

强超弱紧生成 Banach 空间不动点性质

张吉超^{*1}, 张文²

(1. 湖北工业大学 理学院, 湖北 武汉 430068;

2. 厦门大学 数学科学学院, 福建 厦门 361005)

摘要: 主要研究 Banach 空间的不动点性质, 并给出一种全新的证明方法. 首先利用超幂方法证明范数一致 G 光滑在凸集本身以及它的超幂上是相等的, 然后利用反证法证明凸集在范数一致 G 光滑下对非扩张映射具有不动点性质, 最后证明了每个强超弱紧生成的 Banach 空间在再赋范意义下满足每个弱紧凸集具有超不动点性质.

关键词: 超弱紧集; 不动点性质; Banach 空间

中图分类号: O177.2

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb201701014

0 引言

文献[1]主要运用超幂方法先证明凸集具有超正规结构, 然后结合凸集的超弱紧性得出该文中一个主要结果, 即根据 Kirk 等^[2]结论(一个具有正规结构的 Banach 空间中每个弱紧凸集对非扩张映射具有不动点性质)证明了每个强超弱紧生成空间在再赋范意义下满足每个弱紧凸集具有超不动点性质, 此结论实质是 Kirk 等^[2]结论的一个应用. 本文将从超幂空间出发, 运用超幂方法以及 Maury^[2]或者 Goebel^[3]关于弱紧凸集不具有不动点性质的构造方法, 结合集合之间有限表示的结论, 先去研究 Banach 空间中有界闭凸集的超不动点性质以及范数在凸集上一致 G 光滑的超性质, 然后利用反证法直接去证明主要结论, 避免去证明凸集的超正规结构, 以期加强和推广超幂方法以及不动点理论中经典方法的应用, 另一方面丰富凸集超不动点理论的内容.

在本文, 设 X 是一个实 Banach 空间, $C \subset X$ 是一个非空子集, 记 C 的闭包与 C 的凸包分别为 $\bar{C}$ 与 coC , B_X 为 X 的闭单位球, A 的仿射包为 $aff(A) = \left\{ \sum a_i x_i = 1, \sum a_i = 1, x_i \in A \right\}$.

1 预备知识

Banach 空间的超性质是 Banach 空间理论重要组成部分之一, 常见的超性质空间有超自反空间、超不动点性质空间、超正规结构空间等, 具有超性质的空间均以空间之间有限表示概念为桥梁, 目的是通过有限维空间性质来研究整个空间性质, 因此空间之间有限表示概念在研究空间的超性质中起着重要作用. 在 1972 年, James^[4]首先提出空间之间有限表示的概念和超自反空间的概念.

定义 1 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, 称 Y 在 X 中有限表示, 如果对每个 $\epsilon > 0$ 和每个有限维子空间 $F \subset Y$, 存在一个有限维子空间 $E \subset X$ 和一个线性映射 $T: F \rightarrow E$ 满足 $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq 1 + \epsilon$, 即 Banach-Mazur 距离 $d(E, F) < 1 + \epsilon$.

定义 2 称 Banach 空间 X 为超自反空间, 如果对每个 Banach 空间 Y 在 X 中有限表示满足 Y 是自反空间.

文献[5]首先把定义 1 中的线性子空间和线性映射分别用单形和仿射映射来代替, 然后提出如下集合之间有限表示概念, 利用集合之间有限表示的概念, 最后给出了超弱紧集的概念以及它

的性质.

定义 3 设 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 是 X 中 $n+1$ 个向量, 称凸包 $co(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 为 n -单形, 如果向量 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 是仿射无关的, 即向量 $\{x_i - x_0\}_{i=1}^n$ 是线性无关的.

定义 4 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, $C \subset X, D \subset Y$ 是两个非空子集, 称 D 在 C 中有限表示, 如果对每个 $\epsilon > 0$ 和每个顶点在 D 中的 n -单形 S_D , 存在顶点在 C 中的 n -单形 S_C 和一个仿射映射 $T: S_D \rightarrow S_C$ 满足

$$(1-\epsilon)\|x-y\| \leq \|Tx - Ty\| \leq (1+\epsilon)\|x-y\|; \\ x, y \in S_D$$

定义 5 设 C 是 Banach 空间 X 中的一个非空有界闭凸子集, 称 $C \subset X$ 为相对超弱紧集, 如果任意 Banach 空间 Y 中的每个非空有界凸子集 D 在 C 中有限表示满足 D 是相对弱紧集.

