文章编号：1000-8608(2016)04-0432-09

# 一类 DGH 方程的新保结构算法研究

王 俊 杰*[1,2]

（1.普洱学院 数学系，云南 普洱　665000；
2.西北大学 数学学院，陕西 西安　710127）

**摘要**：DGH 方程作为一类重要的非线性水波方程有着广泛的应用前景.基于哈密顿系统的多辛理论研究了一类 DGH 方程的数值解法，利用平均向量场方法对此哈密顿系统进行了数值离散，构造了 DGH 方程的局部能量保结构算法和局部动量保结构算法.数值算例表明，这两种保结构算法具有较好的长时间数值稳定性.

**关键词**：哈密顿系统；保结构算法；多辛理论；DGH 方程

**中图分类号**：O29　　**文献标识码**：A　　**doi**：10.7511/dllgxb201604016

## 0 引 言

非线性水波方程是一类重要的非线性问题，随着科技的发展，非线性问题的研究已经成为当代研究的热点.非线性水波方程采用不同近似方法可以得到不同的完全可积的方程，例如 KdV 方程、BBM 方程、Camassa-Holm 方程、DGH 方程.

近几十年，KdV 方程、Camassa-Holm 方程、DGH 方程引起了国内外学者的广泛关注[1-13]，发现了这些方程的许多性质，例如：KdV 方程、Camassa-Holm方程、DGH 方程都是可积方程，都广泛地存在孤立波解.Camassa-Holm 方程具有一个 Lax 对、双哈密顿结构及无穷个守恒量.对 DGH 方程的研究主要集中在定性方面的研究，数值模拟研究还比较少，然而在实际应用中要求得 DGH 方程的精确解几乎不可能，大部分情况下只能用数值方法来模拟 DGH 方程，鉴于此，本文主要研究 DGH 方程的数值模拟方法.

现在，越来越多的学者在构造数值方法时，关注设计的算法能否保持系统原有的一些特性，这样的算法称为保结构算法.1984 年我国计算数学大师冯康系统地提出了保结构算法的理论框架，随后，保结构算法迅速发展，得到了许多方程的保结构算法，这些结果无一例外地证实保结构算法有明显的优点.20 世纪末，Marsden 等应用变分的思想提出了偏微分方程的多辛哈密顿系统[14]，并且得到了多辛守恒律；而 Reich 应用辛几何的思想，提出了偏微分方程的多辛格式[15]，从而可以更加方便地应用于偏微分方程.经过十几年的发展，保多辛结构算法已经取得一定研究成果[16-27]，这些成果证明保多辛结构算法可以进行长时间的数值跟踪.

近年来，Celledoni 等[28]利用 AVF(平均向量场)方法来求解哈密顿系统，Chen 等[29]利用 AVF 方法提出了多辛哈密顿偏微分方程组整体能量守恒的数值格式，Gong 等[19]提出了多辛哈密顿偏微分方程组整体能量守恒的数值格式、局部能量守恒的数值格式、局部动量守恒的数值格式.

本文通过引入正则动量，证明 DGH 方程具有多辛结构.首先给出多辛哈密顿格式，以及此格式具有的多辛守恒律、局部能量守恒律和局部动量守恒律.然后给出多辛哈密顿方程的离散保结构算法格式，即局部能量保结构算法格式和局部动量保结构算法格式，进而给出 DGH 方程的保结构算法.最后通过两个数值模拟算例，验证算法性能.

**收稿日期**：2015-11-20；　**修回日期**：2016-04-12.
**基金项目**：云南省教育厅科学研究基金资助项目(2015y490)；普洱学院创新团队项目(CXTD003).
**作者简介**：王俊杰*(1981-)，男，硕士，副教授，E-mail：pedxsxxwjj@163.com.

## 1　微分方程的多辛哈密顿形式及守恒律

Bridges 首先发现，大量的偏微分方程可以写成下列多辛哈密顿偏微分方程的形式[15]：

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_t+\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_x=\nabla_z S(\boldsymbol{z}) \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{K}\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ $(n\geqslant 3)$ 是反对称矩阵. $S:\boldsymbol{R}^n\to\mathbf{R}$ 是光滑函数，称为哈密顿函数，$\nabla_z S(\boldsymbol{z})$ 为函数 $S(\boldsymbol{z})$ 的梯度. 系统(1)满足 3 个局部守恒律，即多辛守恒律、局部能量守恒律和局部动量守恒律.

**定理 1**[15]　根据 Bridges 多辛理论，偏微分方程(1)满足多辛守恒律

$$\frac{\partial}{\partial t}W+\frac{\partial}{\partial x}k=0 \tag{2}$$

其中 $W$、$k$ 分别表示 $t$ 和 $x$ 方向上的辛结构，具体表达式为

$$W=\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{z}\wedge\boldsymbol{M}\mathrm{d}\boldsymbol{z},\ k=\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{z}\wedge\boldsymbol{K}\mathrm{d}\boldsymbol{z}$$

**定理 2**[15]　根据 Bridges 多辛理论，偏微分方程(1)满足局部能量守恒律：

$$\frac{\partial}{\partial t}E+\frac{\partial}{\partial x}F=0 \tag{3}$$

局部动量守恒律：

$$\frac{\partial}{\partial t}I+\frac{\partial}{\partial x}G=0 \tag{4}$$

其中

$$I=\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_x,\ G=S(\boldsymbol{z})-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}_t,$$

$$E=S(\boldsymbol{z})-\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_x,\ F=\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_t$$

$E$ 为能量密度；$F$ 为能量流；$I$ 为动量密度；$G$ 为动量流.

