

几种最优投资组合在有效边界上相对位置

周伊佳, 于波*

(大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 讨论了均值-VaR、均值-AVaR、方差-均值比等风险-收益投资组合优化模型的最优解的有效性. 基于 Markowitz 均值-方差模型和有效边界理论, 证明了如果各模型的最优投资组合存在, 则一定位于均值-方差有效边界上. 计算了各投资组合模型最优解处的均值和标准差, 根据计算结果讨论了各模型的最优投资组合在有效边界上的位置. 特别地, 均值-VaR 模型的最优投资组合在有效边界上的位置与置信水平有关.

关键词: 投资组合优化模型; 最优投资组合; 有效边界

中图分类号: O224

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb201604014

0 引言

20 世纪 50 年代, Markowitz 首创了经典的投资组合理论: 均值-方差 (mean-variance, M-V) 投资组合优化模型^[1], 它奠定了现代投资组合的理论基础. 在 M-V 模型中, 方差被视为风险估计. 20 世纪 80 年代以来, 随着金融市场的飞速发展及信息技术的创新, 在 Markowitz 投资理论框架下产生了均值-VaR (Value-at-Risk) 投资组合模型. VaR, 是指在市场正常波动下以及在一定的概率水平下, 于给定的置信区间内, 金融资产或资产组合在未来一段时间内可能受到的最大损失^[2]. 人们对 VaR 约束下的投资组合策略的选择问题进行了研究^[3-5]. 根据 VaR 风险度量, 张红兵等^[6]提出多阶段资产组合选择均值-VaR 模型. 王尚户等^[2]利用均值-VaR 方法, 提出了均值-AVaR (average Value-at-Risk) 模型, 并在一定的置信水平下得到了投资组合的均衡理论.

投资者想要获得更高的收益, 就要承受更大的风险; 反之要降低风险, 则获得的收益也随之减少. 由于风险与收益存在着这样的联系, 那么只分别考虑最小风险和最大收益的投资组合决策方法往往不能较好地全面权衡收益与风险之间的关

系. 因此本文基于均值-方差模型的有效边界理论, 研究一系列关于收益-风险的优化模型的最优投资组合, 这些优化模型在某种程度上能够均衡均值与方差, 即收益与风险, 在一定程度上为投资者对资源做出最优的投资组合规划提供参考.

1 投资组合模型

首先介绍一些收益-风险投资组合优化模型及它们的最优解处的收益和标准差.

1.1 均值-方差模型

Markowitz 的均值-方差 (M-V) 模型是经典的投资组合优化模型. 设在投资组合问题中, 投资者选择 n 种风险证券, 证券的收益率向量 $\mathbf{r} = (r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_n)^T$, 其中 r_i 表示第 i 种证券的期望收益率; 投资比例向量 $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$, x_i 是投资第 i 种证券的比例; 投资组合的协方差矩阵 $\mathbf{V} = (v_{ij})_{n \times n}$, 其中 v_{ij} 表示第 i 种证券和第 j 种证券的协方差. 投资组合的期望收益与方差分别为 $\mu = \mathbf{r}^T \mathbf{x}$, $\sigma^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}$. 则 M-V 投资组合模型^[2]为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{r}^T \mathbf{x} = \mu \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{x} = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

收稿日期: 2015-12-05; 修回日期: 2016-03-10.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11171051, 重大计划 91230103); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (DUT15RC(3)037).

作者简介: 周伊佳 (1986-), 女, 博士生, E-mail: zhouyijia@dlut.edu.cn; 于波* (1963-), 男, 教授, 博士生导师, E-mail: yubo@dlut.edu.cn.

假定协方差矩阵 $\mathbf{V}=(v_{ij})_{n\times n}$ 是正定的,根据 Lagrange 乘子法求得式(1)的最优解为^[2]

$$\mathbf{x}^*=\frac{\mu}{D}(B\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}-C\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e})-\frac{1}{D}(C\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}-A\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e})\tag{2}$$

式中: $A=\mathbf{r}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}$, $B=\mathbf{e}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}$, $C=\mathbf{e}^T\mathbf{V}^{-1}\mathbf{r}$, $D=AB-C^2$,根据定义可知, A 、 B 、 C 、 D 均大于零.将式(2)代入 $\sigma^2=\mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{x}$,整理得到 M-V 投资组合的有效边界^[2]

$$R_{(\sigma,\mu)}=\left\{(\sigma,\mu)\in\mathbf{R}^2\left|\frac{\sigma^2}{1/B}-\frac{(\mu-C/B)^2}{D/B^2}=1\right.\right\}\tag{3}$$

即

$$\sigma^2=D^{-1}(B\mu^2-2C\mu+A)\tag{4}$$

在上式中对 μ 求导,可以得到模型的全局最小期望收益率为 C/B ,标准差为 $\sqrt{1/B}$.

