第56卷第3期
2016年5月
大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology
Vol. 56， No. 3
May 2016

文章编号：1000-8608(2016)03-0313-08

约束优化问题的序列近似方法收敛性

段庆松*

（大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024）

摘要：对抽象约束优化问题的序列近似方法的收敛性进行讨论，证明了在目标函数序列连续收敛和约束集合序列收敛的条件下，序列近似问题的全局最优值收敛到原问题的最优值. 进一步，证明了在序列近似问题目标函数和约束集合具有某些单调性质的前提下，把目标函数序列连续收敛减弱到上图收敛，该结论仍然成立. 最后，将这一结果用于分析互补约束优化问题的光滑化方法的收敛性中.

关键词：连续收敛；上图收敛；全局最优解；互补约束优化

中图分类号：O224　　**文献标识码**：A　　**doi**：10.7511/dllgxb201603015

0 引 言

Rockafellar 等[1] 1998 年在著作 Variational Analysis 中讨论了很重要的集值映射和函数列的收敛问题，其中集合序列的极限是集值映射的极限与连续性的基础，集值映射序列的收敛包含了逐点收敛、图收敛、连续收敛、一致收敛，函数列的收敛有逐点收敛、连续收敛、上图收敛、一致收敛等. 随着对更多的关于收敛问题的深入了解，这些序列收敛在约束优化近似方法中的应用越来越重要. Mordukhovich[2-3] 也给出了关于集值映射序列很多重要的性质.

考虑下面的约束优化问题：

$$(\mathrm{P})\quad \min\quad f(\boldsymbol{x}) \qquad \mathrm{s.t.}\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$$

若存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\bar{\boldsymbol{x}});\ \forall\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}\cap\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}},\varepsilon)$$

则称$\bar{\boldsymbol{x}}$为问题(P)的局部最优解. 若

$$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\bar{\boldsymbol{x}});\ \forall\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$$

则称$\bar{\boldsymbol{x}}$为问题(P)的全局最优解，$\alpha:=f(\bar{\boldsymbol{x}})$即为问题(P)的最优值[4].

为了得到问题(P)的最优解，往往需要验证下面的最优必要性条件：

设$\bar{\boldsymbol{x}}$为问题(P)的局部最优解，函数 f 在$\bar{\boldsymbol{x}}$处可微，则

$$0\in\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})+\mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}})$$

其中$\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})$、$\mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}})$分别定义为函数 f 在$\bar{\boldsymbol{x}}$处的梯度与$\bar{\boldsymbol{x}}$处的法锥，函数 f 也可能具有一些不好的性质，例如非光滑、非凸等，这时就需要用到次微分和次梯度的概念，详细定义可见文献[5-6].

目前，学者们对问题(P)的求解方法已经有了很多研究，例如罚函数方法、内点法、增广拉格朗日法、序列二次规划方法等，想要了解非线性问题的求解方法可以参考文献[7]等. 在许多问题中，都要用到序列近似方法来解决，即遇到复杂难以求解的问题时，往往用一系列性质简单且容易解决的问题来近似原问题，Hong 等[8] 运用序列凸近似方法解决了复杂的 DC 问题，而在一般情况下，通常考虑序列问题：

$$(\mathrm{P}^v)\quad \min\quad f^v(\boldsymbol{x}) \qquad \mathrm{s.t.}\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^v$$

其中 $v\in N$ 是自然数序列. 问题(P^v)通常是一列容易求解的近似问题，然而为了得到原问题(P)的最优值，近似问题序列(P^v)需要满足一定的条件，即问题(P^v)的最优值收敛到问题(P)的最优值. 很多文献都考虑了这个条件. 如文献[1]中有如下定理：

(最小化问题中的收敛性，最终有界条件下的极小化收敛)假设序列$\{f^v\}_{v\in N}$是最终水平有界

收稿日期：2015-08-31；　修回日期：2016-03-10.
作者简介：段庆松*(1989-)，男，博士生，E-mail：duanqs@mail.dlut.edu.cn.

的，$f^v \xrightarrow{e} f$ 且 f^v 与 f 是下半连续的、正常的，则有 $\inf f^v \to \inf f$.

若满足上述定理中的条件，则可通过对序列问题(P^v)的求解来得到原问题(P)的最优值. 本文将会基于此定理，进一步考虑序列问题(P^v)与原问题(P)的最优值之间的关系.

1 预备知识

在本章中介绍一些将要用到的定义和基本结果.

定义 1[1]（内外极限的定义）

$$\limsup_{v\to\infty} \boldsymbol{C}^v := \{\boldsymbol{x}: \exists\, N \in \mathcal{N}_\infty^\#, \exists\, \boldsymbol{x}^v \in \boldsymbol{C}^v (v \in N),\ \text{s.t. } \boldsymbol{x}^v \xrightarrow{N} \boldsymbol{x}\} \tag{1}$$

$$\liminf_{v\to\infty} \boldsymbol{C}^v := \{\boldsymbol{x}: \exists\, N \in \mathcal{N}_\infty, \exists\, \boldsymbol{x}^v \in \boldsymbol{C}^v (v \in N),\ \text{s.t. } \boldsymbol{x}^v \xrightarrow{N} \boldsymbol{x}\} \tag{2}$$

其中 $\mathcal{N}_\infty := \{N \subseteq \mathbf{N}: \mathbf{N}\backslash N \text{ 有限}\}$；$\mathcal{N}_\infty^\# := \{N \subseteq \mathbf{N}: N \text{ 是无穷子列}\}$，其中 $\mathbf{N}$ 表示自然数的集合. 例如，奇数集合以及偶数集合都属于 $\mathcal{N}_\infty^\#$.

如果内极限与外极限相等，则称序列的极限 $\boldsymbol{C}$ 存在，

$$\lim_{v\to\infty} \boldsymbol{C}^v = \limsup_{v\to\infty} \boldsymbol{C}^v = \liminf_{v\to\infty} \boldsymbol{C}^v = \boldsymbol{C} \tag{3}$$

定义 2[1]（连续收敛） 函数列 f^v 连续收敛到 f，若当 $\boldsymbol{x}^v \to \boldsymbol{x}$，有 $f^v(\boldsymbol{x}^v) \to f(\boldsymbol{x})$.