性质 1 (1) Banach 空间 X 中的一个有界凸子集是相对超弱紧集当且仅当它的弱闭包是超弱紧集;

(2) Banach 空间 X 是超自反空间当且仅当 B_X 是超弱紧集;

(3) Banach 空间 X 中每个紧凸子集是超弱紧集;

(4) 超自反空间中每个非空有界凸子集是相对超弱紧集;

(5) 超弱紧集是弱紧集.

显然集合之间有限表示概念可以看作是空间之间有限表示概念的推广或局部化, 而超弱紧集正好是超自反空间概念的局部化概念或推广概念. 文献[5-6]继续深入研究超弱紧集的性质与特征, 证明了 Banach 空间 X 中的一个有界闭凸集 A 是超弱紧集与集 A 具有有限指标性质(此概念可见文献[7])、集 A 具有有限对偶指标性质(此概念可见文献[8])、集 A 具有 Δ -凸函数近似性质(此概念可见文献[9])等更多其他数学家给出的概念是等价的; 关于更多超自反空间局部化概念或者推广概念可见文献[10-13].

类似于超弱紧集的概念和强超弱紧生成空间^[14]的概念, 文献[1]给出了如下凸集具有超不动点性质的概念和强超弱紧生成空间的概念. 在此之前, 先介绍凸集具有不动点性质的概念^[2].

定义 6 设 C 是 Banach 空间 X 中的一个非空有界闭凸集, 称 C 具有不动点性质, 如果对每

个非空闭凸子集 $D \subset C$ 和每个非扩张映射 $T: D \rightarrow D$ 满足 T 具有不动点, 即存在 $x \in D$ 满足 $Tx = x$.

定义 7 设 C 是 Banach 空间 X 中的一个非空有界闭凸集, 称 C 具有超不动点性质, 如果对每个 Banach 空间 Y 中的非空有界闭凸集 D 在 C 中有限表示满足 D 具有不动点性质.

定义 8 称 Banach 空间 X 是强超弱紧生成空间, 如果存在一个凸的超弱紧子集 $C \subset X$ 使得对每个弱紧子集 $K \subset X$ 和 $\epsilon > 0$, 存在正整数 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $K \subset nC + \epsilon B_X$, 有时也称超弱紧集 C 强生成 Banach 空间 X .

文献[1, 6]证明了如下强超弱紧生成空间与空间在再赋范之间的关系, 在此之前, 先回顾文献[8]中范数一致 G 光滑概念.

定义 9 设 M 是 Banach 空间 X 中的一个非空有界集, 称 X 中的一个范数是 M -一致 G 光滑, 如果对任意的 $f_n, g_n \in S_{X^*}$ 满足 $\lim_n |f_n + g_n|_M = 2$ 时, 有

$$\lim_n |f_n - g_n|_M = \lim_n \sup_{x \in M} |\langle f_n - g_n, x \rangle| = 0$$

或者等价于当 $t \rightarrow 0$ 时, 有

$$p_M(t) = \sup\{\|x + th\| + \|x - th\| - 2; \\ x \in B_X, h \in M\} = o(t)$$

定理 1 每个强超弱紧生成空间都存在一个等价的范数使得此范数限定在每个弱紧凸集上是 M -一致 G 光滑.

空间的超性质与它的超幂空间紧密联系在一起, 例如: 一个 Banach 空间 X 是超自反空间当且仅当它的超幂空间是自反空间, 下面回顾一下空间超幂的构造.

集 Ω 上子集族称为一个滤子 $\mathcal{U}$, 如果满足下列 3 个条件: (1) $\emptyset \notin \mathcal{U}$; (2) 如果 $A \subset B$ 并且 $A \in \mathcal{U}$, 则 $B \in \mathcal{U}$; (3) 如果 $A, B \in \mathcal{U}$, 则 $A \cap B \in \mathcal{U}$. 称一个滤子 $\mathcal{U}$ 为自由滤子, 如果滤子满足 $\bigcap \{F \in \mathcal{U}\} = \emptyset$. 称一个滤子 $\mathcal{U}$ 为超滤子, 如果对任意的集 $A \subset \Omega$ 满足 $A \in \mathcal{U}$ 或者 $\Omega \setminus A \in \mathcal{U}$. 设 K 是一个拓扑空间 $f: \Omega \rightarrow K$ 的一个函数, 称 f 关于超滤子 $\mathcal{U}$ 收敛到 $k \in K$, 如果对 k 的每个邻域 v , 有 $f^{-1}(v) \in \mathcal{U}$, 记 $\lim_{\mathcal{U}} f = k$.

