then, based on the discussion, two schemes about the vertex strongly distinguishing total coloring of complete bipartite graph $K_{5,7}$ are put forward. The results not only help to determine the vertex strongly distinguishing total chromatic number of complete bipartite graph $K_{5,7}$ which is equal to nine, but also negate the conjecture proposed by Hu Zhi-tao: "If $m \geqslant 4$ and $n < 2m-2$, then $\chi_{vst}(K_{m,n}) = n+3$" when $m=5$. Furthermore, the scope which makes this conjecture established is determined.



**Key words**: proper total coloring; complete bipartite graph; vertex strongly distinguishing total coloring; vertex strongly distinguishing total chromatic number