第56卷第6期 大连理工大学学报 Vol. 56, No. 6
2016年11月 Journal of Dalian University of Technology Nov. 2016

文章编号：1000-8608(2016)06-0657-05

四叶树 Hosoya 指标显式公式及其序列

杨利民[*1]， 段丽燕[1]， 王天明[2]

（1. 大理大学 数学与计算机学院，云南 大理 671003；
2. 大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024）

摘要： 为研究四叶树 Hosoya 指标的规律，利用图论的分支分析法，解决了四叶树 Hosoya 指标的显式公式和序列. 对于一般的 t 叶树，仍然用同样分支分析法，得到相应的 t 叶树 Hosoya 指标的显式公式和序列. 发现了一族初值不一样的 Fibonacci 序列，在科学上对组合数学和图论提供了一定参考.

关键词： 四叶树；t 叶树；$S^{(n)}$-因子；Fibonacci 数；Hosoya 指标

中图分类号： O157.5 **文献标识码：** A **doi：** 10.7511/dllgxb201606015

0 引 言

四叶草又名幸运草，是三叶草或苜蓿草的稀有变种. 苜蓿草，是多年生草本植物，一般只有三片小叶子，叶形呈心形，叶心较深色的部分亦是心形. 最为有趣也最特别的是，在十万株苜蓿草中，可能只会发现一株是四叶草，因为概率是十万分之一，四叶草成为国际公认的幸运的象征.

由四叶草引出四叶树，四片叶子、顶点数为 n 的树叫做四叶树.

Fibonacci 数列，也称为“兔子数列”，其数列为 0，1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，…，满足递归关系式 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，初值 $F_0=0$，$F_1=1$[1-3].

本文研究四叶树 Hosoya 指标的显式公式和序列.

1 定义和引理

1.1 定 义

定义 1[4] 设 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}(n\geqslant 1)$，$K_i$ 是 i 个顶点的完全图. 假设 M 是 G 的子图并且 M 的每一个分支都同构于 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}(n\geqslant 1)$ 中的某一个元素，则称 M 为图 G 的一个 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-子图. 假设 M 是图 G 的生成子图，则称 M 为图 G 的一个 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子.

令 $A(G)$ 是图 G 的所有 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子个数. 图 G 是简单图，不包括多重边和环.

定义 2 图 G 的所有 k-匹配个数称作 Hosoya 指标. Hosoya 指标用 $Z(G)$ 表示.

1.2 基本引理

引理 1[5] 对于图 G 的给定一点 P，如果过给定点 P 的完全图是 $K_{i_1},K_{i_2},\cdots,K_{i_r}$，$i_j\in[1,n]$，$1\leqslant j\leqslant r$，$n$ 是 G 的顶点数，于是 G 的所有 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子个数为 $A(G)=\sum_{j=1}^{r}A(G-V(K_{i_j}))$，其中 $A(G-V(K_{i_j}))$ 是删除 $V(K_{i_j})$ 和与 $V(K_{i_j})$ 相关联的边.

引理 2 如果 G 和 H 的交为空图，即 $G\cap H=\varnothing$，则 $A(G\cup H)=A(G)\cdot A(H)$.

引理 3[5] 假设 P_n 是长为 n 的路，且有 $n+1$ 个顶点，则 P_n 的 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子个数是 $A(P_n)=F_{n+2}(n\geqslant 1)$，其中 F_{n+2} 是第 $n+2$ 个 Fibonacci 数.

引理 4[6] 假设图 G 的顶点数为 n 并且无

收稿日期： 2016-04-10； **修回日期：** 2016-09-25.
基金项目： 大理大学高层次人才科研启动基金资助项目(KY0719203410).
作者简介： 杨利民*(1965-)，男，博士，教授，E-mail：yanglm65@aliyun.com.

K_3 子图,则 Hosoya 指标 $Z(G)$ 等于图 G 的所有 $S^{(n)}=\{K_i:1\leqslant i\leqslant n\}$-因子个数:$Z(G)=A(G)$.

2 主要结果

2.1 四叶树 Hosoya 指标的显式公式

下面给出四叶树的 Hosoya 指标的显式公式并证明[7-8].