1.2 最小化风险-收益比投资组合模型

定义 方差-均值 比 (variance-mean ratio, VMR)模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sigma^2/\mu \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{r}^T\mathbf{x}=\mu \\ & \mathbf{e}^T\mathbf{x}=1 \end{aligned}\tag{5}$$

其经济学含义是投资者在投资一定数额的资产后,平均每一单位收益所承受的风险波动.模型意在使得单位收益率下所承受的风险波动越小越好.

1.3 均值-VaR 与均值-AVaR 投资组合模型

VaR 在概率统计中的表达式^[7]为

$$\text{Prob}(r<VaR^{\alpha}[r])=1-\alpha\tag{6}$$

其中 r 表示投资组合 X 的收益率, $\alpha(0.5<\alpha<1.0)$ 为置信水平,且 $VaR^{\alpha}[r]>0$.假设不存在卖空行为,资产收益率与投资组合收益率 r 均服从正态分布,即 $r\sim N(\mu,\sigma^2)$,于是式(6)可变形为

$$VaR^{\alpha}[r]=z_{\alpha}\sigma-\mu\tag{7}$$

其中 z_{α} 表示标准正态分布的 α 分位点,则有 $z_{\alpha}=\varphi^{-1}(\alpha)$, $\varphi(\cdot)$ 表示标准正态分布的分布函数^[8].

用 VaR 代替式(1)中的方差作为目标函数,得到均值-VaR 模型^[2]:

$$\begin{aligned} \min \quad & z_{\alpha}\sigma-\mu=z_{\alpha}\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{x}}-\mu \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{r}^T\mathbf{x}=\mu \\ & \mathbf{e}^T\mathbf{x}=1 \end{aligned}\tag{8}$$

另外,模型(8)的边界有如下形式:

$$R_{(VaR^{\alpha},\mu)}=\left\{(VaR^{\alpha},\mu)\in\mathbf{R}^2\left|\left(\frac{VaR^{\alpha}+\mu}{z_{\alpha}},\mu\right)\in R_{(\sigma^2,\mu)}\right.\right\}$$

根据模型(8),文献[2]中给出的均值-AVaR 投资组合模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & AVaR^{\alpha}=\frac{VaR^{\alpha}}{\mu}=\frac{z_{\alpha}\sigma-\mu}{\mu} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{r}^T\mathbf{x}=\mu \\ & \mathbf{e}^T\mathbf{x}=1 \end{aligned}\tag{9}$$

显然,此模型表示投资者在投资一定数额的资产后,在给定的置信水平下,平均每一单位收益所承受的损失额,使得在单位收益率下所承受的损失额越小越好^[2].

2 投资组合模型解的有效性分析

定理 1 若全局最小 VMR 投资组合存在,那么它一定是均值-方差有效的.

证明 若 VMR 模型的最优解存在,设最优投资组合为 $\mathbf{x}_{VMR}^*$,对应的均值和标准差分别为 $\mu(\mathbf{x}_{VMR}^*)$ 和 $\sigma(\mathbf{x}_{VMR}^*)$.如果 $\mathbf{x}_{VMR}^*$ 不是均值-方差有效的,则存在另一个可行解 $\mathbf{x}^*$ 满足 $\mu(\mathbf{x}^*)\geq\mu(\mathbf{x}_{VMR}^*)$ 和 $\sigma(\mathbf{x}^*)\leq\sigma(\mathbf{x}_{VMR}^*)$,且至少有一个为严格不等式,不妨设 $\mu(\mathbf{x}^*)>\mu(\mathbf{x}_{VMR}^*)$,依据 VMR 的目标函数可知

$$VMR(\mathbf{x}^*)<VMR(\mathbf{x}_{VMR}^*)$$

这与 $\mathbf{x}_{VMR}^*$ 是全局最小 VMR 投资组合矛盾,因此 $\mathbf{x}_{VMR}^*$ 是 M-V 有效投资组合.

