

结构和材料参数对一类可压缩超弹性圆柱管翻转变形影响

赵巍^{1,2}, 袁学刚^{*1,2}, 张洪武¹

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 大连民族大学 理学院, 辽宁 大连 116600)

摘要: 翻转管作为一种理想的防碰撞吸能元件在工程设计、航空航天等领域有着很广泛的应用. 研究了由一类可压缩超弹性材料组成的薄壁圆柱管的翻转有限变形问题, 并将其归结为求解一类二阶非线性常微分方程边值问题. 由于无法得到该边值问题的解析解, 并且传统的数值求解方法也不适用, 提出一种改进的打靶法对其进行有效数值求解, 并分析解的定量行为. 数值结果显示翻转后圆柱管厚度和轴向伸长率随着初始厚度的增大而增大, 且圆柱管处于压缩状态; 轴向伸长率随着泊松比的增大而减小. 此外, 还与不可压缩材料的圆柱管翻转问题进行了对比.

关键词: 可压缩超弹性材料; 圆柱管; 翻转; 改进打靶法

中图分类号: O343.5

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb201604001

0 引言

翻转, 即由内向外翻转或者由外向内翻转, 可以认为是一种可控行为, 翻转管作为理想的能量吸收元件, 在工程设计、航空航天等领域得到了广泛的应用. 利用翻转管技术制造零件具有工艺简单、工序少、成本低、使用可靠、轻量化等一系列优点. 1966年, 美国宇航局使用翻转管作航天飞行器软着陆的保护吸能装置, 相关内容见文献[1].

关于超弹性材料组成的圆柱管翻转问题的理论研究首先是由 Rivlin^[2] 和 Chadwick 等^[3] 进行的, 作者主要讨论管翻转后仍保持圆柱形的假设下翻转解的存在性和唯一性. 但是对于不同材料及不同结构, 翻转问题的力学行为是多种多样的. 对于不可压缩材料, Haughton 等^[4] 考虑由一类 Ogden 材料组成的不可压缩超弹性圆柱管的翻转有限变形问题, 并研究了初始厚度为参数时, 翻转解的稳定性. 作者发现薄壁圆柱管翻转后仍为圆柱形, 厚壁圆柱管翻转后会出现分岔. 赵巍等^[5] 研究由一类横观各向同性不可压缩 neo-Hookean 材料组成的翻转圆柱管的有限变形问题. 作者揭示了初始厚度对有限变形的影响, 并且讨论了径

向横观各向异性参数对轴向伸长率的影响. 一般地, 对于不可压缩材料, 由不可压缩条件和积分变换可以得到翻转问题的解析解. Haughton 等^[6] 发现当材料满足 Blott-Ko 不等式时, 对于任意厚度的球壳都存在唯一的球对称翻转解, 并且理论上讨论了圆柱管和球壳翻转问题的相似点和不同点. 然而对于可压缩材料, 解析解的存在性严格依赖于应变能函数的形式. Carroll 等^[7] 研究一系列可压缩材料结构体有限变形的封闭形式的解, 其中也得到了在不考虑边界条件和端部条件的情况下, 关于 Blatz-Ko 材料组成的圆柱管和球壳翻转问题的封闭形式解. Haughton 和 Orr^[8] 考虑了几类各向同性可压缩超弹性厚壁圆柱管的翻转问题, 得到了对于 Varga 材料, 只能利用数值模拟, 定量分析翻转解的行为. Haughton 和 Chen^[9] 利用 WKB 方法研究由 Varga 材料组成的翻转圆柱管和球壳的分岔行为, 得到详细的分岔准则. Haughton^[10] 考虑了近似可压缩超弹性厚壁圆柱管的翻转问题, 主要研究充分厚的圆柱管翻转后的有限变形以及相对薄的圆柱管的失稳问题. 上述翻转问题都可以归结为一类非线性常微分方程边值问题. 问题的非线性, 增加了求得解析解的难

收稿日期: 2015-12-10; 修回日期: 2016-05-28.

基金项目: 辽宁省教育厅省高校优秀人才支持计划资助项目(LR2012044); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(DC201502050203).

作者简介: 赵巍(1982-), 女, 博士生, E-mail: zhaowei1982122@126.com; 袁学刚^{*}(1971-), 男, 教授, E-mail: yxg1971@163.com; 张洪武(1964-), 男, 教授, E-mail: zhanghw@dlut.edu.cn.

度. Zhao 等^[11] 研究由一类特殊的可压缩材料组成的圆柱管的翻转问题, 得到该问题的精确解. 作者利用数值模拟, 揭示材料参数和初始厚度对翻转后的轴向伸长率和内外半径的影响. 上述翻转问题都可以归结为一类二阶非线性常微分方程边值问题. 但由于可压缩材料的特殊性, 能够通过传统方法求得的翻转解析解很有限, 所以利用数值方法求解此类问题、分析解的定量行为就显得尤为重要.