如果 $\boldsymbol{z}(t,x)$ 关于 $x$ 是周期函数或者满足齐次边界条件，偏微分方程(1)满足整体能量和整体动量守恒律：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-L}^{L}E(\boldsymbol{z})\mathrm{d}x=0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-L}^{L}F(\boldsymbol{z})\mathrm{d}x=0 \tag{5}$$

## 2　多辛哈密顿偏微分方程的保结构算法

为了研究问题方便，首先引入下面符号：

向前差分算子

$$D_t\boldsymbol{u}^n=\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}-\boldsymbol{u}^n}{\tau},\ D_x\boldsymbol{u}_j=\frac{\boldsymbol{u}_{j+1}-\boldsymbol{u}_j}{h} \tag{6}$$

平均算子

$$A_t\boldsymbol{u}^n=\frac{\boldsymbol{u}^{n+1}+\boldsymbol{u}^n}{2},\ A_x\boldsymbol{u}_j=\frac{\boldsymbol{u}_{j+1}+\boldsymbol{u}_j}{2} \tag{7}$$

上面的算子满足 $D_tD_x=D_xD_t$，$A_tA_x=A_xA_t$，$DA=AD$，及推广的 Leibniz 法则：

$$D_x(\boldsymbol{uv})_j=\boldsymbol{u}_{j+1}D_x\boldsymbol{v}_j+D_x\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j$$

$$D_t(\boldsymbol{uv})_j=\boldsymbol{u}_{j+1}D_t\boldsymbol{v}_j+D_t\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j$$

### 2.1　局部能量保结构算法

利用上面的算子，对空间方向进行离散，得到哈密顿系统(1)的半离散格式：

$$\boldsymbol{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_x\boldsymbol{z}_j(t)+\boldsymbol{K}D_x\boldsymbol{z}_j(t)=\nabla_z S(A_x\boldsymbol{z}_j(t)) \tag{8}$$

用 AVF 方法对半离散格式(8)时间方向进行离散，得到哈密顿系统(1)的全离散格式：

$$\boldsymbol{M}D_tA_xz_j^n+\boldsymbol{K}D_xA_tz_j^n=\int_0^1\nabla_z S((1-\xi)A_xz_j^n+\xi A_xz_j^{n+1})\mathrm{d}\xi \tag{9}$$

为了分析全离散格式(9)的局部能量守恒律和局部动量守恒律，引入定义：

**定义 1**　记

$$R_{\mathrm{e}}=D_tA_xE_j^n+D_xA_tF_j^n \tag{10}$$

$$R_{\mathrm{m}}=D_tA_xI_j^n+D_xA_tG_j^n \tag{11}$$

称 $R_{\mathrm{e}}$、$R_{\mathrm{m}}$ 分别是局部能量、动量守恒律在 $A_xz_j^n$、$A_tz_j^n$ 处的误差，其中

$$E_j^n=S(z_j^n)-\frac{1}{2}(z_j^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}D_xz_j^n,$$

$$F_j^n=\frac{1}{2}(z_j^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}D_tz_j^n,$$

$$I_j^n=\frac{1}{2}(z_j^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}D_xz_j^n,$$

$$G_j^n=S(z_j^n)-\frac{1}{2}(z_j^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}D_tz_j^n$$

记

$$\varepsilon^n=\Delta x\sum_{j=0}^{N-1}A_xE_j^n \tag{12}$$

$$\eta^n=\Delta x\sum_{j=0}^{N-1}A_xF_j^n \tag{13}$$

称 $\varepsilon^n$、$\eta^n$ 分别是整体能量和整体动量.

**定理 3**[19]　全离散格式(9)满足离散局部能量守恒律：

$$D_tE_{j+\frac{1}{2}}^n+D_xF_j^{n+\frac{1}{2}}=0$$

**定理 4**[19]　如果满足周期边界条件 $\boldsymbol{z}(x+L,t)=\boldsymbol{z}(x,t)$，全离散格式(9)满足离散整体能量守恒律：

$$\varepsilon^{n+1}=\varepsilon^n$$

### 2.2 局部动量保结构算法

对时间方向进行离散，得到哈密顿系统(1)的半离散格式：

$$\boldsymbol{M}D_t\boldsymbol{z}^n(x)+\boldsymbol{K}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A_t\boldsymbol{z}^n(x)=\nabla_z S(A_t\boldsymbol{z}^n(x)) \tag{14}$$

用 AVF 方法对半离散格式(14)空间方向进行离散，得到哈密顿系统(1)的全离散格式：

$$\boldsymbol{M}D_tA_xz_j^n+\boldsymbol{K}D_xA_tz_j^n=\int_0^1\nabla_z S((1-\xi)A_tz_j^n+\xi A_tz_{j+1}^n)\mathrm{d}\xi \tag{15}$$