根据 M-V 的有效边界理论,VMR 模型的解是有效解,则可以将式(4)代入模型(5)的目标得到

$$\min \frac{\sigma^2}{\mu}=\frac{D^{-1}(B\mu^2-2C\mu+A)}{\mu}$$

在上式中对 μ 求导,令

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\mu}\left(\frac{D^{-1}(B\mu^2-2C\mu+A)}{\mu}\right)= \\ &= \frac{(2D^{-1}B\mu-2D^{-1}C)\mu-D^{-1}(B\mu^2-2C\mu+A)}{\mu^2}= \\ &= \frac{D^{-1}B\mu^2-D^{-1}A}{\mu^2} \end{aligned}$$

得唯一的驻点 $\mu=\sqrt{A/B}$,继续求得二阶导数

$$\frac{d^2(D^{-1}(B\mu^2-2C\mu+A))}{d\mu^2}=\frac{2D^{-1}A}{\mu^3}$$

由于已知 $D > 0$, 所以有 $D^{-1} > 0$, 又已知 $A > 0$, 综合得到 $d^2 \text{VMR} / d\mu^2 > 0$, 因此 VMR 在 $\mu = \sqrt{A/B}$ 处存在唯一的最小值 $2D^{-1} \sqrt{AB} - 2D^{-1}C$.

类似地, 可以得到下面的结论:

定理 2 若全局最小均值-AVaR 投资组合存在, 那么它一定是均值-方差有效的.

证明 略.

根据最小均值-AVaR 模型的有效性, 可以将式(4)代入模型(9)得到

$$\min AVaR^a = \frac{VaR^a}{\mu} = \frac{z_a \sqrt{D^{-1}(B\mu^2 - 2C\mu + A)} - \mu}{\mu}$$

同样利用求导的方法, 可以得到均值-AVaR 模型在 $\mu = A/C$ 处取得唯一最小值^[2], 且根据式(4)得到对应的标准差 $\sigma = \sqrt{A}/C$.

另外, 在置信水平 $\alpha > \varphi(\sqrt{D/B})$ 下, 全局最小均值-VaR 投资组合存在, 且是均值-方差有效的^[9]. 最优投资组合对应的均值为 $C/B +$

$$\sqrt{\frac{D}{B} \left(\frac{z_a^2}{Bz_a^2 - D} - \frac{1}{B} \right)}, \text{标准差为 } \sqrt{\frac{z_a^2}{Bz_a^2 - D}}.$$

1972 年 Merton^[10] 指出: 在某一投资组合中若存在无风险证券, 设无风险收益率为 r_f , 当且仅当此资本市场线为

$$\mu = r_f + (\sqrt{Br_f^2 - 2Cr_f + A})\sigma$$

时, 资本市场线与 M-V 模型的有效边界相切, 设此切点为 M. 得到 M 点的收益率为 $(A - Cr_f) / (C - Br_f)$, 标准差为 $\frac{\sqrt{Br_f^2 - 2Cr_f + A}}{C - Br_f}$, 斜率为 $k = \sqrt{Br_f^2 - 2Cr_f + A}$.

定理 3 设与有效边界相切的资本市场线斜率为 k , 则有

$$\varphi(\sqrt{2D/(B-C\sqrt{B/A})}) > \varphi(\sqrt{A}) > \varphi(k) > \varphi(\sqrt{D/B})$$

且任取置信水平 α 满足 $\alpha > \varphi(k)$, 全局最小均值-VaR 投资组合存在, 且是均值-方差有效的.

证明 由于 $AB - C^2 > C^2 - C\sqrt{AB}$, 有

$$2(AB - C^2) > AB - C\sqrt{AB}$$

再根据 $D = AB - C^2$, 有 $2D > AB - C\sqrt{AB}$, 不等

式变形得到

$$\frac{2D}{B-C\sqrt{B/A}} > A$$

即 $\varphi(\sqrt{2D/(B-C\sqrt{B/A})}) > \varphi(\sqrt{A})$.

由于无风险收益率一定满足 $r_f < \mu = C/B$, 否则问题将没有意义, 从而有

$$\sqrt{A} > \sqrt{Br_f^2 - 2Cr_f + A}$$

因此有 $\varphi(\sqrt{A}) > \varphi(k)$.