定义 3[1]（上图） 对于函数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \mathbf{R}$，$f$ 的上图是集合

$$\operatorname{epi} f := \{(\boldsymbol{x}, \alpha) \in \boldsymbol{R}^n \times \mathbf{R}: \alpha \geqslant f(\boldsymbol{x})\}$$

定义 4[1]（上图收敛） 设$\{f^v\}$是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数序列，$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一点，则

$$(e-\liminf_v f^v)(\boldsymbol{x}) = \min\{\alpha \in \mathbf{R}: \exists\, \boldsymbol{x}^v \to \boldsymbol{x},\ \text{s.t. } \liminf_v f^v(\boldsymbol{x}^v) = \alpha\}$$

$$(e-\limsup_v f^v)(\boldsymbol{x}) = \min\{\alpha \in \mathbf{R}: \exists\, \boldsymbol{x}^v \to \boldsymbol{x},\ \text{s.t. } \limsup_v f^v(\boldsymbol{x}^v) = \alpha\}$$

因此，$f^v \xrightarrow{e} f$ 当且仅当在每一点 $\boldsymbol{x}$，有

$$\liminf_v f^v(\boldsymbol{x}^v) \geqslant f(\boldsymbol{x});\ \forall\, \boldsymbol{x}^v \to \boldsymbol{x}$$

$$\limsup_v f^v(\boldsymbol{x}^v) \leqslant f(\boldsymbol{x});\ \exists\, \boldsymbol{x}^v \to \boldsymbol{x}$$

定义 5[1]（有效域） 对于函数 $f: \boldsymbol{X} \to \mathbf{R}$，它的有效域定义为

$$\operatorname{dom} f := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}: f(\boldsymbol{x}) < \infty\} \tag{4}$$

如果至少存在一点 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ 满足 $f(\boldsymbol{x}) < \infty$，且对所有的 $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$，$f(\boldsymbol{y}) < \infty$；否则称 f 是非正常的.

定义 6[1]（指示函数） 集合 $\boldsymbol{C}$ 的指示函数

$$\delta_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0; & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C} \\ \infty; & \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{C} \end{cases}$$

定义 7[1]（下半连续） 称函数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \mathbf{R}$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是下半连续的，如果

$$\liminf_{\boldsymbol{x}\to\bar{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\bar{\boldsymbol{x}})$$

命题 1[1]（对于下半连续的刻画） 设 $f: \boldsymbol{R}^n \to \mathbf{R}$，下述等价：

(a) f 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上下半连续；

(b) 上图 $\operatorname{epi} f$ 是 $\boldsymbol{R}^n \times \mathbf{R}$ 中的一闭集合；

(c) 对任何 $\alpha \in \mathbf{R}$，水平集合 $\operatorname{lev}_{\leqslant\alpha} f$ 均是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的闭集合.

定理 1[1] 对于闭值的集值映射 $S: \boldsymbol{X} \rightrightarrows \boldsymbol{U}$，$\bar{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{X}$，

(a) S 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处外半连续的充分必要条件是对任意的 $\rho > 0$，$\varepsilon > 0$，存在 $\boldsymbol{V} \in \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 满足

$$S(\boldsymbol{x}) \cap \rho\mathbb{B} \subseteq S(\bar{\boldsymbol{x}}) + \varepsilon\mathbb{B};\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$$

(b) S 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处内半连续的充分必要条件是对任意的 $\rho > 0$，$\varepsilon > 0$，存在 $\boldsymbol{V} \in \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 满足

$$S(\bar{\boldsymbol{x}}) \cap \rho\mathbb{B} \subseteq S(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\mathbb{B};\ \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$$

定义 8[1]（水平有界性） 称函数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \mathbf{R}$ 是水平有界的，如果对每一 $\alpha \in \mathbf{R}$，水平集合 $\operatorname{lev}_{\leqslant\alpha} f$ 是有界的（可能是空集）.

定义 9[1]（一致水平有界性） 函数 $f: \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \to \mathbf{R}$ 相对于 $\boldsymbol{u}$ 局部一致的关于变量 $\boldsymbol{x}$ 水平有界，如果对每一 $\bar{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{R}^m$ 与 $\alpha \in \mathbf{R}$，存在邻域 $\boldsymbol{V} \in \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{u}})$ 与一有界集合 $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{R}^n$，满足

$$\{\boldsymbol{x}: f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \leqslant \alpha\} \subseteq \boldsymbol{B};\ \forall\, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V} \tag{5}$$

定义 10[1]（最终有界性） 存在指标集合 $N \in \mathcal{N}_\infty$ 满足，集合 $\bigcup_{v\in N} \boldsymbol{C}^v$ 是有界的，称 $\boldsymbol{C}^v$ 是最终有界的.

命题 2[1]（最终水平有界） 设 $f: \boldsymbol{R}^n \to \mathbf{R}$，下述等价：

(a) 如果存在一水平有界函数 g，有当 v 充分大时，$f^v \geqslant g$，或如果集合序列 $\operatorname{dom} f^v$ 是最终有界的，则序列$\{f^v\}_{v\in N}$是最终水平有界的.

(b) 若序列$\{f^v\}_{v\in N}$是最终水平有界的，且 $f^v \xrightarrow{e} f$，则 f 是水平有界的，函数 f 实际上是下紧致的.（下紧致：若 $\forall\, \alpha \in \mathbf{R}$，$\operatorname{lev}_{\leqslant\alpha} f$ 都是紧致集）

(c) 若 $f^v \xrightarrow{e} f$ 且 f 是水平有界的，f 不恒等于∞，并且所有集合 $\operatorname{lev}_{\leqslant\alpha} f$ 是连通的，则序列

$\{f^v\}_{v\in N}$是最终水平有界的.

2 求解带约束的序列问题的连续收敛方法

2.1 约束优化问题的转化模型

考虑下面的序列问题：

$$(\mathrm{P}^v)\quad \min\quad f^v(\boldsymbol{x}) \qquad \text{s.t.}\quad \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{C}^v$$

以及问题

$$(\mathrm{P})\quad \min\quad f(\boldsymbol{x}) \qquad \text{s.t.}\quad \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{C}$$

其中 f^v、f 为正常的下半连续函数，$\boldsymbol{C}^v$、$\boldsymbol{C}$ 为闭集，$v\in N$.

为了求解该问题，将约束问题转化为无约束问题. 利用指示函数，可以将问题(P^v)等价地转化为无约束问题：

$$\min\ \overline{f}^v := f^v + \delta_{\boldsymbol{C}^v}(\boldsymbol{x})$$

问题(P)转化为无约束问题：

$$\min\ \overline{f} := f + \delta_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x})$$

2.2 连续收敛

考虑研究约束优化方法的关键条件：连续收敛和当 $v\to\infty$ 时，$\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}$ 的等价条件.

定理 2　当 $v\to\infty$ 时，$\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}$ 等价于 $\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v}\to\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}}$.

证明　观察指示函数的上图集合

$$\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v} = \{(\boldsymbol{x},\alpha): \delta_{\boldsymbol{C}^v}\leqslant\alpha\} = \{(\boldsymbol{x},\alpha): \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^v, \alpha\geqslant 0\} = \boldsymbol{C}^v\times\mathbf{R}_+$$

$$\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}} = \{(\boldsymbol{x},\alpha): \delta_{\boldsymbol{C}}\leqslant\alpha\} = \{(\boldsymbol{x},\alpha): \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}, \alpha\geqslant 0\} = \boldsymbol{C}\times\mathbf{R}_+$$

可知当 $v\to\infty$ 时，$\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v}\to\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}}$ 等价于 $\boldsymbol{C}^v\times\mathbf{R}_+\to\boldsymbol{C}\times\mathbf{R}_+$.

(i)首先证明由左式能得到右式. 由 $\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}$ 得，$\forall\boldsymbol{x}^v\in\boldsymbol{C}^v$，$\exists\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$，有 $\boldsymbol{x}^v\to\boldsymbol{x}$. 显然有$(\boldsymbol{x}^v,1)\to(\boldsymbol{x},1)$，即得证.