**定理 5**[19] 全离散格式(15)满足离散局部动量守恒律：

$$D_tI_{j+\frac{1}{2}}^n+D_xG_j^{n+\frac{1}{2}}=0$$

**定理 6**[19] 如果满足周期边界条件 $\boldsymbol{z}(x+L,t)=\boldsymbol{z}(x,t)$，全离散格式(15)满足离散整体动量守恒律：

$$\eta^{n+1}=\eta^n$$

## 3 一类 DGH 方程的新保结构算法

1895 年，Korteweg 和他的学生 deVries 研究无黏滞、不可压缩流体运动时得到一个浅水波方程(在长波和小振幅条件下)，即 KdV 方程：

$$u_t+2\omega u_x+3uu_x+\gamma u_{xxx}=0 \tag{16}$$

该方程是非线性水波理论研究的一个基本方程. 1993 年，美国阿尔莫斯国家实验室的 Camassa 和 Holm 考虑重力作用下浅水层自由表面的水波运动时，推导出 Camassa-Holm 方程(简称 C-H 方程)：

$$u_t+2\omega u_x+3uu_x-\alpha^2u_{xxt}-\alpha^2(uu_{xxx}+2u_xu_{xx})=0 \tag{17}$$

该方程成为非线性水波理论研究的另一类重要的基本方程. 2001 年，Dullin、Gottwald 和 Holm 从 Euler 方程出发，得到了一类带线性和非线性色散项的新型浅水波方程，即 DGH 方程[1]：

$$u_t+2\omega u_x+3uu_x+\gamma u_{xxx}-\alpha^2u_{xxt}-\alpha^2(uu_{xxx}+2u_xu_{xx})=0 \tag{18}$$

当 $\alpha=0$ 时，DGH 方程变为 KdV 方程，当 $\gamma=0$ 时，DGH 方程转化为 C-H 方程.

对于系统(18)，引入正则动量 $u_t=2w_x$，$u=\phi_x$，$u_x=\psi$，$\frac{\alpha^2}{2}u_t-\gamma u_x=-\alpha^2u\psi+\Phi$，系统(18)可以表示为下面等价形式：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\phi_t-\frac{\alpha^2}{2}\psi_t-\Phi_x=-w-2\omega u-\frac{3}{2}u^2-\frac{\alpha^2}{2}\psi^2,\\
&-\frac{1}{2}u_t+w_x=0,\\
&-\phi_x=-u,\\
&u_x=\psi,\\
&\frac{\alpha^2}{2}u_t=-\alpha^2u\psi+\Phi+\gamma\psi
\end{aligned} \tag{19}$$

定义状态变量 $\boldsymbol{z}=(u\quad\phi\quad w\quad\Phi\quad\psi)$，可以把系统(19)写成多辛哈密顿偏微分方程的形式(1)，其中

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0&0&-\frac{\alpha^2}{2}\\-\frac{1}{2}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\\frac{\alpha^2}{2}&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

哈密顿函数为

$$S(\boldsymbol{z})=-uw-\omega u^2-\frac{u^3}{2}-\frac{\alpha^2}{2}\psi^2u+\Phi\psi+\frac{\gamma}{2}\psi^2$$

系统(19)满足多辛守恒律(2)，其中

$$W=\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{z}\wedge\boldsymbol{M}\mathrm{d}\boldsymbol{z}=\frac{1}{2}\mathrm{d}u\wedge(\mathrm{d}\phi-\alpha^2\mathrm{d}\psi),$$

$$k=\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{z}\wedge\boldsymbol{K}\mathrm{d}\boldsymbol{z}=\mathrm{d}\Phi\wedge\mathrm{d}u+\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}w$$

系统(19)满足局部能量守恒律(3)，其中

$$E=-\frac{1}{2}uw-\omega u^2-\frac{u^3}{2}-\frac{\alpha^2}{2}\psi^2u+\frac{1}{2}\Phi\psi+\frac{\gamma}{2}\psi^2-\frac{1}{2}(\phi w_x-u\Phi_x),$$

$$F=\frac{1}{2}(\Phi u_t-w\phi_t+\phi w_t-u\Phi_t)$$

系统(19)满足局部动量守恒律(4)，其中

$$I=-\frac{1}{4}\phi u_x+\frac{\alpha^2}{4}\psi u_x+\frac{1}{4}u(\phi_x-\alpha^2\psi_x),$$

$$G=-uw-\omega u^2-\frac{u^3}{2}-\frac{\alpha^2}{2}\psi^2u+\Phi\psi+\frac{\gamma}{2}\psi^2-\frac{1}{4}(\phi-\alpha^2\psi)u_t-\frac{1}{4}(\phi_t-\alpha^2\psi_t)u$$

### 3.1 DGH 方程的局部能量保结构算法

对系统(18)的等价方程组(19)应用局部能量保结构算法(9)可得

$$\frac{1}{2}D_tA_x\phi_j^n-\frac{\alpha^2}{2}D_tA_x\psi_j^n-D_xA_t\Phi_j^n=$$
$$-A_xA_tw_j^n-2\omega A_xA_tu_j^n-\frac{\alpha}{2}f(A_xu_j^{n+1},A_xu_j^n)-$$
$$\frac{\alpha^2}{2}f(A_x\psi_j^{n+1},A_x\psi_j^n),$$
$$-\frac{1}{2}D_tA_xu_j^n+D_xA_tw_j^n=0,$$
$$-D_xA_t\phi_j^n=-A_xA_tu_j^n,$$
$$D_xA_tu_j^n=A_xA_t\psi_j^n,$$
$$\frac{\alpha^2}{2}D_tA_xu_j^n=-\alpha^2g(A_xu_j^{n+1},A_xu_j^n,A_x\psi_j^{n+1},$$
$$A_x\psi_j^n)+A_xA_t\Phi_j^n+\gamma A_xA_t\psi_j^n \tag{20}$$