再根据 $C - Br_f > 0$, 有 $B^2 r_f^2 - 2CB r_f + C^2 > 0$, 且已知 $D = AB - C^2$, B, D 均大于零, 因此有

$$B^2 r_f^2 - 2CB r_f + AB > D$$

此时的斜率 $k = \sqrt{Br_f^2 - 2Cr_f + A}$, 故整理得到 $k > \sqrt{D/B}$, 有 $\varphi(k) > \varphi(\sqrt{D/B})$.

综上所述, 对与有效边界相切的资本市场线斜率 k , 有

$$\varphi(\sqrt{2D/(B-C\sqrt{B/A})}) > \varphi(\sqrt{A}) > \varphi(k) > \varphi(\sqrt{D/B})$$

成立, 并且根据文献[9]知, 对满足 $\alpha > \varphi(\sqrt{D/B})$ 的任意置信水平 α , 全局最小均值-VaR 投资组合存在, 且是均值-方差有效的. □

3 投资组合在有效边界上的相对位置

前文中给出了各投资组合模型最优解的有效性, 接下来研究各模型的最优解在有效边界上的相对位置.

定理 4 在有效边界上, 从下到上对应的投资组合为最优 M-V 投资组合、最优 VMR 投资组合与最优均值-AVaR 投资组合和切点 M.

证明 全局最小 M-V 投资组合的期望收益率为 C/B , 最小 VMR 投资组合的期望收益率为 $\sqrt{A/B}$, 两值作比较有

$$\frac{\mu_{\text{VMR}}}{\mu_{\text{M-V}}} = \frac{\sqrt{A/B}}{C/B} = \sqrt{\frac{C^2 + D}{C^2}} > 1$$

因此有 $\sqrt{A/B} > C/B$, 即 $\mu_{\text{VMR}} > \mu_{\text{M-V}}$, 则最优 M-V 投资组合在最优 VMR 投资组合之下.

其次, 均值-AVaR 投资组合的期望收益率为 A/C , 与 VMR 投资组合的期望收益率作比较得到

$$\frac{\mu_{\text{VMR}}}{\mu_{\text{AVaR}}} = \frac{\sqrt{A/B}}{A/C} = \sqrt{\frac{C^2}{C^2 + D}} < 1$$

因此有 $\sqrt{A/B} < A/C$, 故证明最优 VMR 投资组合位于最优均值-AVaR 投资组合之下.

再次, 已知 M 点的收益率为 $\frac{A-Cr_f}{C-Br_f}$, 均值-AVaR 模型的最优解处的收益率为 A/C , 两值作比较有

$$\frac{\mu_M}{\mu_{\text{AVaR}}} = \frac{A-Cr_f}{C-Br_f} \cdot \frac{C}{A} = \frac{AC-C^2r_f}{AC-ABr_f}$$

已知 $D=AB-C^2>0$, 因此 $\mu_M/\mu_{\text{AVaR}}>1$, 可见最优均值-AVaR 投资组合位于 M 点之下.

□

根据定理 4, 这 4 种最优投资组合在有效边界上的相对位置如图 1 所示.

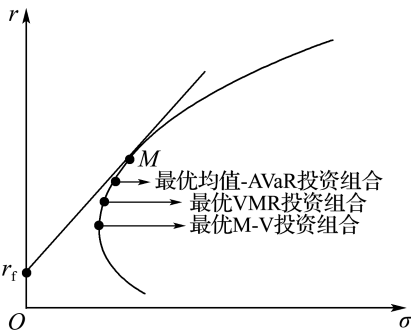


图 1 最优投资组合在有效边界上的相对位置

Fig. 1 Relative location of optimal portfolios on efficient frontier

定理 5 设与有效边界相切的资本市场线斜率为 k , 任取置信水平 α 满足

$$\varphi(k) > \alpha > \varphi(\sqrt{D/B})$$

则最优均值-VaR 投资组合在切点 M 之上.

证明 由定理 3 知道对任意的置信水平 α 满足已知条件, 全局最小均值-VaR 投资组合存在, 方差为 $\frac{z_\alpha^2}{Bz_\alpha^2 - D}$.