设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的自由超滤子, Banach 空间 X 的超幂空间

$$\widetilde{X} = (X)_{\mathcal{U}} = l_{\infty}(X) / \mathcal{N}$$

其中

$$l_{\infty}(\mathbf{X}) = \{(\mathbf{x}_n) : \|\mathbf{x}_n\| = \sup_n \|\mathbf{x}_n\| < \infty, \mathbf{x}_n \in \mathbf{X}, n \in \mathbf{N}\}$$

和

$$\mathcal{N} = \{(\mathbf{x}_n) \in l_{\infty}(\mathbf{X}) : \lim_{\mathcal{U}} \|\mathbf{x}_n\| = 0\}$$

显然 $\tilde{\mathbf{X}}$ 的范数是

$$\|(\mathbf{x}_n)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|\mathbf{x}_n\|$$

其中 $(\mathbf{x}_n)_{\mathcal{U}}$ 是 $(\mathbf{x}_n)$ 的等价类.

设 $\mathbf{C}$ 是 Banach 空间 $\mathbf{X}$ 中的一个非空有界闭凸集, 记

$$\tilde{\mathbf{C}} = \{(\mathbf{x}_n)_{\mathcal{U}} \in \tilde{\mathbf{X}} : \mathbf{x}_n \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}\}$$

显然, $\mathbf{X}$ 通过 $\mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{x})_{\mathcal{U}}$ 等距嵌入到 $(\mathbf{X})_{\mathcal{U}}$ 的一个子空间和集合 $\mathbf{C}$ 通过 $\mathbf{x} \rightarrow (\mathbf{x})_{\mathcal{U}}$ 等距嵌入到 $(\mathbf{C})_{\mathcal{U}}$ 的一个子集.

关于集合的超幂与集合本身有如下结论.

命题 1 设 $\mathbf{C}$ 是 Banach 空间 $\mathbf{X}$ 中的一个非空有界闭凸集, $\mathcal{U}$ 是 $\mathbf{N}$ 上的自由超滤子, 则 $(\mathbf{C})_{\mathcal{U}}$ 在 $\mathbf{C}$ 中有限表示.

命题 2 设 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 分别是 Banach 空间 $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ 中的非空有界闭凸集, 如果 $\mathbf{D}$ 在 $\mathbf{C}$ 中有限表示, 则存在 $\mathbf{N}$ 上的一个自由超滤子 $\mathcal{U}$ 和一个仿射等距 $T: aff(\mathbf{D}) \rightarrow aff(\mathbf{C})$ 满足 $T(\mathbf{D}) \subset (\mathbf{C})_{\mathcal{U}}$.

2 主要结果

命题 3 设 $\mathbf{C}$ 是 Banach 空间 $\mathbf{X}$ 中的一个非空有界闭凸集, 则下列条件等价:

- (1) $\mathbf{C}$ 具有超不动点性质;
- (2) 对 $\mathbf{N}$ 上某个自由超滤子 $\mathcal{U}$, $(\mathbf{C})_{\mathcal{U}}$ 具有超不动点性质;
- (3) 对 $\mathbf{N}$ 上每个自由超滤子 $\mathcal{U}$, $(\mathbf{C})_{\mathcal{U}}$ 具有超不动点性质;
- (4) 对 $\mathbf{N}$ 上每个自由超滤子 $\mathcal{U}$, $(\mathbf{C})_{\mathcal{U}}$ 具有不动点性质.

证明 (1) $\Rightarrow$ (3): 对任意 Banach 空间中的非空有界闭凸集 $\mathbf{E}$ 在 $(\mathbf{C})_{\mathcal{U}}$ 中有限表示, 由命题 1 知 $(\mathbf{C})_{\mathcal{U}}$ 在 $\mathbf{C}$ 中有限表示以及有限表示的传递性, 从而可得 $\mathbf{E}$ 在 $\mathbf{C}$ 中有限表示. 根据 $\mathbf{C}$ 具有超不动点性质知 $\mathbf{E}$ 具有不动点性质, 从而可得 (3) 是成立的.