(ii)再证由右式可以得到左式. 由式(3)知，欲证 $\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}$，即证

$$\limsup_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v\subseteq\boldsymbol{C}\subseteq\liminf_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v$$

同理，$\boldsymbol{C}^v\times\mathbf{R}_+\to\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{R}_+$ 等价于

$$\limsup_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v\times\mathbf{R}_+\subseteq\boldsymbol{C}\times\mathbf{R}_+\subseteq\liminf_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v\times\mathbf{R}_+$$

先证左边的包含关系，由外极限的定义 1 得 $\forall\boldsymbol{x}\in\limsup\limits_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v$，$\exists N\in\mathcal{N}_\infty^\#$，$\exists\boldsymbol{x}^v\in\boldsymbol{C}^v$，使得 $\boldsymbol{x}^v\xrightarrow{N}\boldsymbol{x}$，所以有

$$(\boldsymbol{x}^v,1)\xrightarrow{N}(\boldsymbol{x},1)$$

由 $\boldsymbol{x}^v\in\boldsymbol{C}^v$ 知，$(\boldsymbol{x}^v,1)\in\boldsymbol{C}^v\times\mathbf{R}_+$，又 $\boldsymbol{C}^v\times\mathbf{R}_+\to\boldsymbol{C}\times\mathbf{R}_+$，得

$$(\boldsymbol{x},1)\in\boldsymbol{C}\times\mathbf{R}_+$$

知 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$. 所以 $\forall\boldsymbol{x}\in\limsup\limits_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v$，有 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$，即 $\limsup\limits_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v\subseteq\boldsymbol{C}$.

接下来用反证法证 $\boldsymbol{C}\subseteq\liminf\limits_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v$. 假设$\exists\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$，且 $\boldsymbol{x}\notin\liminf\limits_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v$，由于

$$(\boldsymbol{x},1)\in\boldsymbol{C}\times\mathbf{R}_+\subseteq\liminf_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v\times\mathbf{R}_+$$

与 $\boldsymbol{x}\notin\liminf\limits_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v$ 矛盾，$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$ 有 $\boldsymbol{x}\in\liminf\limits_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v$，则可以得到

$$\liminf_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v\supseteq\boldsymbol{C}$$

则可知当 $v\to\infty$ 时，$\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}$. 可知上述包含关系成立.

综上，当 $v\to\infty$ 时，

$$\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}\Leftrightarrow\boldsymbol{C}^v\times\mathbf{R}_+\to\boldsymbol{C}\times\mathbf{R}_+$$

即 $\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}\Leftrightarrow\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v}\to\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}}$.

□

接下来，给出本章的关键性结论，即上图收敛的充分条件.

定理 3　由 f^v 连续收敛到 f 以及 $\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}$ 两个条件可以得到$\overline{f}^v\xrightarrow{e}\overline{f}$.

证明　为了方便起见，令 $g^v(\cdot):=\delta_{\boldsymbol{C}^v}(\cdot)$，$g(\cdot):=\delta_{\boldsymbol{C}}(\cdot)$. 欲证$\overline{f}^v\xrightarrow{e}\overline{f}$，即 $f^v+g^v\xrightarrow{e}f+g$.

由 f^v 连续收敛到 f，及定义 2 可知，$\forall\boldsymbol{x}^v\to\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{z}^v\to\boldsymbol{x}$，有

(a)$\liminf\limits_{v\to\infty}f^v(\boldsymbol{x}^v)=f(\boldsymbol{x})=\limsup\limits_{v\to\infty}f^v(\boldsymbol{x}^v)$；

(b)$\limsup\limits_{v\to\infty}f^v(\boldsymbol{z}^v)=f(\boldsymbol{x})=\liminf\limits_{v\to\infty}f^v(\boldsymbol{z}^v)$.

又由定理 2 得 $g^v(\cdot)\xrightarrow{e}g(\cdot)$. 由上图收敛的定义 4 知，$\forall\boldsymbol{x}$，有

(c)$\forall\boldsymbol{x}^v\to\boldsymbol{x}$，$\liminf\limits_{v\to\infty}g^v(\boldsymbol{x}^v)\geqslant g(\boldsymbol{x})$；

(d)$\exists\boldsymbol{z}^v\to\boldsymbol{x}$，$\limsup\limits_{v\to\infty}g^v(\boldsymbol{z}^v)\leqslant g(\boldsymbol{x})$.

由(a)+(c)、(b)+(d)得，$\forall\boldsymbol{x}$，可以得到如下的不等式：

$$\forall\boldsymbol{x}^v\to\boldsymbol{x},\ \liminf_{v\to\infty}(f^v(\boldsymbol{x}^v)+g^v(\boldsymbol{x}^v))\geqslant f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})$$
$$\exists\boldsymbol{z}^v\to\boldsymbol{x},\ \limsup_{v\to\infty}(f^v(\boldsymbol{z}^v)+g^v(\boldsymbol{z}^v))\leqslant f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

很明显式(6)满足上图收敛的两个条件，即得 $f^v(\cdot)+g^v(\cdot)\xrightarrow{e}f(\cdot)+g(\cdot)$ 等价于 $\bar{f}^v\xrightarrow{e}\bar{f}$.

□

2.3　最终水平有界性

除了满足无约束目标函数序列 f^v 上图收敛到 f，本文还研究约束优化问题的序列近似方法的另一个条件：$\{f^v\}$ 最终水平有界性.

定理4　$\boldsymbol{C}^v$ 最终有界，则 $\{\bar{f}^v\}_{v\in N}$ 最终水平有界，且 $\boldsymbol{C}$ 为闭集.

证明　由定义6知，若 $\delta_{\boldsymbol{C}^v}<\infty$，则 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^v$. 又由有效域的定义5知 $\mathrm{dom}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v}$ 为 $\boldsymbol{C}^v$. $\boldsymbol{C}^v$ 最终有界，即 $\mathrm{dom}\ f^v$、$\mathrm{dom}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v}$ 最终有界，由命题2(a)知，f^v、$\delta_{\boldsymbol{C}^v}$ 最终水平有界，又 $\bar{f}^v=f^v+\delta_{\boldsymbol{C}^v}$，从而 $\{\bar{f}^v\}_{v\in N}$ 最终水平有界.

已知 $\{\delta_{\boldsymbol{C}^v}\}_{v\in N}$ 最终水平有界且 $\delta_{\boldsymbol{C}^v}\xrightarrow{e}\delta_{\boldsymbol{C}}$(定理2)，由命题2(b)知，$\delta_{\boldsymbol{C}}$ 下紧致，即 $\forall\alpha\in\mathbf{R}$，$\mathrm{lev}_{\leqslant\alpha}\delta_{\boldsymbol{C}}$ 为 $\mathbf{R}$ 中紧致集，则为闭集. 由命题1知，$\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}}$ 是 $\boldsymbol{R}^n\times\mathbf{R}$ 中的一闭集合，又 $\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\times\mathbf{R}_+$，则有 $\boldsymbol{C}$ 为闭集.