另外, 已知 M 点的标准差为 $\frac{\sqrt{Br_f^2 - 2Cr_f + A}}{C - Br_f}$, 斜率为 $k = \sqrt{Br_f^2 - 2Cr_f + A}$, 则有

$$\sigma_M^2 = \left(\frac{\sqrt{Br_f^2 - 2Cr_f + A}}{C - Br_f} \right)^2 = \frac{Br_f^2 - 2Cr_f + A}{B^2r_f^2 - 2BCr_f + C^2} =$$

$$\frac{Br_f^2 - 2Cr_f + A}{B(Br_f^2 - 2Cr_f + A) - D} = \frac{k^2}{Bk^2 - D}$$

由于 $\alpha < \varphi(k)$, 有 $D/z_\alpha^2 > D/k^2$, 故

$$B - D/z_\alpha^2 < B - D/k^2$$

可以得到 $1/\sigma_{\text{VaR}}^2 < 1/\sigma_M^2$, 即 $\sigma_{\text{VaR}}^2 > \sigma_M^2$, 可见最优均值-VaR 投资组合存在, 且位于 M 点之上.

□

综上, 根据定理 4 和定理 5 的结论可知: 在某一投资组合中存在无风险证券时, 取资本市场线的斜率为 k , 任取置信水平 α 满足

$$\varphi(k) > \alpha > \varphi(\sqrt{D/B})$$

则各最优投资组合在有效边界上从下到上的排列依次为最优 M-V 投资组合、VMR 投资组合、均值-AVaR 投资组合、切点 M 和均值-VaR 投资组合, 如图 2 所示.

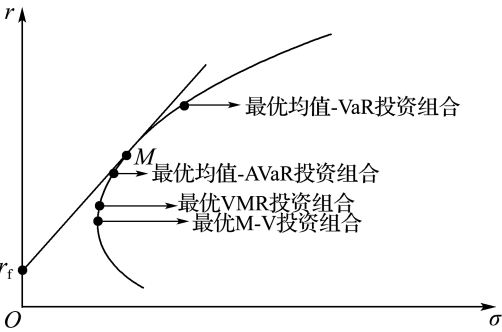


图 2 当置信水平满足 $\varphi(k) > \alpha > \varphi(\sqrt{D/B})$ 时最优投资组合的相对位置

Fig. 2 Relative location of optimal portfolios with the confidence level $\varphi(k) > \alpha > \varphi(\sqrt{D/B})$

定理 6 设与有效边界相切的资本市场线斜率为 k , 任取置信水平 α 满足

$$\varphi(\sqrt{A}) > \alpha > \varphi(k)$$

则最优均值-VaR 投资组合在有效边界上位于最优均值-AVaR 投资组合之上、 M 点之下.

证明 由定理 3 知道对任意的置信水平 α 满足已知条件, 使得全局最小均值-VaR 投资组合存在, 标准差为 $\sqrt{\frac{z_\alpha^2}{Bz_\alpha^2 - D}}$, 全局最小均值-AVaR 投资组合的标准差为 $\sqrt{A}/C$, 两值作比较有

$$\frac{\sigma_{\text{VaR}}}{\sigma_{\text{AVaR}}} = \frac{\sqrt{\frac{z_\alpha^2}{Bz_\alpha^2 - D}} \cdot \frac{C}{\sqrt{A}}}{\sqrt{\frac{C^2 z_\alpha^2}{ABz_\alpha^2 - AD}}} =$$

$$\sqrt{\frac{C^2 z_a^2}{C^2 z_a^2 + D z_a^2 - AD}}$$

由 $\alpha > \varphi(k)$, 保证了分母 $ABz_a^2 - AD > 0$. 已知 $\varphi(\sqrt{A}) > \alpha$, 故 $\sigma_{VaR}/\sigma_{AVaR} > 1$. 由此可见, 最优均值-VaR 投资组合位于最优均值-AVaR 投资组合之上.

由于 $\alpha > \varphi(k)$, 即 $z_a > k$, 有 $D/z_a^2 < D/k^2$, 故 $B - D/z_a^2 > B - D/k^2$. 并且已知

$$\sigma_M^2 = \frac{k^2}{Bk^2 - D}, \sigma_{VaR}^2 = \frac{z_a^2}{Bz_a^2 - D}$$

可以得到 $1/\sigma_{VaR}^2 > 1/\sigma_M^2$, 即 $\sigma_{VaR}^2 < \sigma_M^2$, 可见全局最小 VaR 投资组合存在, 且位于 M 点之下.