(3) $\Rightarrow$ (4) 和 (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) 是显然的.

(4) $\Rightarrow$ (1): 假设 $\mathbf{C}$ 不具有超不动点性质, 则存在一个非空的有界凸集 $\mathbf{D}$ 在 $\mathbf{C}$ 中有限表示且满足 $\mathbf{D}$ 不具有不动点性质. 根据命题 2 知存在 $\mathbf{N}$

上的一个自由超滤子 $\mathcal{U}$ 和一个仿射等距 $T: aff(\mathbf{D}) \rightarrow aff(\mathbf{C})$ 满足 $T(\mathbf{D}) \subset (\mathbf{C})_{\mathcal{U}}$, 这与 $(\mathbf{C})_{\mathcal{U}}$ 具有不动点性质相矛盾, 故结论成立.

下列构造(关于弱紧凸集对非扩张映射的不动点性质)是证明过程中关键步骤之一, 设 $\mathbf{C}$ 是 Banach 空间 $\mathbf{X}$ 中的一个非空弱紧凸集和存在一个非扩张映射 $T: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ 不具有不动点, 则通过 Zorn 引理知, 存在一个最小的弱紧凸子集 $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}$ 满足 $\mathbf{K}$ 不是单个元素且 $\mathbf{K}$ 对 T 是不变的. 根据 Banach 压缩映射定理知 $\mathbf{K}$ 中包含 T 的一个近似不动点序列 $(\mathbf{x}_n)$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_n\| = 0$$

根据上述构造, 文献[3]证明了如果 $(\mathbf{x}_n)$ 是 T 的一个近似不动点序列, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = \text{diam} \mathbf{K} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$.

定理 2 设 $\mathbf{M}$ 是 $(\mathbf{X}, \|\cdot\|)$ 中的一个非空有界闭凸集且范数 $\|\cdot\|$ 满足 $\mathbf{M}$ -一致 G 光滑, 设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathbf{N}$ 上的一个自由超滤子, 则对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 有

$$\rho_{\mathbf{M}}(t) = \rho_{(\mathbf{M})_{\mathcal{U}}}(t)$$

证明 因为 $\mathbf{M} \subset (\mathbf{M})_{\mathcal{U}}$, 所以对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 显然 $\rho_{\mathbf{M}}(t) \leq \rho_{(\mathbf{M})_{\mathcal{U}}}(t)$ 成立.

对任意的 $(\mathbf{x}_i)_{\mathcal{U}} \in S_{(\mathbf{X})_{\mathcal{U}}}$, $(\mathbf{y}_i)_{\mathcal{U}} \in (\mathbf{M})_{\mathcal{U}}$, 其中 $t \in \mathbf{R}$, 令

$$\begin{aligned} a &= \|(\mathbf{x}_i)_{\mathcal{U}} + t(\mathbf{y}_i)_{\mathcal{U}}\| + \\ &\|(\mathbf{x}_i)_{\mathcal{U}} - t(\mathbf{y}_i)_{\mathcal{U}}\| = \\ &\lim_{\mathcal{U}} (\|\mathbf{x}_i + t\mathbf{y}_i\| + \|\mathbf{x}_i - t\mathbf{y}_i\|) = \lim_{\mathcal{U}} a_i \end{aligned}$$

则对任意的 $\eta > 0$, 集合 $\{i \in \mathbf{N} : |a_i - a| < \eta\} \in \mathcal{U}$ 和集合 $\{i \in \mathbf{N} : \|\mathbf{x}_i\| - 1 < \eta\} \in \mathcal{U}$, 因此它们的交是非空的并且

$$J = \{i \in \mathbf{N} : |a_i - a| < \eta\} \cap \{i \in \mathbf{N} : \|\mathbf{x}_i\| - 1 < \eta\} \in \mathcal{U}$$