本文的目的是将薄壁可压缩超弹性圆柱管翻转问题的数学模型归结为二阶非线性常微分方程和相应的边界条件问题, 利用一种改进的打靶法求解, 并利用数值模拟, 分析该翻转解的定量性质, 讨论初始厚度和材料参数对结构翻转有限变形的影响.

1 控制方程和边界条件

假设翻转前后的圆柱管在柱坐标系下的初始构形、现时构形以及在轴对称变形假设下的变形模式分别为

$$0 < A \leq R \leq B, 0 \leq \Theta \leq 2\pi, 0 \leq Z \leq L \quad (1)$$

$$0 < a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -l \leq z \leq 0 \quad (2)$$

$$r = r(R), \theta = \Theta, z = -\lambda Z \quad (3)$$

式中: $r(R)$ 为翻转后的半径, λ 为轴向伸长率, 且 $a = r(B), b = r(A)$.

伸长张量主值、Cauchy 应力主值以及简化后的平衡微分方程如下:

$$\lambda_1 = -r', \lambda_2 = r/R, \lambda_3 = \lambda \quad (4)$$

$$J\sigma_{ii} = \lambda_i W_i (i=1, 2, 3, \text{不求和}) \quad (5)$$

$$Rr''W_{11} + (\lambda_1 + \lambda_2)W_{12} - W_1 - W_2 = 0 \quad (6)$$

式中: $r' = dr/dR, W_i = \partial W / \partial \lambda_i, W_{ij} = \partial^2 W / \partial \lambda_i \partial \lambda_j (i, j=1, 2, i \neq j)$. 对于可压缩材料, 由 $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$ 可知 $r' < 0$.

超弹性材料的本构关系可完全由其应变能函数表示出, 它们的形式也是多种多样的, 如 $W =$

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \widetilde{W}(I_1, I_2, I_3) = \widetilde{W}(i_1, i_2, i_3)^{[4-8]},$$

其中 I_1, I_2, I_3 表示右 Cauchy-Green 变形张量的主不变量; i_1, i_2, i_3 表示右 Cauchy-Green 伸长张量的主不变量. 2001 年, Shang 等^[12] 提出了一种应变能函数, 有如下的形式:

$$W = \widetilde{W}(j_1, j_2, j_3) =$$

$$C_1(j_1 - 3) + C_2(j_2 - 3) + C_3(j_3 - 1) \quad (7)$$

其中 $j_1 = i_1, j_2 = i_2/i_3, j_3 = i_3$; C_1, C_2 和 C_3 是材料常数, 有如下定义:

$$C_1 = \mu \frac{1-3\nu}{1-2\nu}, C_2 = \mu \frac{1-\nu}{1-2\nu}, C_3 = \mu \frac{2\nu}{1-2\nu}$$

其中 μ 和 ν 是在无穷小变形下的剪切模量和泊松比, $\mu > 0, 0 < \nu < 1/3$. 作者研究了关于此类可压缩材料组成的球体的空穴分岔问题. 本文拟研究此类可压缩超弹性材料组成的圆柱管翻转有限变形问题.

由于翻转后圆柱管内外表面无应力, 得到边界条件

$$\sigma_{11}(a) = \sigma_{11}(b) = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\lambda L \leq z \leq 0 \quad (8)$$

假设端部合力为零, 近似平均端部条件为

$$N = 2\pi \int_a^b r \sigma_{33} dr = 0, z = -\lambda L \quad (9)$$

2 数值求解及算例

将式(7)代入方程(6)及边界条件(8)和(9), 得到下方程:

$$r'' + \left(\frac{C_1}{C_2 R} - \frac{R}{2r^2} \right) (r')^3 - \frac{1}{2R} r' = 0 \quad (10)$$

$$r'(B) = - \left(\frac{C_2}{C_1 + C_3 \lambda a / B} \right)^{1/2} \quad (11)$$

$$r'(A) = - \left(\frac{C_2}{C_1 + C_3 \lambda b / A} \right)^{1/2} \quad (12)$$

$$\frac{C_3}{C_1 - C_2 \lambda^{-2}} = \frac{A^2 - B^2}{b^2 - a^2} \quad (13)$$

将式(13)代入方程(10)~(12), 并利用 $C_i (i=1, 2, 3)$ 的表示式, 可得

$$r''(R) + \left(\frac{1-3\nu}{1-\nu} \cdot \frac{1}{R} - \frac{R}{2r(R)^2} \right) (r'(R))^3 -$$