□

综上所述, 根据定理 4 和定理 6 的结论可知: 在某一投资组合中存在无风险证券时, 取资本市场线的斜率为 k , 任取置信水平 α 满足

$$\varphi(\sqrt{A}) > \alpha > \varphi(k)$$

则最优 M-V 投资组合、VMR 投资组合、均值-AVaR 投资组合、均值-VaR 投资组合和切点 M 在有效边界上的排列如图 3 所示.

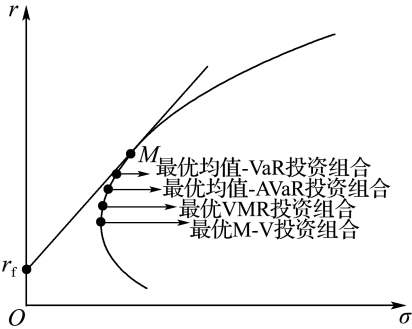


图 3 当置信水平满足 $\varphi(\sqrt{A}) > \alpha > \varphi(k)$ 时最优投资组合的相对位置

Fig. 3 Relative location of optimal portfolios with the confidence level $\varphi(\sqrt{A}) > \alpha > \varphi(k)$

定理 7 任取置信水平 α 满足

$$\varphi(\sqrt{2D/(B-C\sqrt{B/A})}) > \alpha > \varphi(\sqrt{A})$$

则最优均值-VaR 投资组合位于最优 VMR 投资组合之上、最优均值-AVaR 投资组合之下.

证明 由定理 3 知道对任意的置信水平 α 满足已知条件, 全局最小均值-VaR 投资组合存在, 且在此置信水平下,

$$\alpha < \varphi\left(\sqrt{\frac{2D}{B-C\sqrt{B/A}}}\right) \Leftrightarrow z_a^2 < \frac{2D}{B-C\sqrt{B/A}}$$

由于

$$\frac{2D}{B-C\sqrt{B/A}} = \frac{2D}{\sqrt{B/A}(\sqrt{AB}-C)} = \frac{2D\sqrt{A/B}(\sqrt{AB}-C)}{(\sqrt{AB}-C)^2}$$

因此有 $z_a^2 < \frac{2D\sqrt{A/B}(\sqrt{AB}-C)}{(\sqrt{AB}-C)^2}$, 根据 $D =$

$AB - C^2$ 将不等式变为如下的等价形式:

$$(2AB - 2C\sqrt{AB} + D)z_a^2 < 2D(A - C\sqrt{A/B})$$

整理得到

$$(2A - 2C\sqrt{A/B})(Bz_a^2 - D) < Dz_a^2 \quad (10)$$

由于全局最小均值-VaR 投资组合存在, 方差为 $\frac{z_a^2}{Bz_a^2 - D}$, 全局最小 VMR 投资组合的方差为 $D^{-1}(2A - 2C\sqrt{A/B})$, 通过两值作比较, 再根据式(10)有

$$\frac{\sigma_{VMR}^2}{\sigma_{VaR}^2} = \frac{2A - 2C\sqrt{A/B}}{\frac{Dz_a^2}{Bz_a^2 - D}} < 1$$

从而说明了最优 VaR 投资组合位于最优 VMR 投资组合之上.

在置信水平 $\alpha > \varphi(\sqrt{A})$ 下, 全局最小均值-VaR 投资组合的标准差为 $\sqrt{\frac{z_a^2}{Bz_a^2 - D}}$, 全局最小均值-AVaR 投资组合的标准差为 $\sqrt{A}/C$, 两值作比较有

$$\frac{\sigma_{VaR}}{\sigma_{AVaR}} = \sqrt{\frac{z_a^2}{Bz_a^2 - D}} \cdot \frac{C}{\sqrt{A}} = \sqrt{\frac{C^2 z_a^2}{ABz_a^2 - AD}} = \sqrt{\frac{C^2 z_a^2}{C^2 z_a^2 + D z_a^2 - AD}}$$

因为 $\alpha > \varphi(\sqrt{A})$, 即 $z_a > \sqrt{A}$, 因此 $\sigma_{VaR}/\sigma_{AVaR} < 1$, 则最优均值-VaR 投资组合位于最优均值-AVaR 投资组合之下.