定理 1 如图 1 所示 n 个顶点的四叶树,它的 Hosoya 指标为

$$Z(G_1)=5F_{n-4}+F_{n-5};\ n\geqslant 5$$

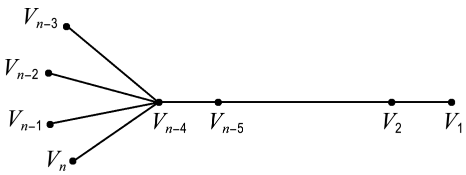

图 1 四叶树图 G_1

Fig. 1 Four leaf tree graph G_1

证明 利用图的分支分析法[9-10],对给定点 V_{n-4} 进行分析,过 V_{n-4} 顶点的一切完全图只有 K_1 和 5 个 K_2,无 $K_i(3\leqslant i\leqslant n)$,讨论分 3 种情况:

情况一 过 V_{n-4} 点完全图为 K_1,即为点 V_{n-4},V_{n-4} 作为一个完全分支,则 $S^{(n)}$-因子个数如下:

$A(G_1-V(K_1))=$
$A(V_{n-3}\cup V_{n-2}\cup V_{n-1}\cup V_n\cup P_{n-6})=$
$A(V_{n-3})A(V_{n-2})A(V_{n-1})A(V_n)A(P_{n-6})=$
$1\times1\times1\times1\times A(P_{n-6})=A(P_{n-6})$

根据引理 3 就有

$$A(G_1-V(K_1))=F_{n-4}$$

情况二 过 V_{n-4} 点完全图为 $v_{n-4}v_{n-3}$,$v_{n-4}v_{n-2}$,$v_{n-4}v_{n-1}$ 和 $v_{n-4}v_n$,这 4 个完全图 K_2 是对称的,K_2 作为两个点的完全分支,则 $S^{(n)}$-因子个数如下:

$4A(G_1-V(K_2))=$
$4A(V_{n-2}\cup V_{n-1}\cup V_n\cup P_{n-6})=$
$4A(V_{n-2})A(V_{n-1})A(V_n)A(P_{n-6})=$
$4\times1\times1\times1\times A(P_{n-6})=4F_{n-4}$

情况三 过 V_{n-4} 点完全图为 $v_{n-5}v_{n-4}$,K_2 作为两个点的一个完全分支,则 $S^{(n)}$-因子个数如下:

$A(G_1-V(K_2))=$
$A(V_{n-3}\cup V_{n-2}\cup V_{n-1}\cup V_n\cup P_{n-7})=$
$A(V_{n-3})A(V_{n-2})A(V_{n-1})A(V_n)A(P_{n-7})=$
$1\times1\times1\times1\times A(P_{n-7})=A(P_{n-7})=F_{n-5}$

据引理 1 得到

$$A(G_1)=\sum_{j=1}^{r}A(G_1-V(K_{i_j}))=$$
$$A(G_1-V(K_1))+4A(G_1-V(K_2))+A(G_1-V(K_2))=$$
$$F_{n-4}+4F_{n-4}+F_{n-5}=5F_{n-4}+F_{n-5}$$

据引理 4 得到

$$Z(G_1)=A(G_1)=5F_{n-4}+F_{n-5};\ n\geqslant 5$$

n 个顶点的四叶树用 T_n^4 表示.

例 1 计算 $n=5,6,7,8,9,10,11$ 和 12,四叶树 T_n^4 的 Hosoya 指标.

解 根据定理 1,$Z(T_5^4)=5F_1+F_0=5\times1+0=5$,$Z(T_6^4)=5F_2+F_1=5\times1+1=6$,$Z(T_7^4)=5F_3+F_2=5\times2+1=11$,$Z(T_8^4)=5F_4+F_3=5\times3+2=17$,$Z(T_9^4)=5F_5+F_4=5\times5+3=28$,$Z(T_{10}^4)=5F_6+F_5=5\times8+5=45$,$Z(T_{11}^4)=5F_7+F_6=5\times13+8=73$,$Z(T_{12}^4)=5F_8+F_7=5\times21+13=118$.

有趣的是,四叶树序列的初值 $f_0=5$,$f_1=6$,通项 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$,这好像是 Fibonacci 序列,只是初值不一样.下面将证明这个规律是对的.

证明 因为 $f_n=5F_{n-4}+F_{n-5}$,所以 $f_{n-1}=5F_{n-5}+F_{n-6}$,$f_{n-2}=5F_{n-6}+F_{n-7}$,又因为 $f_{n-1}+f_{n-2}=5(F_{n-5}+F_{n-6})+(F_{n-6}+F_{n-7})=5F_{n-4}+F_{n-5}$,则 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.

□

表 1 是顶点数为 n、叶片数为 4 的四叶树 T_n^4 Hosoya 指标的初值.