其中

$$f(r,s)=\frac{1}{3}(r^2+r\cdot s+s^2)$$
$$g(r,s,u,v)=\frac{1}{3}r\cdot u+\frac{1}{6}s\cdot u+\frac{1}{6}r\cdot v+\frac{1}{3}s\cdot v$$

全离散格式(20)满足离散局部能量守恒律：

$$D_t\Big[-\frac{1}{2}u_{j+\frac{1}{2}}^nw_{j+\frac{1}{2}}^n-\omega(u_{j+\frac{1}{2}}^n)^2-\frac{(u_{j+\frac{1}{2}}^n)^3}{2}-$$
$$\frac{\alpha^2}{2}(\psi_{j+\frac{1}{2}}^n)^2u_{j+\frac{1}{2}}^n+\frac{1}{2}\Phi_{j+\frac{1}{2}}^n\psi_{j+\frac{1}{2}}^n+\frac{\gamma}{2}(\psi_{j+\frac{1}{2}}^n)^2-$$
$$\frac{1}{2}(\phi_{j+\frac{1}{2}}^nD_xw_{j+\frac{1}{2}}^n-u_{j+\frac{1}{2}}^nD_x\Phi_{j+\frac{1}{2}}^n)\Big]+$$
$$D_x\Big[\frac{1}{2}(\Phi_j^{n+\frac{1}{2}}D_tu_j^{n+\frac{1}{2}}-w_j^{n+\frac{1}{2}}D_t\phi_j^{n+\frac{1}{2}}+$$
$$\phi_j^{n+\frac{1}{2}}D_tw_j^n-u_j^{n+\frac{1}{2}}D_t\Phi_j^{n+\frac{1}{2}})\Big]=0 \tag{21}$$

消去辅助变量可以得到局部能量守恒格式为

$$D_tA_tA_x^3u_j^n-\alpha^2D_tD_xA_tA_xu_j^n-$$
$$D_x^2A_tg(A_xu_j^{n+1},A_xu_j^n,A_x\psi_j^{n+1},A_x\psi_j^n)+$$
$$\gamma A_t^2u_j^n+2wD_xA_t^2A_x^2u_j^n+$$
$$\frac{\alpha}{2}D_xA_tA_xf(A_xu_j^{n+1},A_xu_j^n)+$$
$$\frac{\alpha^2}{2}D_xA_tA_xf(A_x\psi_j^{n+1},A_x\psi_j^n)=0 \tag{22}$$

### 3.2 DGH 方程的局部动量保结构算法

对系统(18)的等价方程组(19)应用局部动量保结构算法(15)可得

$$\frac{1}{2}D_tA_x\phi_j^n-\frac{\alpha^2}{2}D_tA_x\psi_j^n-D_xA_t\Phi_j^n=$$
$$-A_xA_tw_j^n-2\omega A_xA_tu_j^n-\frac{\alpha}{2}f(A_xu_{j+1}^n,A_xu_j^n)-$$
$$\frac{\alpha^2}{2}f(A_x\psi_j^{n+1},A_x\psi_j^n),$$
$$-\frac{1}{2}D_tA_xu_j^n+D_xA_tw_j^n=0,$$
$$-D_xA_t\phi_j^n=-A_xA_tu_j^n,$$
$$D_xA_tu_j^n=A_xA_t\psi_j^n,$$
$$\frac{\alpha^2}{2}D_tA_xu_j^n=-\alpha^2g(A_xu_{j+1}^n,A_xu_j^n,A_x\psi_{j+1}^n,A_x\psi_j^n)+$$
$$A_xA_t\Phi_j^n+\gamma A_xA_t\psi_j^n \tag{23}$$

其中

$$f(r,s)=\frac{1}{3}(r^2+r\cdot s+s^2)$$
$$g(r,s,u,v)=\frac{1}{3}r\cdot u+\frac{1}{6}s\cdot u+\frac{1}{6}r\cdot v+\frac{1}{3}s\cdot v$$

全离散格式(23)满足离散局部动量守恒律：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[-\frac{1}{4}\phi_{j+\frac{1}{2}}^nD_xu_{j+\frac{1}{2}}^n+\frac{\alpha^2}{4}\psi_{j+\frac{1}{2}}^nD_xu_{j+\frac{1}{2}}^n+$$
$$\frac{1}{4}u_{j+\frac{1}{2}}^n(D_x\phi_{j+\frac{1}{2}}^n-\alpha^2D_x\psi_{j+\frac{1}{2}}^n)\Big]+$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[-u_j^{n+\frac{1}{2}}w_j^{n+\frac{1}{2}}-\omega(u_j^{n+\frac{1}{2}})^2-\frac{(u_j^{n+\frac{1}{2}})^3}{2}-$$
$$\frac{\alpha^2}{2}(\psi_j^{n+\frac{1}{2}})^2u_j^{n+\frac{1}{2}}+\Phi_j^{n+\frac{1}{2}}\psi_j^{n+\frac{1}{2}}+\frac{\gamma}{2}(\psi_j^{n+\frac{1}{2}})^2-$$
$$\frac{1}{4}(\phi_j^{n+\frac{1}{2}}-\alpha^2\psi_j^{n+\frac{1}{2}})D_tu_j^{n+\frac{1}{2}}-$$
$$\frac{1}{4}(D_t\phi_j^{n+\frac{1}{2}}-\alpha^2D_t\psi_j^{n+\frac{1}{2}})u_j^{n+\frac{1}{2}}\Big]=0 \tag{24}$$