□

根据定理 4 和定理 7 得到这样的结论: 在某一投资组合中存在无风险证券时, 取资本市场线的斜率为 k , 任取置信水平 α 满足

$$\varphi(\sqrt{2D/(B-C\sqrt{B/A})}) > \alpha > \varphi(\sqrt{A})$$

则在有效边界上从下到上的排列依次为最优 M-V 投资组合、VMR 投资组合、均值-VaR 投资组合、均值- Δ VaR 投资组合和切点 M 。如图 4 所示。

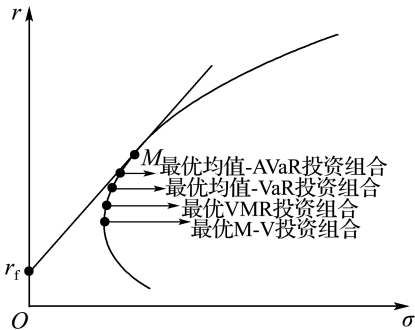


图 4 当置信水平满足 $\varphi\left(\sqrt{\frac{2D}{B-C\sqrt{B/A}}}\right) > \alpha >$

$\varphi(\sqrt{A})$ 时最优投资组合的相对位置

Fig. 4 Relative location of optimal portfolios with

the confidence level $\varphi\left(\sqrt{\frac{2D}{B-C\sqrt{B/A}}}\right) >$

$\alpha > \varphi(\sqrt{A})$

定理 8 任取置信水平 α 满足

$$\alpha > \varphi\left(\sqrt{2D/(B-C\sqrt{B/A})}\right)$$

则最优均值-VaR 投资组合位于最优 VMR 投资组合之下、最优 M-V 投资组合之上。

证明 由于在此置信水平 α 下，全局最小均值-

VaR 投资组合存在，方差为 $\frac{z_a^2}{Bz_a^2-D}$ ，全局最小

VMR 投资组合的方差为 $D^{-1}(2A-2C\sqrt{A/B})$ ，

且有

$$\alpha > \varphi\left(\sqrt{\frac{2D}{B-C\sqrt{B/A}}}\right) \Leftrightarrow z_a^2 > \frac{2D}{B-C\sqrt{B/A}}$$

类似于定理 7 的证明，将不等式变形后可以得到

$$\frac{\sigma_{VMR}^2}{\sigma_{VaR}^2} = \frac{2A-2C\sqrt{A/B}}{\frac{Dz_a^2}{Bz_a^2-D}} > 1$$

从而说明了最优 VMR 投资组合位于最优均值-VaR 投资组合之上。

全局最小均值-VaR 投资组合收益率为 $\frac{C}{B} +$

$\sqrt{\frac{D}{B}\left(\frac{z_a^2}{Bz_a^2-D} - \frac{1}{B}\right)}$ ，M-V 投资组合收益率为 $\frac{C}{B}$ ，

显然，最优均值-VaR 投资组合位于 M-V 投资组

合之上。

□

根据定理 4 和定理 8 的结论可知：在某一投资组合中存在无风险证券时，取资本市场线的斜率为 k ，任取置信水平 α 满足

$$\alpha > \varphi\left(\sqrt{2D/(B-C\sqrt{B/A})}\right)$$

则最优 M-V 投资组合、均值-VaR 投资组合、VMR 投资组合、均值- Δ VaR 投资组合和切点 M 在有效边界上的排列如图 5 所示。

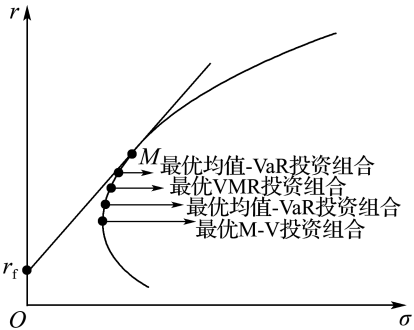


图 5 当置信水平满足 $\alpha > \varphi\left(\sqrt{\frac{2D}{B-C\sqrt{B/A}}}\right)$

时最优投资组合的相对位置

Fig. 5 Relative location of optimal portfolios with the

confidence level $\alpha > \varphi\left(\sqrt{\frac{2D}{B-C\sqrt{B/A}}}\right)$

4 结 语

本文基于均值-方差模型的有效边界理论，证明了已有的一些投资组合优化模型的最优投资组合是均值-方差有效的。通过计算各模型最优解处的均值和标准差，分析了这些最优投资组合在有效边界上的相对位置，并给出了具体图形。利用给出的图形，投资者可以对这些最优投资策略的相对保守程度有更直观的认识，从而，根据自己的投资喜好，选择适合自己的投资策略。