表 1 四叶树 T_n^4 Hosoya 指标的一些初值

Tab. 1 Some initial values of Hosoya index of four leaf tree T_n^4

n	$Z(T_n^4)$	n	$Z(T_n^4)$
5	5	9	28
6	6	10	45
7	11	11	73
8	17	12	118

得到顶点数为 n、叶片数为 4 的四叶树 T_n^4（$n\geqslant 5$）的 Hosoya 指标序列：

5，6，11，17，28，45，73，118，191，309，500，809，1 309，2 118，3 427，5 545，8 972，14 517，23 489，38 006，61 495，99 501，160 996，260 497，421 493，681 990，1 103 483，…

2.2　t 叶树 Hosoya 指标的显式公式

n 个顶点、t 片树叶的 t 叶树用 T_n^t 表示.

定理 2　如图 2 所示 n 个顶点、t 片树叶的 t 叶树，它的 Hosoya 指标为

$$Z(T_n^t)=(t+1)F_{n-t}+F_{n-t-1}；\ n\geqslant t+1，\ t\geqslant 2$$

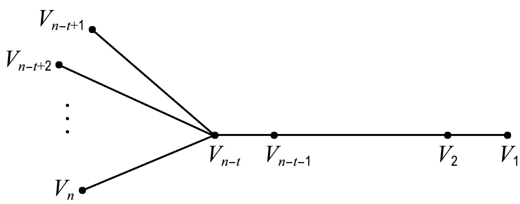

图 2　t 叶树 T_n^t

Fig. 2　t Leaf tree T_n^t

证明　利用图的分支分析法，对给定点 V_{n-t} 进行分析，过 V_{n-t} 顶点的一切完全图只有 K_1 和 $(t+1)$ 个 K_2，无 $K_i(3\leqslant i\leqslant n)$，讨论分 3 种情况：

情况一　过 V_{n-t} 点完全图为 K_1，即为点 V_{n-t}，V_{n-t} 作为一个完全分支，则 $S^{(n)}$-因子个数如下：

$$\begin{aligned}&A(T_n^t-V(K_1))=\\&A(V_{n-t+1}\cup V_{n-t+2}\cup\cdots\cup V_n\cup P_{n-t-2})=\\&A(V_{n-t+1})A(V_{n-t+2})\cdots A(V_n)A(P_{n-t-2})=\\&1\times 1\times\cdots\times 1\times A(P_{n-t-2})=A(P_{n-t-2})\end{aligned}$$

根据引理 3 有

$$A(T_n^t-V(K_1))=F_{n-t}$$

情况二　过 V_{n-t} 点完全图为 $v_{n-t}v_{n-t+1}$，$v_{n-t}v_{n-t+2}$，…，$v_{n-t}v_n$，这 t 个完全图 K_2 是对称的，K_2 作为两个点的完全分支，则 $S^{(n)}$-因子个数如下：

$$\begin{aligned}&tA(T_n^t-V(K_2))=\\&tA(V_{n-t+2}\cup\cdots\cup V_n\cup P_{n-t-2})=\\&tA(V_{n-t+2})\cdots A(V_n)A(P_{n-t-2})=\\&t\times 1\times\cdots\times 1\times A(P_{n-t-2})=tA(P_{n-t-2})=tF_{n-t}\end{aligned}$$

情况三　过 V_{n-t} 点完全图为 $v_{n-t}v_{n-t-1}$，K_2 作为两个点的一个完全分支，则 $S^{(n)}$-因子个数如下：

$$\begin{aligned}&A(T_n^t-V(K_2))=\\&A(V_{n-t+1}\cup V_{n-t+2}\cup\cdots\cup V_n\cup P_{n-t-3})=\\&A(V_{n-t+1})A(V_{n-t+2})\cdots A(V_n)A(P_{n-t-3})=\\&1\times 1\times\cdots\times 1\times A(P_{n-t-3})=\\&A(P_{n-t-3})=F_{n-t-1}\end{aligned}$$

据引理 1 得到

$$\begin{aligned}A(T_n^t)=\sum_{j=1}^{r}A(T_n^t-V(K_{i_j}))=&\\&A(T_n^t-V(K_1))+tA(T_n^t-V(K_2))+\\&A(T_n^t-V(K_2))=\\&F_{n-t}+tF_{n-t}+F_{n-t-1}=\\&(t+1)F_{n-t}+F_{n-t-1}\end{aligned}$$