□

接下来给出 $\bar{f}^v$、$\bar{f}$ 是正常的下半连续函数的充分条件.

定理5　若 f^v、f 是正常的下半连续函数，且 $\boldsymbol{C}^v$、$\boldsymbol{C}$ 是闭集，则 $\bar{f}^v$、$\bar{f}$ 是正常的下半连续函数，其中 $\bar{f}^v=f^v+\delta_{\boldsymbol{C}^v}$，$\bar{f}=f+\delta_{\boldsymbol{C}}$.

证明　首先，由已知 f^v 下半连续，$\boldsymbol{C}^v$ 是闭集，来证 $\bar{f}^v$ 是下半连续函数. 因为 $\boldsymbol{C}^v$ 是闭集，则 $\forall\boldsymbol{x}^v\in\boldsymbol{C}^v$，$\boldsymbol{x}^v\to\bar{\boldsymbol{x}}$，都有 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}^v$.

任取一固定的 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}^v$，由下半连续的定义7知，只需证：

$$\liminf_{\boldsymbol{x}^v\to\bar{\boldsymbol{x}}}\bar{f}^v(\boldsymbol{x}^v)=\liminf_{\boldsymbol{x}^v\to\bar{\boldsymbol{x}}}(f^v(\boldsymbol{x}^v)+\delta_{\boldsymbol{C}^v}(\boldsymbol{x}^v))\geqslant f^v(\bar{\boldsymbol{x}})+\delta_{\boldsymbol{C}^v}(\bar{\boldsymbol{x}})\tag{7}$$

由于 f^v 下半连续，有

$$\liminf_{\boldsymbol{x}^v\to\bar{\boldsymbol{x}}}f^v(\boldsymbol{x}^v)\geqslant f^v(\bar{\boldsymbol{x}})\tag{8}$$

又由指示函数知

$$\liminf_{\boldsymbol{x}^v\to\bar{\boldsymbol{x}}}\delta_{\boldsymbol{C}^v}=0=\delta_{\boldsymbol{C}^v}(\bar{\boldsymbol{x}})\tag{9}$$

由式(8)和(9)，知式(7)成立. $\bar{f}^v$ 是下半连续函数. 同理可证 $\bar{f}$ 是下半连续函数.

由定义5和6显然可得 $\bar{f}^v$、$\bar{f}$ 是正常的.

□

综上所述：f^v、f 是下半连续、正常的，$\boldsymbol{C}^v$ 是闭集时，还需要下面3个条件：

(a) $\boldsymbol{C}^v$ 最终有界；

(b) $\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}$；

(c) f^v 连续收敛到 f.

就可以得到序列 $\{\bar{f}^v\}_{v\in N}$ 是最终水平有界的，$\bar{f}^v\xrightarrow{e}\bar{f}$ 且 $\bar{f}^v$ 与 $\bar{f}$ 是下半连续的、正常的，由引言中定理可得

$$\inf\bar{f}^v\to\inf\bar{f}$$

3　用上图收敛解决带约束的单调序列问题

3.1　约束优化问题的转化

考虑如下问题：

$$(\mathrm{P})\quad\min\quad f(\boldsymbol{x})\qquad \mathrm{s.t.}\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$$

该问题等价于

$$(\mathrm{P})\quad\min\quad t\qquad \mathrm{s.t.}\quad f(\boldsymbol{x})-t\leqslant 0;\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C},\quad(\boldsymbol{x},t)\in\boldsymbol{D}$$

下面的序列问题

$$(\mathrm{P}^v)\quad\min\quad f^v(\boldsymbol{x})\qquad \mathrm{s.t.}\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^v$$

等价于

$$(\mathrm{P}^v)\quad\min\quad t\qquad \mathrm{s.t.}\quad f^v(\boldsymbol{x})-t\leqslant 0;\ \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^v,\quad(\boldsymbol{x},t)\in\boldsymbol{D}^v$$

其中 f^v、f 为正常的下半连续函数，$\boldsymbol{C}^v$、$\boldsymbol{C}$ 为闭集，$v\in N$.

为了求解该问题，将约束问题转化为无约束问题. 利用指示函数，可以将问题(P^v)等价地转化为无约束问题：

$$\min\ \tilde{f}^v:=t+\delta_{\boldsymbol{D}^v}(\boldsymbol{x},t)$$

问题(P)转化为无约束问题：

$$\min\ \tilde{f}:=t+\delta_{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{x},t)$$

用连续收敛解决带约束的优化问题时，主要用到 $\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}^v$ 最终有界两个条件. 接下来在用上图收敛解决此问题的过程中讨论结合地平函数的约束集合 $\boldsymbol{C}^v$ 最终有界性和利用条件 $\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}$ 来证明转化后约束集合的收敛性($\boldsymbol{D}^v\to\boldsymbol{D}$)，从而利用引言中定理可得到想要的结论：$\inf\tilde{f}^v\to\inf\tilde{f}$.

3.2　用上图收敛解决带约束的单调序列问题

“f^v 连续收敛到 f”这个条件太强了，本文中利用上图收敛来代替连续收敛解决带约束的序列问题，而“$f^v \xrightarrow{e} f$”的条件本身又太弱了，无法只配合约束集合的收敛性来直接解决带约束的序列问题，因此在目标函数序列上图收敛和约束集合收敛的前提下，考虑函数列$\{f^v\}$和集合列$\{\boldsymbol{C}^v\}$为单调的情况. 考虑此类问题的意义在本文后面的例子中可以体现，本文简称其为单调问题. 重新刻画单调问题，$f^v \nearrow f$，$\boldsymbol{C}^v \searrow \boldsymbol{C}$，首先证明单调问题的两个刻画，两个条件保证了目标函数序列上图收敛和约束集合收敛，即 $f^v \xrightarrow{e} f$，$\boldsymbol{C}^v \to \boldsymbol{C}$. 显然有 $\boldsymbol{C}^v \searrow \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{C}^v \to \boldsymbol{C}$，只需证明 $f^v \nearrow f \Rightarrow f^v \xrightarrow{e} f$.

引理 1[1]　如果序列$\{f^v\}$为非减的($f^v \leqslant f^{v+1}$)，则有 $e-\lim\limits_v f^v$ 存在且等价于$\sup\limits_{v\to\infty}(\mathrm{cl}\ f^v)$.

定理 6　若 $f^v \nearrow f$，且 f^v 下半连续，则有 $f^v \xrightarrow{e} f$.

证明　由引理 1 知

$$e-\lim_v f^v = \sup_{v\to\infty}(\mathrm{cl}\ f^v)$$

由于 f^v 下半连续，则 $\mathrm{cl}\ f^v = f^v$，并且由 $f^v \nearrow f$ 知 $\sup\limits_v f^v = f$. 所以有 $e-\lim\limits_v f^v = f$，即 $f^v \xrightarrow{e} f$.