另外，本文也指出，全局最小 M-V 投资组合、VMR 投资组合、均值- Δ VaR 投资组合与切点 M 在有效边界上的相对位置是不变的。但在不同的置信水平下，最优均值-VaR 模型的投资组合在有效边界上的相对位置会发生改变。因此在利用均值-VaR 模型确定投资决策时，要将 α 的影响因素考虑在内。

参考文献:

- [1] Markowitz H. Portfolio selection [J]. **The Journal of Finance**, 1952, **7**(1):77-91.
- [2] 王尚户,张崇岐. 基于均值-AVaR的投资组合均衡分析[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2007, **6**(6):11-13.
WANG Shang-hu, ZHANG Chong-qi. Mean-AVaR based portfolio balanced analysis [J]. **Journal of Guangzhou University (Natural Science Edition)**, 2007, **6**(6):11-13. (in Chinese)
- [3] Alexandre G, Baptista A M. Economic implications of using mean-VAR model for portfolio selection;a comparison mean-variance with analysis [J]. **Journal of Economic Dynamics & Control**, 2002, **26**(7-8):1159-1193.
- [4] Basak S, Shapiro A. Value-at-risk-based risk management;optimal policies and asset prices [J]. **Review of Financial Studies**, 2001, **14**(2):371-405.
- [5] Gencay R, Selcuk F, Ulugulyagci A. High volatility, thick tails and extreme value theory in value-at-risk estimation [J]. **Insurance;Mathematics and Economics**, 2003, **33**:337-356.
- [6] 张红兵,李高明,邸涛. 多阶段资产组合选择均值-VaR模型的研究[J]. 纺织高校基础科学学报, 2005, **18**(2):158-161.
ZHANG Hong-bing, LI Gao-ming, DI Tao. Study on mean-VaR models for multi-period portfolio selection [J]. **Basic Sciences Journal of Textile Universities**, 2005, **18**(2):158-161. (in Chinese)
- [7] 屠新曙,王春峰. 最佳均值-VaR投资组合问题的研究[J]. 湘潭大学自然科学学报, 2002, **24**(2):13-17.
TU Xin-shu, WANG Chun-feng. The mean-VaR optimum portfolio model [J]. **Natural Science Journal of Xiangtan University**, 2002, **24**(2):13-17. (in Chinese)
- [8] 林旭东,巩前锦. 正态条件下均值-CVaR有效前沿的研究[J]. 管理科学, 2004, **17**(3):52-55.
LIN Xu-dong, GONG Qian-jin. Research on the efficient frontier of mean-CVaR under normal distribution condition [J]. **Management Sciences in China**, 2004, **17**(3):52-55. (in Chinese)
- [9] 荣喜民,武丹丹,张奎廷. 基于均值-VaR的投资组合最优化[J]. 数理统计与管理, 2005, **25**(5):96-103.
RONG Xi-min, WU Dan-dan, ZHANG Kui-ting. Mean-VaR based portfolio optimization [J]. **Journal of Applied Statistics and Management**, 2005, **25**(5):96-103. (in Chinese)
- [10] Merton R C. An analytic derivation of the efficient portfolio frontier [J]. **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 1972, **7**(4):1851-1872.

Relative location of optimal portfolios on efficient frontier

ZHOU Yi-jia, YU Bo*

(School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The validities of the optimal solutions of reward-risk portfolio optimization models are discussed, such as mean-VaR model, mean-AVaR model, mean-variance ratio model, etc.. It is proved that based on Markowitz mean-variance model and efficient frontier theory, if the optimal portfolios exist, they must be located on the efficient frontier of mean-variance. The mean and standard deviation of these models' optimal solutions are calculated. According to the calculated results, the relative location of the optimal portfolios on the efficient frontier is discussed. Particularly, the location of mean-VaR model's optimal portfolio on the efficient frontier varies with confidence levels.

Key words: portfolio optimization model; optimal portfolio; efficient frontier