据引理 4 得到

$$Z(T_n^t)=A(T_n^t)=(t+1)F_{n-t}+F_{n-t-1}；\\ n\geqslant t+1，t\geqslant 2$$

推论 1　如图 3 所示二叶树 T_n^2 的 Hosoya 指标为

$$Z(T_n^2)=3F_{n-2}+F_{n-3}；\ n\geqslant 3$$

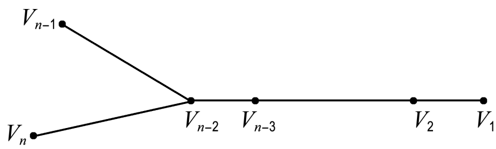

图 3　二叶树 T_n^2

Fig. 3　2 Leaf tree T_n^2

证明　在定理 2 中，令 $t=2$，则有二叶树 T_n^2 的 Hosoya 指标：

$$Z(T_n^2)=3F_{n-2}+F_{n-3}；\ n\geqslant 3$$

同样有趣的是，二叶树序列的初值 $f_0=3$，$f_1=4$，通项 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$，这好像是 Fibonacci 序列，只是初值不一样. 下面将证明这个规律是对的.

因为 $f_n=3F_{n-2}+F_{n-3}$，所以 $f_{n-1}=3F_{n-3}+F_{n-4}$，$f_{n-2}=3F_{n-4}+F_{n-5}$，又因为 $f_{n-1}+f_{n-2}=3(F_{n-3}+F_{n-4})+(F_{n-4}+F_{n-5})=3F_{n-2}+F_{n-3}$，则 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.

□

得到顶点数为 n、叶片树为 2 的二叶树 T_n^2（$n\geqslant 3$）的 Hosoya 指标序列：

3，4，7，11，18，29，47，76，123，199，322，521，843，1 364，2 207，3 571，5 778，9 349，…

推论2 如图4所示三叶树 T_n^3 的 Hosoya 指标为

$$Z(T_n^3)=4F_{n-3}+F_{n-4}；n\geqslant 4$$

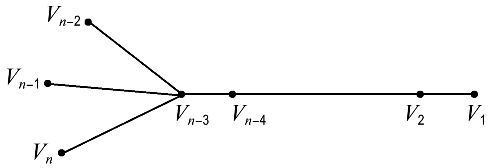

图4 三叶树 T_n^3

Fig. 4 3 Leaf tree T_n^3

证明 在定理2中，令 $t=3$，则有三叶树 T_n^3 的 Hosoya 指标：

$$Z(T_n^3)=4F_{n-3}+F_{n-4}；n\geqslant 4$$

三叶树序列的初值 $f_0=4$，$f_1=5$，通项 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$，这好像是 Fibonacci 序列，只是初值不一样. 下面将证明这个规律是对的.

因为 $f_n=4F_{n-3}+F_{n-4}$，所以 $f_{n-1}=4F_{n-4}+F_{n-5}$，$f_{n-2}=4F_{n-5}+F_{n-6}$，又因为 $f_{n-1}+f_{n-2}=4(F_{n-4}+F_{n-5})+(F_{n-5}+F_{n-6})=4F_{n-3}+F_{n-4}$，则 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.

□

得到顶点数为 n、叶片树为3的三叶树 $T_n^3(n\geqslant 4)$ 的 Hosoya 指标序列：

4，5，9，14，23，37，60，97，157，254，411，665，1 076，1 741，2 817，4 558，7 375，11 933，…

对于一般的 t 叶树，发现它的 Hosoya 指标序列呈现同样规律. 初值 $f_0=t+1$，$f_1=t+2$，通项 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.

证明 因为 $f_n=(t+1)F_{n-t}+F_{n-t-1}$，所以 $f_{n-1}=(t+1)F_{n-t-1}+F_{n-t-2}$，$f_{n-2}=(t+1)F_{n-t-2}+F_{n-t-3}$，又因为 $f_{n-1}+f_{n-2}=(t+1)(F_{n-t-1}+F_{n-t-2})+(F_{n-t-2}+F_{n-t-3})=(t+1)F_{n-t}+F_{n-t-1}$，则 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.

□

同样得到顶点数为 n、叶片树为 t 的 t 叶树 $T_n^t(n\geqslant t+1)$ 的 Hosoya 指标序列：

$t+1$，$t+2$，$2t+3$，$3t+5$，$5t+8$，$8t+13$，$13t+21$，$21t+34$，$34t+55$，…

推论3 如图5所示的五叶树的 Hosoya 指标为

$$Z(T_n^5)=6F_{n-5}+F_{n-6}；n\geqslant 6$$

证明 在定理2中，令 $t=5$，则有五叶树 T_n^5 的 Hosoya 指标：

$$Z(T_n^5)=6F_{n-5}+F_{n-6}；n\geqslant 6$$

令 $t=5$，五叶树的 Hosoya 指标与 t 叶树的呈同样规律，初值 $f_0=6$，$f_1=7$，通项 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$.