□

对于 $f^v \nearrow f$，有 $\forall v \in N$，$f^v \leqslant f^{v+1}$，且 $f^v \to f$. 对于 $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$，$f^v(\boldsymbol{x}) \leqslant f^{v+1}(\boldsymbol{x})$，则 $\forall(\boldsymbol{x}, \alpha^v) \in \mathrm{epi}\ f^v$，$\forall(\boldsymbol{x}, \alpha^{v+1}) \in \mathrm{epi}\ f^{v+1}$，有 $\mathrm{epi}\ f^v \supseteq \mathrm{epi}\ f^{v+1}$，所以 $\mathrm{epi}\ f^v \searrow \mathrm{epi}\ f$. 另一方面，对于 $\boldsymbol{C}^v \searrow \boldsymbol{C}$，则有 $\boldsymbol{C}^v \supseteq \boldsymbol{C}^{v+1}$，$\boldsymbol{C}^v \to \boldsymbol{C}$. 由 $\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}^v \times \mathbf{R}_+$，显然有 $\boldsymbol{C}^v \times \mathbf{R}_+ \supseteq \boldsymbol{C}^{v+1} \times \mathbf{R}_+$，则集合列 $\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v} \searrow \mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}}$.

前面用连续收敛解决带约束的序列问题中，给出条件$\{\boldsymbol{C}^v\}$最终有界. 在单调问题中，结合地平函数，给出条件 $\boldsymbol{K} \cap \limsup\limits_{v\to\infty} \boldsymbol{C}^v = \{\boldsymbol{0}\}$且$\{\boldsymbol{C}\}$都是连通的. 其中

$$\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{0}\} \cup \{\boldsymbol{x} \neq 0, \exists \boldsymbol{x}^v \to \mathrm{dir}\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^v)\text{有界}\}$$

这里 F 取 f^v 或 $\delta_{\boldsymbol{C}^v}$.

定理 7　$\boldsymbol{K} \cap \limsup\limits_{v\to\infty} \boldsymbol{C}^v = \{\boldsymbol{0}\}$且$\{\boldsymbol{C}\}$都是连通的$\Rightarrow\{\boldsymbol{C}^v\}$最终有界.

证明　考虑 $\boldsymbol{u} \in \limsup\limits_v \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^v)$:$\exists N_0 \in \mathcal{N}_\infty^\#$，$\boldsymbol{x}^v \in \boldsymbol{C}^v$，$v \in N_0$ 使得 $\boldsymbol{u} = \lim\limits_v \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^v)$. 设$\{\boldsymbol{x}^v\}$是无界的，即 $\exists N \in \mathcal{N}_\infty^\#$，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 有 $\boldsymbol{x}^v \to \mathrm{dir}\ \boldsymbol{x}$. 根据地平外极限的定义有

$$\boldsymbol{x} \in \limsup_{v\to\infty} \boldsymbol{C}^v$$

则 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^v) \xrightarrow{N} \boldsymbol{u}$，$\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^v)\}_{v\in N}$有界，与

$$\boldsymbol{K} \cap \limsup_{v\to\infty} \boldsymbol{C}^v = \{\boldsymbol{0}\}$$

矛盾，所以$\{\boldsymbol{x}^v\}$是有界集. 由 $\boldsymbol{x}^v \in \boldsymbol{C}^v$ 知，$\boldsymbol{C}^v$ 是有界集. 由于 $\boldsymbol{C}^v \to \boldsymbol{C}$，所以 $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}$，$\exists \boldsymbol{x}^v \in \boldsymbol{C}^v$，$\boldsymbol{x}^v \to \boldsymbol{x}$，即

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{x}^v + \varepsilon\mathbb{B} \in \boldsymbol{C}^v + \varepsilon\mathbb{B}$$

所以 $\boldsymbol{C}$ 有界.

存在等价关系

$$\mathrm{lev}_{\leqslant\alpha}\delta_{\boldsymbol{C}} = \{\boldsymbol{x}: \delta_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{x}) \leqslant \alpha\} = \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}, \alpha \geqslant 0\} = \boldsymbol{C}$$

所以 $\delta_{\boldsymbol{C}}$ 水平有界且显然 $\delta_{\boldsymbol{C}} \not\equiv \infty$，又 $\mathrm{lev}_{\leqslant\alpha}\delta_{\boldsymbol{C}}$ 连通，可以由命题 2(c)知，序列$\{\delta_{\boldsymbol{C}^v}\}$最终水平有界，从而 $\forall \alpha \in \mathbf{R}$，$\mathrm{lev}_{\leqslant\alpha}\delta_{\boldsymbol{C}^v}$ 最终有界，即$\{\boldsymbol{C}^v\}$最终有界.

□

定理 8　若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}^\infty \subseteq \boldsymbol{B}^\infty \cap \boldsymbol{C}^\infty$.

证明　由地平锥定义知

$$\boldsymbol{A}^\infty = \{\boldsymbol{x}: \exists \lambda^v \searrow 0, \exists \boldsymbol{x}^v \in \boldsymbol{A}, \text{s.t. } \lambda^v \boldsymbol{x}^v \to \boldsymbol{x}\}$$

即对于 $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}^\infty$，$\exists \boldsymbol{x}^v \in \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{x}^v \to \mathrm{dir}\ \boldsymbol{x}$($\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$). 显然由 $\boldsymbol{x}^v \in \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{x}^v \to \mathrm{dir}\ \boldsymbol{x}$，知 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}^\infty$，同理 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^\infty$，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}^\infty \cap \boldsymbol{C}^\infty$.

□

引理 2[1](有界性的地平准则)　集合 $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{R}^n$ 有界的充分必要条件是它的地平锥为 $\boldsymbol{0}$ 锥：$\boldsymbol{C}^\infty = \{\boldsymbol{0}\}$.

引理 3[1](水平集合的地平锥)　对函数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \mathbf{R}$ 与 $\alpha \in \mathbf{R}$，有$(\mathrm{lev}_{\leqslant\alpha} f)^\infty \subseteq \mathrm{lev}_{\leqslant 0} f^\infty$.

由观察可得

$$\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v} = \boldsymbol{D}^v = \{(\boldsymbol{x}, t): \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}^v, f^v(\boldsymbol{x}) - t \leqslant 0\} = (\boldsymbol{C}^v \times \mathbf{R}_+) \cap \mathrm{epi}\ f^v = \mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v} \cap \mathrm{epi}\ f^v$$

$$\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{D} = \{(\boldsymbol{x}, t): \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}, f(\boldsymbol{x}) - t \leqslant 0\} = (\boldsymbol{C} \times \mathbf{R}_+) \cap \mathrm{epi}\ f = \mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}} \cap \mathrm{epi}\ f$$