消去辅助变量可以得到局部动量守恒格式为

$$D_tA_tA_x^3u_j^n-\alpha^2D_tD_xA_tA_xu_j^n-$$
$$D_x^2A_tg(A_xu_{j+1}^n,A_xu_j^n,A_x\psi_{j+1}^n,A_x\psi_j^n)+$$
$$\gamma A_t^2u_j^n+2wD_xA_t^2A_x^2u_j^n+$$
$$\frac{\alpha}{2}D_xA_tA_xf(A_xu_{j+1}^n,A_xu_j^n)+$$
$$\frac{\alpha^2}{2}D_xA_tA_xf(A_x\psi_{j+1}^n,A_x\psi_j^n)=0 \tag{25}$$

## 4 数值算例

下面应用局部能量保结构算法和局部动量保结构算法对 DGH 方程(18)进行数值模拟，并且分析该数值方法的离散局部能量和动量守恒律误差. 本文将对局部能量保结构算法、局部动量保结构算法与有限差分法(中心差分法)的数值结果和精确解进行比较. 对局部能量保结构算法、局部动量保结构算法与有限差分法取相同的空间和时间步长.

### 4.1 DGH方程的局部能量保结构算法数值模拟

4.1.1 孤立波A 取参数 $\alpha=1,\omega=1,\gamma=1$，考虑DGH方程(18)的孤立波的初值条件为

$$u(x,0)=-\frac{3}{2}+\cos(-|x|)$$

由文献[30]，可以得到DGH方程(18)的初值问题有孤立波解

$$u(x,t)=-\frac{3}{2}+\cos(-|x+t|)$$

取空间步长 $\Delta x=0.01$，时间步长 $\Delta t=0.05$，计算到 $T=60$. 计算结果见表1和图1、2. 表1给出了有限差分法、局部能量保结构算法和精确解的比较. 图1给出了DGH方程孤立波的初值问题随时间的演化图. 图2给出了DGH方程孤立波初值问题的局部能量保结构算法的局部动量守恒律误差.

表1 有限差分法、局部能量保结构算法和精确解的比较(孤立波A)

Tab.1 The comparison between finite difference method, local energy structure-preserving algorithm and exact solution (solitary wave solution A)

| $(x,t)$ | $u(x,t)$ | | |
|---|---|---|---|
| | 有限差分法 | 局部能量保结构算法 | 精确解 |
| (15,2) | −1.775 195 246 32 | −1.775 163 675 670 | −1.775 163 338 051 597 |
| (15,4) | −0.511 256 321 56 | −0.511 295 895 689 | −0.511 295 381 813 331 |
| (15,6) | −2.047 784 213 54 | −2.047 729 523 462 | −2.047 729 260 224 268 |
| (15,8) | −2.032 886 315 63 | −2.032 833 852 320 | −2.032 833 020 333 397 |
| (15,10) | −0.508 754 612 30 | −0.508 797 645 244 | −0.508 797 188 136 526 |

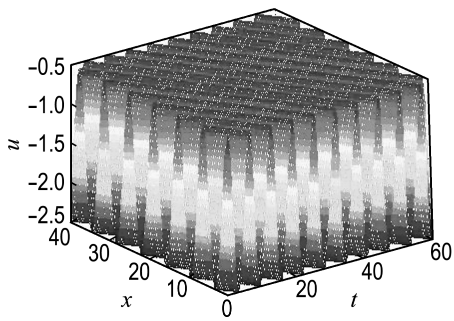


图1 DGH方程局部能量保结构算法的孤立波A

Fig.1 Solitary wave solution A of local energy structure-preserving algorithm of DGH equation

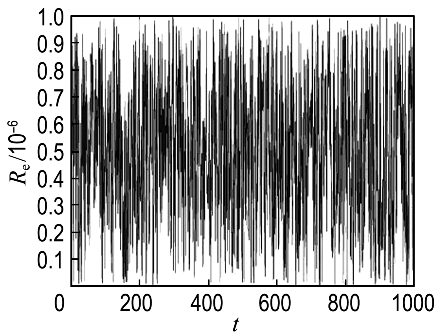


图2 局部能量保结构算法的局部动量守恒律误差(孤立波A)

Fig.2 The error of local momentum conservation law of local energy structure-preserving algorithm (solitary wave solution A)

4.1.2 孤立波B 取参数 $\alpha=1,\omega=1,\gamma=1$，考虑DGH方程(18)的孤立波的初值条件为

$$u(x,0)=-\frac{3}{2}+\exp(-|x|)$$

由文献[30]，可以得到DGH方程(18)的初值问题有孤立波解

$$u(x,t)=-\frac{3}{2}+\exp(-|x+t|)$$

取空间步长 $\Delta x=0.01$，时间步长 $\Delta t=0.05$，计算到 $T=60$. 计算结果见表2和图3、4. 表2给出了有限差分法、局部能量保结构算法和精确解的比较. 图3给出了DGH方程孤立波的初值问题随时间的演化图. 图4给出了DGH方程孤立波初值问题的局部能量保结构算法的局部动量守恒律误差.