$$\frac{1}{2R} r'(R) = 0;$$

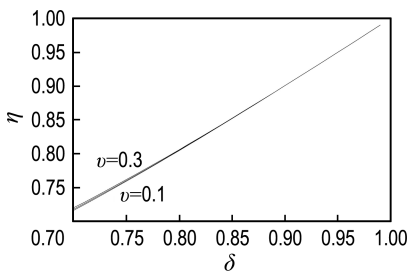
$$r'(A) = - \{ [r(A)^2 - r(B)^2 + A^2 - B^2] / [r(A)^2 - r(B)^2 + (A^2 - B^2) \times (\lambda^{-2} + (\lambda - \lambda^{-1})r(A)/A)] \}^{1/2};$$

$$r'(B) = - \{ [r(A)^2 - r(B)^2 + A^2 - B^2] / [r(A)^2 - r(B)^2 + (A^2 - B^2) \times (\lambda^{-2} + (\lambda - \lambda^{-1})r(B)/B)] \}^{1/2} \quad (14)$$

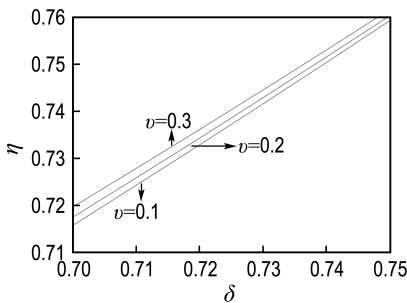
显然, 方程(14)构成了一个典型的二阶非线性常微分方程边值问题. 经典的打靶法是利用一个边界条件和微分方程联立, 将问题化为初值问题进行求解, 然后再通过另一个边界条件修正, 从而得到达到精度要求的数值解. 而边值问题(14)的边界条件非常规, 是关于翻转后内、外半径以及轴向伸长率三者之间的关系式, 所以经典打靶法不适用. 本文提出一种改进的打靶法, 其主要思想是先给定两个变量, 利用第一边界条件和微分方

程联立,运用四阶龙格-库塔方法,得到第三变量,修正上述变量中的一个;同时利用第二边界条件和微分方程联立,运用四阶龙格-库塔方法,得到另一个第三变量,从而修正另一变量.这样,通过两次修正得到关于翻转后内、外半径以及轴向伸长率三者之间的关系.数值上讨论了结构参数和材料参数对有限变形的影响,参见图1~3,其中 $\delta=A/B$, $\eta=a/b$.

图1揭示了初始厚度对圆柱管翻转后厚度的影响.由图1(a)可见,对于给定的 ν ,翻转厚度 η 随着初始厚度 δ 的增加而增大,而泊松比 ν 对变形厚度的影响不大;图1(b)是局部放大图.对比赵巍等^[5]研究的不可压缩材料组成的翻转圆柱管的有限变形问题,发现初始厚度对圆柱管翻转后厚度的影响是类似的.



(a) $\eta-\delta$



(b) 局部放大

图1 不同 ν 下的 $\eta-\delta$ 曲线

Fig. 1 Curves of η versus δ for various values of ν

图2揭示了轴向伸长率和翻转前后圆柱管厚度的关系.由图可见,轴向伸长率 λ 随着厚度的增加而增大,随着泊松比的增加而减小,且 $\lambda < 1$.即圆柱管处于压缩的状态.进一步地,可以看出翻转后圆柱管的厚度变小,这与不可压缩材料在变形过程中的状态改变是不同的.

图3揭示了不同 ν 下的应力分布.容易看出翻转后圆柱管的内部 $\sigma_{11} < 0$,圆柱管表面 $\sigma_{11} \leq 0$,这与边界条件相吻合. σ_{22} 和 σ_{33} 随着翻转后半径的增加而增大.应力的性质与文献[7]中的可压缩材

料的相应性质相似.而且,可以看出泊松比 ν 对于翻转后应力的影响不大.

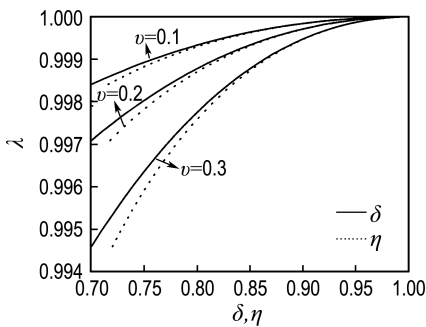


图2 不同 ν 下 $\delta, \eta-\lambda$ 曲线

Fig. 2 Curves of δ, η versus λ for various values of ν

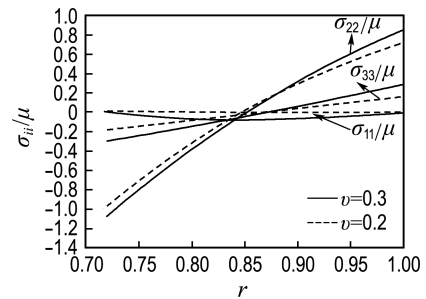


图3 不同 ν 下的应力分布

Fig. 3 The stress distributions for various values of ν

3 结 语

本文得到了由一类可压缩超弹性材料组成的薄壁圆柱管翻转有限变形边值问题的数值解:

- (1)初始厚度 δ 越大,翻转后圆柱管厚度 η 越大;
- (2)初始厚度 δ 越大,轴向伸长率 λ 越大,且圆柱管处于压缩状态;
- (3)泊松比越大,轴向伸长率 λ 越小.