同样得到顶点数为 n、叶片树为5的五叶树 $T_n^5(n\geqslant 6)$ 的 Hosoya 指标序列：

6，7，13，20，33，53，86，139，225，364，589，953，1 542，2 495，…

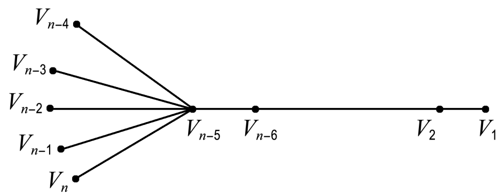

图5 五叶树 T_n^5

Fig. 5 5 Leaf tree T_n^5

3 结 语

本文解决了四叶树 Hosoya 指标的显式公式和序列，并将它推广到一般的 t 叶树上，有趣的是，发现了一族初值不一样的 Fibonacci 序列，在科学上对组合数学和图论提供了一定参考价值.

参考文献：

[1] 王天明. 近代组合学[M]. 大连：大连理工大学出版社，2008.

WANG Tian-ming. **Modern Combinatorics** [M]. Dalian：Dalian University of Technology Press，2008. (in Chinese)

[2] Comtet L. 高等组合学：有限和无限展开的艺术[M]. 谭明术，杨利民，等译. 大连：大连理工大学出版社，1991.

Comtet L. **Advanced Combinatorics：The Art of Finite and Infinite Unfolding** [M]. TAN Ming-shu，YANG Li-min，*et al.*，trans. Dalian：Dalian University of Technology Press，1991. (in Chinese)

[3] Harary F, Palmer E M. **Graphical Enumeration** [M]. New York: Academic Press Inc., 1973.

[4] 杨利民,王天明. 色多项式的显示公式[J]. 数学进展, 2006, **35**(1): 55-66.
YANG Li-min, WANG Tian-ming. The explicit formula of the chromatic polynomial [J]. **Advances in Mathematics**, 2006, **35**(1): 55-66. (in Chinese)

[5] 杨利民. $S^{(n)}=\{K_i: 1\leqslant i\leqslant n\}$-因子数的递归关系式[J]. 数学研究与评论, 1991, **11**(1): 78.
YANG Li-min. A recurrence relation for the number of factors of $S^{(n)}=\{K_i: 1\leqslant i\leqslant n\}$ [J]. **Journal of Mathematical Research and Exposition**, 1991, **11**(1): 78. (in Chinese)

[6] 杨利民,杨正亮. Fibonacci 数的图论应用[J]. 大理学院学报, 2011, **10**(4): 12-16.
YANG Li-min, YANG Zheng-liang. Graphic applications on Fibonacci numbers [J]. **Journal of Dali University**, 2011, **10**(4): 12-16. (in Chinese)

[7] 杨利民,王天明,年四洪. 完全 i 部图 $N[(X_1, X_2, \cdots, X_i), k]$ 计数公式[J]. 大连理工大学学报, 2007, **47**(6): 925-930.
YANG Li-min, WANG Tian-ming, NIAN Si-hong. Counting formulas of $N[(X_1, X_2, \cdots, X_i), k]$ of complete i-partite graphs [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2007, **47**(6): 925-930. (in Chinese)

[8] 杨利民. 理想子图计数及其应用[J]. 大连理工大学学报, 1989, **29**(5): 605-609.
YANG Li-min. Enumeration of ideal subgraphs and its applications [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 1989, **29**(5): 605-609. (in Chinese)

[9] YANG Li-min, WANG Tian-ming. The representing formula of $N(G,k)$ [J]. **International Journal of Analyzing Methods of Combinatorial Biology in Mathematics**, 2008, **1**(1): 1-26.

[10] 杨利民. $S^{(n)}$-因子计数理论及其应用[D]. 大连:大连理工大学, 2006.
YANG Li-min. Counting theory of $S^{(n)}$-factors and applications [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2006. (in Chinese)

Explicit formula of Hosoya index of four leaf tree with its sequence

YANG Li-min*[1], DUAN Li-yan[1], WANG Tian-ming[2]

(1. School of Mathematics and Computer, Dali University, Dali 671003, China;
2. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: To research into the laws of Hosoya index for four leaf tree, by means of analyzing method of components in graph theory, the explicit formula of Hosoya index of four leaf tree and its sequence are solved. For general t leaf tree, by adopting the same method, the explicit formula of Hosoya index of corresponding t leaf tree and its sequence are obtained. A family of Fibonacci sequences whose initial values are not the same are discovered, which provides some scientific references for combinatorics and graph theory.

Key words: four leaf tree; t leaf tree; $S^{(n)}$-factor; Fibonacci number; Hosoya index