### 4.2 DGH方程的局部动量保结构算法数值模拟

4.2.1 孤立波A 取参数 $\alpha=1,\omega=1,\gamma=1$，考虑DGH方程(18)的孤立波的初值条件为

$$u(x,0)=-\frac{3}{2}+\cos(-|x|)$$

由文献[30]，可以得到 DGH 方程(18)的初值问题有孤立波解

$$u(x,t)=-\frac{3}{2}+\cos(-|x+t|)$$

取空间步长 $\Delta x=0.01$，时间步长 $\Delta t=0.05$，计算到 $T=60$. 计算结果见表 3 和图 5、6. 表 3 给出了有限差分法、局部动量保结构算法和精确解的比较. 图 5 给出了 DGH 方程孤立波的初值问题随时间的演化图. 图 6 给出了 DGH 方程孤立波初值问题的局部动量保结构算法的局部能量守恒律误差.

4.2.2　孤立波 B　取参数 $\alpha=1,\omega=1,\gamma=1$，考虑 DGH 方程(18)的孤立波的初值条件为

$$u(x,0)=-\frac{3}{2}+\exp(-|x|)$$

由文献[30]，可以得到 DGH 方程(18)的初值问题有孤立波解

$$u(x,t)=-\frac{3}{2}+\exp(-|x+t|)$$

表 2　有限差分法、局部能量保结构算法和精确解的比较(孤立波 B)

Tab. 2　The comparison between finite difference method, local energy structure-preserving algorithm and exact solution (solitary wave solution B)

| $(x,t)$ | $u(x,t)$ | | |
|---|---|---|---|
| | 有限差分法 | 局部能量保结构算法 | 精确解 |
| (15,2) | −1.499 946 123 1 | −1.499 999 868 904 | −1.499 999 958 600 623 |
| (15,4) | −1.499 969 546 2 | −1.499 992 354 678 | −1.499 999 994 397 204 |
| (15,6) | −1.499 926 469 8 | −1.499 999 756 890 | −1.499 999 999 241 744 |
| (15,8) | −1.499 963 244 6 | −1.499 999 873 453 | −1.499 999 999 897 381 |
| (15,10) | −1.499 954 462 1 | −1.499 999 765 556 | −1.499 999 999 986 112 |

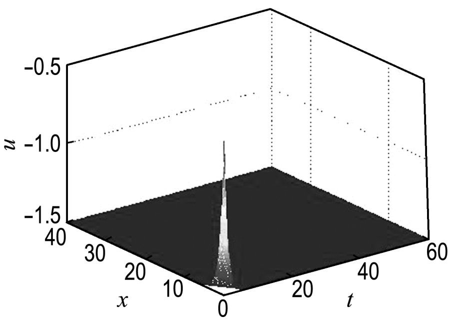


图 3　DGH 方程局部能量保结构算法的孤立波 B

Fig. 3　Solitary wave solution B of local energy structure-preserving algorithm of DGH equation

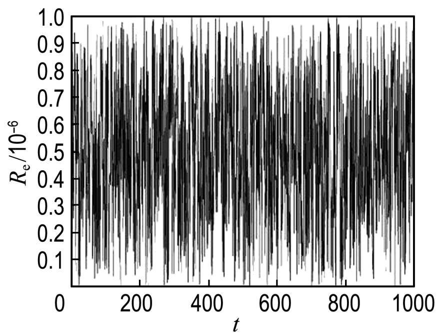


图 4　局部能量保结构算法的局部动量守恒律误差(孤立波 B)

Fig. 4　The error of local momentum conservation law of local energy structure-preserving algorithm (solitary wave solution B)

表 3　有限差分法、局部动量保结构算法和精确解的比较(孤立波 A)

Tab. 3　The comparison between finite difference method, local momentum structure-preserving algorithm and exact solution (solitary wave solution A)

| $(x,t)$ | $u(x,t)$ | | |
|---|---|---|---|
| | 有限差分法 | 局部动量保结构算法 | 精确解 |
| (15,2) | −1.775 165 234 67 | −1.775 163 841 236 | −1.775 163 338 051 597 |
| (15,4) | −0.511 253 147 56 | −0.511 295 812 369 | −0.511 295 381 813 331 |
| (15,6) | −2.047 728 465 23 | −2.047 729 512 346 | −2.047 729 260 224 268 |
| (15,8) | −2.032 854 632 13 | −2.032 833 412 369 | −2.032 833 020 333 397 |
| (15,10) | −0.508 774 123 68 | −0.508 797 214 563 | −0.508 797 188 136 526 |

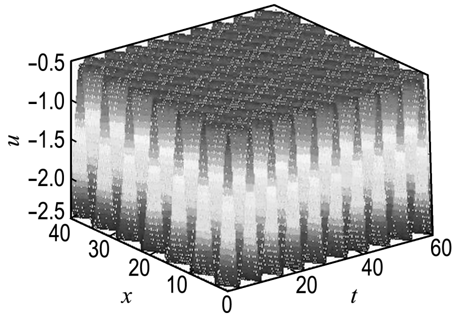


图5 DGH方程局部动量保结构算法的孤立波A

Fig.5 Solitary wave solution A of local momentum structure-preserving algorithm of DGH equation