与文献[11]中所考虑的可压缩材料(可求得翻转精确解)相比,可以发现初始厚度、轴向伸长率以及翻转后厚度之间的关系具有比较类似的性质.与此同时,与文献[5]中考虑的不可压缩材料相比,翻转变形前后圆柱管厚度的关系相类似.

本文考虑的是稳定状态下圆柱管翻转后的有限变形问题.针对可压缩材料,通过比较,证明了改进的打靶法的有效性.这也为解决其他可压缩材料组成的结构体的翻转问题提供了一种方法.在此基础上,后续可以考虑利用增量方程的方法研究翻转失稳问题,讨论导致失稳的控制参数的临界值.

参考文献:

[1] 罗云华. 翻管变形机理及翻管成形极限的研

- 究[D]. 武汉:华中科技大学, 2007.
- LUO Yun-hua. Research on deformation mechanism and forming limits of tube inversion [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2007. (in Chinese)
- [2] Rivlin R S. Large elastic deformations of isotropic materials. VI. Further results in the theory of torsion, shear and flexure [J]. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**, 1949, **A242**: 173-195.
- [3] Chadwick P, Haddon E W. Inflation-extension and eversion of a tube of incompressible isotropic elastic material [J]. **Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications**, 1972, **10**(2):258-278.
- [4] Haughton D M, Orr A. On the eversion of incompressible elastic cylinders [J]. **International Journal of Non-linear Mechanics**, 1995, **30**(2):81-95.
- [5] 赵巍,袁学刚,张洪武,等. 翻转后的不可压缩 neo-Hookean 圆柱管的有限变形[J]. 固体力学学报, 2012, **33**(4):404-407.
- ZHAO Wei, YUAN Xue-gang, ZHANG Hong-wu, *et al.* Finite deformation of everted cylindrical shells composed of incompressible neo-Hookean materials [J]. **Acta Mechanica Solida Sinica**, 2012, **33**(4):404-407. (in Chinese)
- [6] Haughton D M, Chen Y-C. On the eversion of incompressible elastic spherical shells [J]. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik**, 1999, **50**(2):312-326.
- [7] Carroll M M, Horgan C O. Finite strain solutions for a compressible elastic solid [J]. **Quarterly Applied Mathematics**, 1990, **48**:767-780.
- [8] Haughton D M, Orr A. On the eversion of compressible elastic cylinders [J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1997, **34**(15): 1893-1914.
- [9] Haughton D M, Chen Y-C. Asymptotic bifurcation results for the eversion of elastic shells [J]. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP**, 2003, **54**(2):191-211.
- [10] Haughton D M. Further results for the eversion of highly compressible elastic cylinders [J]. **Mathematics and Mechanics of Solids**, 1996, **1**(4): 355-367.
- [11] ZHAO W, YUAN X G, ZHANG H W. Exact solutions of finite deformation for everted compressible hyperelastic cylindrical tubes [J]. **Computers, Materials and Continua**, 2014, **43**(2): 75-86.
- [12] SHANG Xin-chun, CHENG Chang-jun. Exact solution for cavitated bifurcation for compressible hyper-elastic materials [J]. **International Journal of Engineering Science**, 2001, **39**(10):1101-1117.

Influences of structure and material parameter on everted deformation for a cylindrical tube composed of compressible hyperelastic materials

ZHAO Wei^{1,2}, YUAN Xue-gang^{*1,2}, ZHANG Hong-wu¹

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. School of Science, Dalian Nationalities University, Dalian 116600, China)

Abstract: The everted tubes, which can be regarded as an ideal anti-collision energy absorbing component, are widely applied to engineering design, aerospace and many other fields of real life. The problem of finite deformation is examined for a thin-walled everted cylindrical tube composed of a class of compressible hyperelastic materials, and then it is described as a class of boundary value problems (BVPs) of a certain second-order nonlinear ordinary differential equation (ODE). Since the exact solution can not be obtained, and the classical numerical methods are not suitable, a modified shooting method is proposed to solve this class of BVPs effectively, and the quantitative behaviors of the solutions are analyzed. The numerical results reveal the thickness and the axial stretch rate of the everted cylindrical tube increase with the increasing initial thickness, and the cylindrical tube is in the state of compression; the axial stretch rate decreases with the increasing Poisson's ratio. Moreover, the obtained conclusions are also compared with those for the incompressible cases.

Key words: compressible hyperelastic material; cylindrical tube; eversion; modified shooting method