取 $i \in J$, 有

$$\begin{aligned} &\|(\mathbf{x}_i)_{\mathcal{U}} + t(\mathbf{y}_i)_{\mathcal{U}}\| + \|(\mathbf{x}_i)_{\mathcal{U}} - t(\mathbf{y}_i)_{\mathcal{U}}\| - 2 = \\ &a - 2 \leq a_i + \eta - 2 = \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}_i + t\mathbf{y}_i\| + \|\mathbf{x}_i - t\mathbf{y}_i\| + \eta - 2 =$$

$$\|\mathbf{x}_i\| \left(\left\| \frac{\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_i\|} + \frac{t}{\|\mathbf{x}_i\|} \mathbf{y}_i \right\| + \right.$$

$$\left. \left\| \frac{\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_i\|} - \frac{t}{\|\mathbf{x}_i\|} \mathbf{y}_i \right\| \right) + \eta - 2 \leq$$

$$\|\mathbf{x}_i\| \left(2 + \rho_{\mathbf{M}} \left(\frac{t}{\|\mathbf{x}_i\|} \right) \right) + \eta - 2 \leq$$

$$(1 + \eta) \left(2 + \rho_{\mathbf{M}} \left(\frac{t}{1 - \eta} \right) \right) + \eta - 2$$

设 $\eta \rightarrow 0$, 则对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 有 $\rho_{(M)_\eta}(t) \leq \rho_M(t)$.

综合上述可得 $\rho_M(t) = \rho_{(M)_\eta}(t)$.

定理 3 设 M 是 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中的一个非空弱紧凸集且范数 $\|\cdot\|$ 满足 M -一致 G 光滑, 则 M 对非扩张映射具有不动点性质.

证明 假设 M 对非扩张映射不具有不动点性质, 则存在一个最小的弱紧凸子集 $K \subset M$ 满足 K 不是单个元素且 K 对 T 是不变的. 设 (x_n) 是 T 的一个近似不动点序列, 不妨假设 $\text{diam} K = c$ 和序列 (x_n) 弱收敛到 $0 \in K$, 通过式 (1) 知, 对任意的 $x \in K$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \text{diam} K = c$$

特别地

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \text{diam} K = c$$

设 $t \in (0, 1)$, 序列 (x_m) 是序列 (x_n) 的一个子序列, 则

$$\begin{aligned} & \|x_n - x_m - tx_m\| + \|x_n - x_m + tx_m\| = \\ & \|x_n - x_m\| \left(\left\| \frac{x_n - x_m}{\|x_n - x_m\|} - \frac{t}{\|x_n - x_m\|} x_m \right\| + \right. \\ & \left. \left\| \frac{x_n - x_m}{\|x_n - x_m\|} + \frac{t}{\|x_n - x_m\|} x_m \right\| \right) \leq \\ & \|x_n - x_m\| \left(2 + \rho_K \left(\frac{t}{\|x_n - x_m\|} \right) \right) \leq \\ & \|x_n - x_m\| \left(2 + \rho_M \left(\frac{t}{\|x_n - x_m\|} \right) \right) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \|x_n - x_m - tx_m\| \leq \|x_n - x_m\| \left(2 + \right. \\ & \left. \rho_M \left(\frac{t}{\|x_n - x_m\|} \right) \right) - \\ & \|x_n - x_m + tx_m\| = \\ & \|x_n - x_m\| \left(2 + \right. \\ & \left. \rho_M \left(\frac{t}{\|x_n - x_m\|} \right) \right) - \\ & \|x_n - ((1-t)x_m + t \times 0)\| \end{aligned}$$

因为 K 是 M 的一个非空凸子集, 所以对 x_m , $0 \in K$, 有 $(1-t)x_m + t \times 0 \in K$. 结合范数的下半连续性知

$$\begin{aligned} (1+t) \|x_m\| & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m - tx_m\| \leq \\ & \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m - tx_m\| \leq \\ & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\|x_n - x_m\| \times \right. \\ & \left. \left(2 + \rho_M \left(\frac{t}{\|x_n - x_m\|} \right) \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \|x_n - ((1-t)x_m + t \times 0)\| \right] =$$

$$c \left(2 + \rho_M \left(\frac{t}{c} \right) \right) - c =$$

$$c \left(1 + \rho_M \left(\frac{t}{c} \right) \right)$$

即

$$(1+t) \|x_m\| \leq c \left(1 + \rho_M \left(\frac{t}{c} \right) \right)$$

设 $m \rightarrow \infty$, 则

$$(1+t)c \leq c \left(1 + \rho_M \left(\frac{t}{c} \right) \right)$$

即

$$\rho_M \left(\frac{t}{c} \right) \geq t$$

因此

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_M \left(\frac{t}{c} \right)}{\frac{t}{c}} \geq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{c} = c$$

这与范数 $\|\cdot\|$ 是 M -一致 G 光滑相矛盾, 故结论成立.