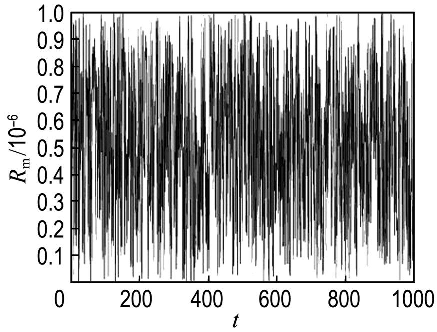


图6 局部动量保结构算法的局部能量守恒律误差(孤立波A)

Fig.6 The error of local energy conservation law of local momentum structure-preserving algorithm (solitary wave solution A)

取空间步长 $\Delta x=0.01$,时间步长 $\Delta t=0.05$,计算到 $T=60$.计算结果见表4和图7、8.表4给出了有限差分法、局部动量保结构算法和精确解的比较.图7给出了DGH方程孤立波的初值问题随时间的演化图.图8给出了DGH方程孤立波初值问题的局部动量保结构算法的局部能量守恒律误差.

表4 有限差分法、局部动量保结构算法和精确解的比较(孤立波B)

Tab.4 The comparison between finite difference method, local momentum structure-preserving algorithm and exact solution (solitary wave solution B)

| $(x,t)$ | $u(x,t)$ | | |
|---|---|---|---|
| | 有限差分法 | 局部动量保结构算法 | 精确解 |
| (15,2) | −1.499 984 236 5 | −1.499 999 632 589 | −1.499 999 958 600 623 |
| (15,4) | −1.499 946 237 4 | −1.499 999 123 845 | −1.499 999 994 397 204 |
| (15,6) | −1.499 989 621 3 | −1.499 999 852 136 | −1.499 999 999 241 744 |
| (15,8) | −1.499 941 236 5 | −1.499 999 231 456 | −1.499 999 999 897 381 |
| (15,10) | −1.499 914 523 6 | −1.499 999 895 623 | −1.499 999 999 986 112 |

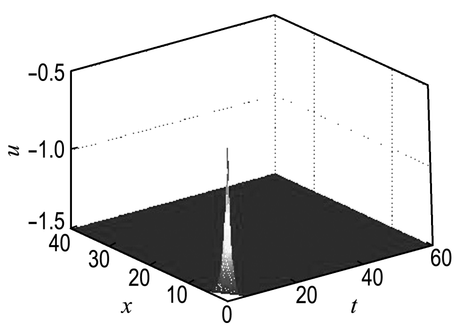


图7 DGH方程局部动量保结构算法的孤立波B

Fig.7 Solitary wave solution B of local momentum structure-preserving algorithm of DGH equation

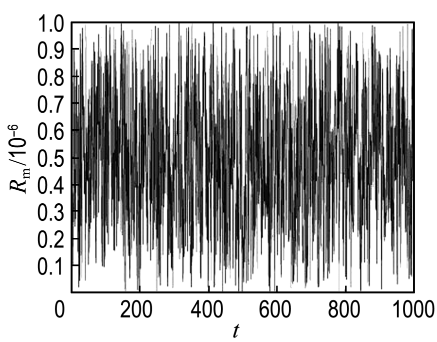


图8 局部动量保结构算法的局部能量守恒律误差(孤立波B)

Fig.8 The error of local energy conservation law of local momentum structure-preserving algorithm (solitary wave solution B)

## 5 结　语

本文利用能量保结构算法和动量保结构算法对一类 DGH 方程的初值问题进行了数值模拟.给出了 DGH 方程的初值问题的离散格式.从数值模拟得到的图 1～8、表 1～4 说明,能量保结构算法和动量保结构算法能够很好地保持孤子解的基本几何性质,并具有良好的长时间数值行为.

## 参考文献:


[1] Dullin H R, Gottwald G A, Holm D D. An integrable shallow water equation with linear and nonlinear dispersion [J]. **Physical Review Letters**, 2001, **87**(19):194501.

[2] Camassa R, Holm D D. An integrable shallow water equation with peaked solitons [J]. **Physical Review Letters**, 1993, **71**(11):1661-1664.

[3] TIAN Li-xin, YIN Jiu-li. New compacton solutions and solitary wave solutions of fully nonlinear generalized Camassa-Holm equations [J]. **Chaos, Solitons & Fractals**, 2004, **20**(2):289-299.

[4] Fisher M, Schiff J. The Camassa-Holm equation: conserved quantities and the initial value problem [J]. **Physics Letters A**, 1999, **259**(5):371-376.

[5] Clarkson P A, Mansfield E L, Priestley T J. Symmetries of a class of nonlinear third-order partial differential equations [J]. **Mathematical and Computer Modelling**, 1997, **25**(8-9):195-212.

[6] Kraenkel R A, Senthilvelan M, Zenchuk A I. On the integrable perturbations of the Camassa-Holm equation [J]. **Journal of Mathematical Physics**, 2000, **41**(5):3160-3169.

[7] DING Dan-ping, TIAN Li-xin. The attractor on dissipative Camassa-Holm equation [J]. **Acta Mathematicae Applicatae Sinica**, 2004, **27**(3):536-545.

[8] TIAN Li-xin, XU Gang, LIU Zeng-rong. The concave or convex peaked and smooth soliton solutions of Camassa-Holm equation [J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2002, **23**(5):557-567.

[9] TIAN Li-xin, SONG Xiu-ying. New peaked solitary wave solutions of the generalized Camassa-Holm equation [J]. **Chaos, Solitons & Fractals**, 2004, **19**(3):621-637.