现在结合地平函数和$\{\boldsymbol{C}^v\}$最终有界来讨论$\{\tilde{f}^v\}$的最终水平有界性，由于$\tilde{f}^v = t + \delta_{\boldsymbol{D}^v}(\boldsymbol{x}, t)$，即等价于 $\delta_{\boldsymbol{D}^v}$ 的最终水平有界性，即 $\boldsymbol{D}^v$ 的最终有界性. 已知$\{\boldsymbol{C}^v\}$有界，根据定理 8、引言中定理、命题 3，由 $\boldsymbol{D}^v = \mathrm{epi}\ f^v \cap \mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v}$ 可得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{D}^v)^\infty &\subseteq (\mathrm{epi}\ f^v)^\infty \cap (\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v})^\infty = \\ &(\mathrm{lev}_{\leqslant t} f^v \times (-\infty, t))^\infty \cap (\boldsymbol{C}^v \times \mathbf{R}_+)^\infty \subseteq \\ &(\mathrm{lev}_{\leqslant 0} f^{v^\infty} \times \{-\boldsymbol{1}\}) \cap (\{\boldsymbol{0}\} \times \{\boldsymbol{1}\}) = \\ &\{\boldsymbol{0}\} \times \{\boldsymbol{0}\}\end{aligned}$$

所以知$\{\boldsymbol{D}^v\}$是有界的，最终有界定义：存在指标集合$N\in\mathcal{N}_\infty$满足，集合$\bigcup_{v\in N}\boldsymbol{C}^v$是有界的，称$\boldsymbol{C}^v$是最终有界的．所以由$\boldsymbol{C}^v$有界$\Rightarrow\boldsymbol{D}^v$有界，得$\bigcup_{v\in N}\boldsymbol{C}^v$有界$\Rightarrow\bigcup_{v\in N}\boldsymbol{D}^v$有界，所以$\{\boldsymbol{D}^v\}$最终有界，即$\{\tilde{f}^v\}$最终水平有界．

由定理4知，$\boldsymbol{C}$是闭集．由定理5知$\bar{f}^v$、$\bar{f}$是下半连续、正常的．接下来只需证约束集合的收敛性．设$\mathrm{epi}\ f^v=\boldsymbol{A}^v$，$\mathrm{epi}\ f=\boldsymbol{A}$，$\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v}=\boldsymbol{B}^v$，$\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{B}$．由上面知$\boldsymbol{A}^v\searrow\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^v\searrow\boldsymbol{B}$，现在证明$\boldsymbol{A}^v\cap\boldsymbol{B}^v\to\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$.

定理9　已知$\boldsymbol{A}^v\searrow\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^v\searrow\boldsymbol{B}$，$f^v$下半连续，$\boldsymbol{C}^v$是有界闭集，证明$\boldsymbol{D}^v\to\boldsymbol{D}$.

证明　由f^v下半连续知$\boldsymbol{A}^v$是闭集，由$\boldsymbol{C}^v=\mathrm{lev}_{\leqslant\alpha}\delta_{\boldsymbol{C}^v}$是有界闭集知$\boldsymbol{B}^v$是有界闭集．只需证明

$$\limsup_v(\boldsymbol{A}^v\cap\boldsymbol{B}^v)\subseteq\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\subseteq\liminf_v(\boldsymbol{A}^v\cap\boldsymbol{B}^v)$$

先证左边的包含关系，由内外极限的定义1知

$$\limsup_v(\boldsymbol{A}^v\cap\boldsymbol{B}^v):=\{\boldsymbol{x}\mid\exists N\in\mathcal{N}_\infty^\#,\ \exists\boldsymbol{x}^v\in\boldsymbol{A}^v\cap\boldsymbol{B}^v,\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{x}^v\xrightarrow{N}\boldsymbol{x}\}$$

$\forall\boldsymbol{x}\in\limsup_v(\boldsymbol{A}^v\cap\boldsymbol{B}^v)$，则$\exists N\in\mathcal{N}_\infty^\#$，$\exists\boldsymbol{x}^v\in\boldsymbol{A}^v\cap\boldsymbol{B}^v$，$v\in N$，满足$\boldsymbol{x}^v\xrightarrow{N}\boldsymbol{x}$．由$\boldsymbol{x}^v\in\boldsymbol{A}^v$，$\boldsymbol{x}^v\xrightarrow{N}\boldsymbol{x}$，且$\boldsymbol{A}^v\to\boldsymbol{A}$，有$\boldsymbol{x}\in\limsup_v\boldsymbol{A}^v\subseteq\boldsymbol{A}$；同理由$\boldsymbol{x}^v\in\boldsymbol{B}^v$，$\boldsymbol{x}^v\xrightarrow{N}\boldsymbol{x}$，且$\boldsymbol{B}^v\to\boldsymbol{B}$，则有$\boldsymbol{x}\in\limsup_v\boldsymbol{B}^v\subseteq\boldsymbol{B}$．于是$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$.

现在证右边的包含关系，即证

$$\liminf_v(\boldsymbol{A}^v\cap\boldsymbol{B}^v)\supseteq\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$$

由$\boldsymbol{C}$为闭集和定理1知，上式等价于证明对任意$\rho>0$，$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathcal{N}_\infty$，使得

$$\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\cap\rho\mathbb{B}\subseteq\boldsymbol{A}^v\cap\boldsymbol{B}^v+\varepsilon\mathbb{B}$$

由于$\boldsymbol{A}^v\searrow\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^v\searrow\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}^v\supseteq\boldsymbol{A}^{v+1}\supseteq\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^v\supseteq\boldsymbol{B}^{v+1}\supseteq\boldsymbol{B}$，则$\boldsymbol{A}^v\cap\boldsymbol{B}^v\supseteq\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}$，所以有

$$\boldsymbol{A}^v\cap\boldsymbol{B}^v+\varepsilon\mathbb{B}\supseteq\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}\cap\rho\mathbb{B}$$

即右边也成立．从而有

$$\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}^v}\cap\mathrm{epi}\ f^v\to\mathrm{epi}\ \delta_{\boldsymbol{C}}\cap\mathrm{epi}\ f$$

□

综述：对于满足f^v、f下半连续、正常的，$\boldsymbol{C}^v$闭集的序列问题，结合地平函数，满足条件

(a)$\boldsymbol{K}\cap\limsup_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v=\{\boldsymbol{0}\}$且$\{\boldsymbol{C}\}$都是连通的；

(b)$f^v\nearrow f$；

(c)$\boldsymbol{C}^v\searrow\boldsymbol{C}$.

就可由引言中定理得到

$$\inf\tilde{f}^v\to\inf\tilde{f}$$

4　实　例

为了验证单调问题在实际中的意义，下面以3个比较常用的问题作为例子．对于正常的下半连续函数f及约束集合$\boldsymbol{C}$，构造正常的下半连续函数序列f^v使$f^v\nearrow f$，以及闭约束集合$\boldsymbol{C}^v$使$\boldsymbol{C}^v\searrow\boldsymbol{C}$．这样构造出满足上图收敛的单调序列问题，然后就利用条件$\boldsymbol{K}\cap\limsup_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v=\{\boldsymbol{0}\}$且$\{\boldsymbol{C}\}$都是连通的，就能得出序列近似问题的全局最优值收敛到原问题的最优值，即

$$\inf\bar{f}^v\to\inf\bar{f}$$

例1　考虑下面的问题，其中$f:\boldsymbol{R}^n\to\mathbf{R}$是正常下半连续函数，$\boldsymbol{F}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$连续，$\boldsymbol{D}\subseteq\boldsymbol{R}^m$是一闭集合，

$$\begin{aligned}&\min\quad f(\boldsymbol{x})\\&\text{s.t.}\quad\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{D}\end{aligned}$$