定理 4 设 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个强超弱紧生成空间, 则 X 在再赋范意义下满足每个弱紧凸集具有超不动点性质.

证明 设 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是一个强超弱紧生成空间, 则由定理 1 知强超弱紧生成空间都存在一个等价的范数使得此范数限定在每个弱紧凸集 M 上是 M -一致 G 光滑. 根据定理 3 知 M 具有不动点性质. 综合利用定理 2 和定理 3 可得对 N 上每个自由超滤子 $\mathcal{U}$, $(M)_{\mathcal{U}}$ 具有不动点性质. 最后由命题 3 知每个弱紧凸集 M 具有超不动点性质, 即结论成立.

推论 1 超自反空间在再赋范后具有超不动点性质.

证明 由性质 1 以及超自反空间是由它的闭单位球强生成空间知: 结论是成立的.

3 结 语

本文从反证法入手, 结合超幂空间的性质, 证明了某类空间在再赋范意义下具有不动点性质. 此结论一方面是经典结论的推广, 丰富了不动点理论的内容; 另一方面在其他数学分支 (如方程解的存在性等) 有着广泛的运用.

参考文献:

- [1] CHENG Lixin, CHENG Qingjin, ZHANG Jichao. On super fixed point property and super weak compactness of convex subsets in Banach spaces [J]. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 2015, **428**(2):1209-1224.
- [2] KIRK W A, SIMS B. **Handbook of Metric Fixed Point Theory** [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [3] GOEBEL K. On the structure of minimal invariant sets for nonexpansive mappings [J]. **Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska**, 1975, **29**: 73-77.
- [4] JAMES R C. Some self-dual properties of normed linear spaces [C] // **Symposium on Infinite-Dimensional Topology**. Princeton: Princeton University Press, 1972:159-175.
- [5] CHENG Lixin, CHENG Qingjin, WANG Bo, *et al.* On super-weakly compact sets and uniformly convexifiable sets [J]. **Studia Mathematica**, 2010, **199**(2):145-169.
- [6] RAJA M. Super WCG Banach spaces [J]. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 2016, **439**(1):183-196.
- [7] RAJA M. Finitely dentable functions, operators and sets [J]. **Journal of Convex Analysis**, 2008, **15**(2):219-233.
- [8] FABIAN M, MONTESINOS V, ZIZLER V. Sigma-finite dual dentability indices [J]. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 2009, **350**(2):498-507.
- [9] CEPPEDELLO BOISO M. Approximation of Lipschitz functions by Δ -convex functions in Banach spaces [J]. **Israel Journal of Mathematics**, 1998, **106**:269-284.
- [10] BEAUZAMY B. Opérateurs uniformément convexifiants [J]. **Studia Mathematica**, 1976, **57**: 103-139.
- [11] BELLENOT S F. Local reflexivity of normed spaces, operators, and Fréchet spaces [J]. **Journal of Functional Analysis**, 1984, **59**(1):1-11.
- [12] HEINRICH S. Finite representability and super-ideals of operators [M] // **Dissertationes Mathematicae**. Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1980.
- [13] PIETSCH A. What is “local theory of Banach spaces”? [J]. **Studia Mathematica**, 1999, **135**(3): 273-298.
- [14] SCHLÜCHTERMANN G, WHEELER R F. On strongly WCG Banach spaces [J]. **Mathematische Zeitschrift**, 1988, **199**:387-398.

Fixed-point property of strongly super weakly compact generated Banach spaces

ZHANG Jichao^{*1}, ZHANG Wen²

(1. School of Science, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, China;

2. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: The fixed-point property of Banach space is studied and a new proof method is given. Firstly, the ultraproduct method is used to prove that the uniformly G -differentiable norms are equivalent under convex sets and its ultraproduct. Then, by means of counter-proof, it is proven that convex sets have the fixed-point property for nonexpansive mappings under the uniformly G -differentiable norm sense. Finally, it is shown that every strongly super weakly compact generated Banach space can be renormed so that every weakly compact convex set has super fixed-point property.

Key words: super weakly compact set; fixed-point property; Banach space