[10] TIAN Li-xin, GUI Gui-long, LIU Yue. On the well-posedness problem and the scattering problem for the Dullin-Gottwald-Holm equation [J]. **Communications in Mathematical Physics**, 2005, **257**(3):667-701.

[11] GUO Bo-ling, LIU Zheng-rong. Peaked wave solutions of CH-γ equation [J]. **Science in China Series A: Mathematics**, 2003, **46**(5):696-709.

[12] YIN Zhao-yang. Well-posedness, blowup, and global existence for an integrable shallow water equation [J]. **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, 2004, **11**(2-3):393-411.

[13] JU Lin. On solution of the Dullin-Gottwald-Holm equation [J]. **International Journal of Nonlinear Science**, 2006, **1**(1):43-48.

[14] Marsden J E, Patrick G W, Shkoller S. Multisymplectic geometry, variational integrators, and nonlinear PDEs [J]. **Communications in Mathematical Physics**, 1998, **199**(2):351-395.

[15] Reich S. Multi-symplectic Runge-Kutta collocation methods for Hamiltonian wave equations [J]. **Journal of Computational Physics**, 2000, **157**(2):473-499.

[16] LV Zhong-quan, WANG Yu-shun, SONG Yong-zhong. A new multi-symplectic integration method for the nonlinear Schrödinger equation [J]. **Chinese Physics Letters**, 2013, **30**(3):030201.

[17] GONG Yue-zheng, CAI Jia-xiang, WANG Yu-shun. Multi-symplectic Fourier pseudospectral method for the Kawahara equation [J]. **Communications in Computational Physics**, 2013, **16**(1):35-55.

[18] WANG Yu-shun, HONG Jia-lin. Multi-symplectic algorithms for Hamiltonian partial differential equations [J]. **Communication on Applied Mathematics and Computation**, 2013, **27**(2):163-230.

[19] GONG Yue-zheng, CAI Jia-xiang, WANG Yu-shun. Some new structure-preserving algorithms for general multi-symplectic formulations of Hamiltonian PDEs [J]. **Journal of Computational Physics**, 2014, **279**:80-102.

[20] LIU Ting-ting, QIN Meng-zhao. Multisymplectic geometry and multisymplectic Preissman scheme for the KP equation [J]. **Journal of Mathematical**

**Physics**, 2002, **43**(8):4060-4077.

[21] TIAN Yi-min, QIN Meng-zhao, ZHANG Yong-ming, *et al*. The multisymplectic numerical method for Gross-Pitaevskii equation [J]. **Computer Physics Communications**, 2008, **178**(6):449-458.

[22] WANG Yu-shun, WANG Bin, QIN Meng-zhao. Concatenating construction of the multisymplectic schemes for 2 + 1-dimensional sine-Gordon equation [J]. **Science in China Series A: Mathematics**, 2004, **47**(1):18-30.

[23] Escher J, Lechtenfeld O, YIN Zhao-yang. Well-posedness and blow-up phenomena for the 2-component Camassa-Holm equation [J]. **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, 2007, **19**(3): 493-513.

[24] KONG Ling-hua, LIU Ru-xun, ZHENG Xiao-hong. A survey on symplectic and multi-symplectic algorithms [J]. **Applied Mathematics and Computation**, 2007, **186**(1):670-684.

[25] Leimkuhler B, Reich S. **Simulating Hamiltonian Dynamics** [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[26] Islas A L, Schober C M. Backward error analysis for multisymplectic discretizations of Hamiltonian PDEs [J]. **Mathematics and Computers in Simulation**, 2005, **69**(3-4):290-303.

[27] Moore B, Reich S. Backward error analysis for multi-symplectic integration methods [J]. **Numerische Mathematik**, 2003, **95**(4):625-652.

[28] Celledoni E, McLachlan R I, Owren B, *et al*. On conjugate B-series and their geometric structure [J]. **Journal of Numerical Analysis, Industrial and Applied Mathematics**, 2010, **5**(1-2): 85-94.

[29] CHEN Yao, SUN Ya-juan, TANG Yi-fa. Energy-preserving numerical methods for Landau-Lifshitz equation [J]. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, 2011, **44**(59):295207.

[30] 殷久利,田立新. 一类非线性色散方程中的新型奇异孤立波[J]. 物理学报, 2009, **58**(6):3632-3636.
YIN Jiu-li, TIAN Li-xin. New exotic solitary waves in one type of nonlinear dispersive equations [J]. **Acta Physica Sinica**, 2009, **58**(6): 3632-3636. (in Chinese)

# Research on new structure-preserving algorithms for a DGH equation

WANG Jun-jie*[1,2]

(1. Department of Mathematics, Pu′er University, Pu′er 665000, China;
2. School of Mathematics, Northwest University, Xi′an 710127, China)

**Abstract**: DGH equation is an important nonlinear wave equation and has broad application prospect. Numerical method for the equation is studied based on the multi-symplectic theory in Hamilton system. The average vector field (AVF) method is used to discretize the Hamilton system, and local energy structure-preserving algorithm and local momentum structure-preserving algorithm are constructed to solve the DGH equation. The numerical examples show that the two kinds of structure-preserving algorithms have good long-time numerical stability.

**Key words**: Hamilton system; structure-preserving algorithms; multi-symplectic theory; DGH equation