设用指示函数转化为下面问题：

$$\begin{aligned}&\min\quad\bar{f}:=f(\boldsymbol{x})+\delta_{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))\\&\text{s.t.}\quad\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\end{aligned}$$

用罚函数构造序列近似问题

$$\begin{aligned}&\min\quad\bar{f}^v:=f(\boldsymbol{x})+\theta(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),r^v)\\&\text{s.t.}\quad\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\end{aligned}$$

函数$\theta:\boldsymbol{R}^m\times(0,\infty)\to\mathbf{R}$是下半连续的(文献[1]中有证明)，满足当$r^v\to\infty$时，$-\infty<\theta(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),r^v)\nearrow\delta_{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))$．由$\boldsymbol{D}$是闭集合，可知$\delta_{\boldsymbol{D}}$下半连续，又由函数$\theta$的下半连续性及定理5可得$\bar{f}^v$、$\bar{f}$是正常下半连续的，$\boldsymbol{C}^v=\boldsymbol{R}^n$闭．由此可得当$v$越大时，$r^v$越大，且$r^v\to\infty$，有$\bar{f}^v\nearrow\bar{f}$，即$\bar{f}^v\xrightarrow{e}\bar{f}$．设存在某一$\bar{r}\in(0,\infty)$充分大使得函数$\boldsymbol{x}\to f(\boldsymbol{x})+\theta(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),\bar{r})$的水平集是有界的．考虑参数序列$r^v\geqslant\bar{r}$满足$r^v\to\infty$，则有设$\boldsymbol{x}^v$是对应于参数$r^v$的问题的最优解，则序列$\{\boldsymbol{x}^v\}_{v\in N}$有界，即$\boldsymbol{C}^v$有界．又由$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{D})$，$\boldsymbol{F}$是连续的，$\boldsymbol{D}$是闭集，从而$\boldsymbol{C}$是有界闭集，只要给出连通的条件，就可以利用极小化收敛定理得到序列近似问题全局最优值的收敛性.

例2　考虑下面的问题，其中$f:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\mathbf{R}$为正常下半连续函数，$\boldsymbol{h}:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^l$，$\boldsymbol{g}:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$，

$$\begin{aligned}\min\quad & f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\ \text{s. t.}\quad & \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0},\\ & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant\boldsymbol{0},\\ & \boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

由于互补条件的出现，该问题不满足通常的约束条件，从而无法得到一阶必要性条件，给求解带来了极大的困难. 对此，先将其转化为

$$\min\quad \bar{f}:=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\delta_{[\boldsymbol{0}_l]}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\delta_{\boldsymbol{R}_-^m}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

$$\text{s. t.}\quad \boldsymbol{C}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):\boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}\}$$

下面构造序列近似问题

$$\begin{aligned}\min\quad & \bar{f}^v=f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{1}{\varepsilon^v}\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|+\\ & \frac{1}{\varepsilon^v}\|[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]_+\|\\ \text{s. t.}\quad & \boldsymbol{C}^v=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0},\\ & \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_i\leqslant\varepsilon^v,i=1,\cdots,n\}\end{aligned}$$

集合 $\boldsymbol{C}^v$ 是对集合 $\boldsymbol{C}$ 的松弛. 其中对于 $N\in\mathcal{N}_\infty$，$\forall v\in N$，$\exists\,\varepsilon^v\searrow 0$. 上述问题不存在互补条件，并且将等式与不等式约束罚到目标函数上去，是一系列相对容易求解的问题.

观察可得随着 v 越大，有 $\varepsilon^v\searrow 0$，$\bar{f}^v\nearrow\bar{f}$. 证明随着 v 越大，$\boldsymbol{C}^v\searrow\boldsymbol{C}$，由构造知 $\boldsymbol{C}^v$ 单调，只需证 $\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}$，即证

$$\limsup_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v\subseteq\boldsymbol{C}\subseteq\liminf_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v$$

右边显然可得. 左边若成立，等价地有

$$\begin{aligned}\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\limsup_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):&\exists\,N\in\mathcal{N}_\infty^\#,\\ &\exists(\boldsymbol{x}^v,\boldsymbol{y}^v)\in\boldsymbol{C}^v,\\ &(\boldsymbol{x}^v,\boldsymbol{y}^v)\xrightarrow{N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\end{aligned}$$

都有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{C}$. $\forall(\boldsymbol{x}^v,\boldsymbol{y}^v)\in\boldsymbol{C}^v$，$\boldsymbol{x}_i{}^v\geqslant\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y}_i{}^v\geqslant\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}_i{}^v\boldsymbol{y}_i{}^v\leqslant\varepsilon^v\xrightarrow{N}0$，$i=1,\cdots,n$，从而有 $0\leqslant\boldsymbol{x}^v\boldsymbol{y}^v\xrightarrow{N}\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\leqslant 0$，则有 $\boldsymbol{0}\leqslant\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$，即 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{C}$，得证 $\boldsymbol{C}^v\searrow\boldsymbol{C}$.

已知 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是正常下半连续的，由指示函数知 $\bar{f}$ 是正常下半连续的，要证明 $\bar{f}^v$ 是正常下半连续的. 设 $(\boldsymbol{x}^v,\boldsymbol{y}^v)=\boldsymbol{z}^v$，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\bar{\boldsymbol{z}}$，由 $\boldsymbol{C}^v\searrow\boldsymbol{C}$ 知，当 $\varepsilon^v\searrow 0$ 时有 $\boldsymbol{z}^v\to\bar{\boldsymbol{z}}$. 由 $\bar{f}^v\nearrow\bar{f}$ 知，$\sup\bar{f}^v=\bar{f}$，当 v 足够大时，$\forall\varepsilon>0$，有 $\bar{f}^v+\varepsilon\geqslant\bar{f}$. 取 $\varepsilon=\varepsilon^v$，从而有

$$\begin{aligned}\liminf_{\boldsymbol{z}^v\to\bar{\boldsymbol{z}}}\bar{f}^v(\boldsymbol{z}^v)&=\liminf_{\boldsymbol{z}^v\to\bar{\boldsymbol{z}}}(\bar{f}^v(\boldsymbol{z}^v)+\varepsilon^v)\geqslant\\ &\liminf_{\boldsymbol{z}^v\to\bar{\boldsymbol{z}}}\bar{f}(\boldsymbol{z}^v)\geqslant\bar{f}(\bar{\boldsymbol{z}})\geqslant\bar{f}^v(\bar{\boldsymbol{z}})\end{aligned}$$

所以证得 $\bar{f}^v$ 的下半连续性，且由构造知 $\boldsymbol{C}^v$ 为闭集合. 所以可以由解决单调问题中的方法来解决抽象约束优化问题的序列近似方法的收敛性.

例 3　对于正常的下半连续函数 $f:\boldsymbol{R}^n\to\mathbf{R}$，考虑下面问题：

$$\begin{aligned}\min\quad & f(\boldsymbol{x})\\ \text{s. t.}\quad & \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0},\\ & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{0},\\ & \boldsymbol{S}_+^p\ni\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\perp\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{S}_+^p,\\ & \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{h}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^l$，$\boldsymbol{g}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$，$\boldsymbol{G}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{S}^p$，$\boldsymbol{H}:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{S}^p$，$\boldsymbol{S}_+^p$ 为 $p\times p$ 的正半定对称矩阵构成的锥. 这是一个含有互补约束的半正定锥规划，在求解上有相当大的难度. 设 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Z}$，利用指示函数将原问题转化成下面的问题：

$$\begin{aligned}\min\quad & \bar{f}=f(\boldsymbol{x})+\delta_{[\boldsymbol{0}]}\{\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|+\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\|+\\ & \|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\|\}+\delta_{\boldsymbol{R}_-^m}\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\\ \text{s. t.}\quad & \boldsymbol{C}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\in\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{S}^p\times\boldsymbol{S}^p:\\ & \boldsymbol{0}\preceq\boldsymbol{Z}\perp\boldsymbol{Y}\succeq\boldsymbol{0}\}\end{aligned}$$

构造一近似序列函数：

$$\begin{aligned}\min\quad & \bar{f}^v=f(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2\varepsilon^v}(\|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\|^2+\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\|^2+\\ & \|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\|^2+\|[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]_+\|^2)\\ \text{s. t.}\quad & \boldsymbol{C}^v=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\in\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{S}^p\times\boldsymbol{S}^p:\\ & \boldsymbol{Y}\succeq\boldsymbol{0},\boldsymbol{Z}\succeq\boldsymbol{0},\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Y}\preceq\varepsilon^v\boldsymbol{I}\}\end{aligned}$$

对互补条件的松弛以及罚函数的使用，使得该序列近似问题相对容易求解. 由 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{S}_+^p$，$\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{S}_+^p$ 知 $\boldsymbol{Z}\succeq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{Y}\succeq\boldsymbol{0}$，且有 $\langle\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Y}\rangle=\mathrm{tr}\langle\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Y}\rangle\geqslant 0$. 当 v 越大时，$\varepsilon^v\searrow 0$，$\bar{f}^v\nearrow\bar{f}$，现在证明 $\boldsymbol{C}^v\searrow\boldsymbol{C}$. 由构造知 $\boldsymbol{C}^v$ 单调，只需证 $\boldsymbol{C}^v\to\boldsymbol{C}$，即证

$$\limsup_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v\subseteq\boldsymbol{C}\subseteq\liminf_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v$$

右边显然可得. 左边若成立，等价地有 $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\in\limsup\limits_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v$，都有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\in\boldsymbol{C}$. 由外极限定义，$\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}^v,\boldsymbol{Y}^v)\in\limsup\limits_{v\to\infty}\boldsymbol{C}^v$，$\exists\,N\in\mathcal{N}_\infty^\#$，$\exists\,v\in N$，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}^v,\boldsymbol{Y}^v)\xrightarrow{N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Y})$. 且 $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}^v,\boldsymbol{Y}^v)\in\boldsymbol{C}^v$，有 $0\leqslant\boldsymbol{Z}_i{}^v\boldsymbol{Y}_i{}^v\leqslant\varepsilon^v$，所以

$$0\leqslant\langle\boldsymbol{Z}^v,\boldsymbol{Y}^v\rangle=\mathrm{tr}\,(\boldsymbol{Z}^v\boldsymbol{Y}^v)\leqslant\max_v\{\varepsilon^v\}\cdot p\xrightarrow{N}0$$

从而 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}^v,\boldsymbol{Y}^v)\in\boldsymbol{C}$. 左边的包含关系得证，即有 $\boldsymbol{C}^v\searrow\boldsymbol{C}$. 同时由例 2 可知 $\bar{f}^v$、$\bar{f}$ 是正常下半连续的，$\boldsymbol{C}^v$ 为闭集合. 构造满足单调问题，从而可通过解决单调问题来解决抽象约束优化问题的序列近似方法的收敛性.

5 结语

为了解决约束优化问题的序列近似方法收敛性,本文先用目标函数序列连续收敛、约束集合序列收敛以及最终有界3个条件,得到序列近似问题的全局最优值收敛到原问题的最优值,从而将一复杂问题成功转化为一系列简单可解的问题.由于连续收敛的条件比较强,利用比较弱的上图收敛来替换连续收敛,需要证明两上图收敛集合的交的收敛性,在非凸的条件下很难证明,所以考虑目标函数序列和约束集合序列单调的情况下证明.另一方面,利用地平函数和地平锥证明约束集合的最终有界性从而解决约束优化问题的序列近似方法收敛性,并将这一结果用于分析一些简单的互补约束优化问题的光滑化方法的收敛性.在接下来的工作中,将研究使两个单调序列的条件弱化的情况,在只有一个为单调序列的条件,或者更弱的条件下用上图收敛解决约束优化问题的序列近似方法的收敛性.

参考文献:

[1] Rockafellar R T, Wets R J B. **Variational Analysis** [M]. New York:Springer-Verlag, 1998.

[2] Mordukhovich B S. **Variational Analysis and Generalized Differentiation Ⅰ: Basic Theory** [M]. Berlin:Springer, 2006.

[3] Mordukhovich B S. **Variational Analysis and Generalized Differentiation Ⅱ: Applications** [M]. Berlin:Springer, 2006.

[4] Fukushima Masao. 非线性最优化基础[M]. 林贵华,译. 北京:科学出版社, 2011.
Fukushima Masao. **Nonlinear Optimization** [M]. LIN Gui-hua, trans. Beijing:Science Press, 2011. (in Chinese)

[5] Clarke F H. **Optimization and Nonsmooth Analysis** [M]. New York:Wiley-Interscience, 1983.

[6] Clarke F H, Ledyaev Y S, Stern R J, *et al*. **Nonsmooth Analysis and Control Theory** [M] New York:Springer, 1998.

[7] Polak E, Womersley R S, Yin H X. An algorithm based on active sets and smoothing for discretized semi-infinite minimax problems [J]. **Journal of Optimization Theory and Applications**, 2008, **138**(2):311-328.

[8] Hong L J, YANG Yi, ZHANG Li-wei. Sequential convex approximations to joint chance constrained programs:A Monte Carlo approach [J]. **Operations Research**, 2011, **59**(3):16-17.

Convergence of sequential approximation method for constrained optimization problems

DUAN Qing-song*

(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The convergence of the sequential approximation method for abstract constrained optimization problems is discussed. It is proved that the global optimal solutions of the sequential approximation problems converge to the optimal solutions of the original problem under the continuous convergency of the objective function sequence and the convergency of the constrained set sequence. Moreover, if the objective function sequence is assumed to be epi-convergence instead of continuous convergence, the conclusion still holds when some monotonicity property of the objective functions and the constrained sets of the sequential approximation problems is satisfied. At last, the research result can be applied to analyze the convergence of the smoothing method in solving complementarity constraint optimization problem.

Key words: continuous convergence; epi-convergence; global optimal solution; complementarity constraint optimization