

与正整数 n -color 有序分拆相关的一些恒等式

郭育红*

(河西学院 数学与统计学院, 甘肃 张掖 734000)

摘要: 首先给出了正整数自反的 n -color 有序分拆数与 Fibonacci 数、Lucas 数之间的几个关系式. 然后利用其中的一个关系式给出了正整数 ν 的右端分部量不等于 1_1 的 n -color 有序分拆数与正整数的分部量是 1, 2 的有序分拆数、分部量是奇数的有序分拆数、分部量大于 1 的有序分拆数之间的一些恒等式, 并给出了组合证明.

关键词: n -color 有序分拆; Fibonacci 数; Lucas 数; 恒等式; 组合证明

中图分类号: O157

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb201702016

0 引言

在整数分拆理论中, MacMahon^[1] 第一次定义了正整数的有序分拆, 即在正整数的分拆中考虑了分部量的次序. 例如, 3 的无序分拆有 $3, 2+1, 1+1+1$ 共 3 个; 而 3 的有序分拆有 $3, 2+1, 1+2, 1+1+1$ 共 4 个. Agarwal 等在文献[2]中推广了正整数无序分拆的概念, 给出了正整数的 n -color 无序分拆. 即在正整数 ν 的无序分拆中对于每一个分部量 n 着 n 种不同的颜色. 他们将这 n 种颜色用下标表示为 $n_1, n_2, \dots, n_n$. 例如, 3 的 n -color 无序分拆有 $3_1, 3_2, 3_3, 2_1+1_1, 2_2+1_1, 1_1+1_1+1_1$ 共 6 个. 在 2000 年, Agarwal^[3] 又定义了 n -color 有序分拆. 例如, 3 有 8 个 n -color 有序分拆: $3_1, 3_2, 3_3, 2_1+1_1, 2_2+1_1, 1_1+2_1, 1_1+2_2, 1_1+1_1+1_1$. 并在文献[3]中给出: ν 的 n -color 有序分拆数等于第 2ν 个 Fibonacci 数, 即 $C(\nu) = F_{2\nu}$. 近年来, 对于正整数的 n -color 有序分拆产生了许多研究成果^[3-7].

2006 年, Narang 等在文献[8]中又定义了自反的 n -color 有序分拆, 并给出了自反的 n -color 有序分拆的相关性质. 他们在文献[8]中还给出了奇数 $2\nu+1$ 的自反的有序分拆数等于第 $2\nu+1$ 个 Lucas 数 $L_{2\nu+1}$, 即 $A_{2\nu+1} = L_{2\nu+1}$. 在文献[8]中同样给出了偶数 2ν 的自反的 n -color 有序分拆数等

于 3 倍的 ν 的 n -color 有序分拆数, 即 $A_{2\nu} = 3C(\nu)$.

而本文作者又将 n -color 有序分拆的分部量做了约束, 研究了自反的 n -color 偶有序分拆^[9]、自反的 n -color 奇有序分拆^[10]. 同时还研究了自反的 n -color 有序分拆与 n -color 有序分拆之间的关系, 在文献[11-12]中给出了关于奇数 $2\nu+1$ 的自反的 n -color 有序分拆数、偶数 2ν 的自反的 n -color 有序分拆数与 ν 的 n -color 有序分拆数之间的关系式.

2013 年, Shapcott 在文献[13]中给出了正整数的 n -color 有序分拆的一种符号表示, 他利用一串符号“ $\times$ ”和“ $-$ ”表示正整数的 n -color 有序分拆, 即对于分部量 $\lambda_i, 1 \leq i \leq \lambda$, 用一串含有 $\lambda-1$ 个“-”和一个“ $\times$ ”来表示, 其中“ $\times$ ”所在的第 i 个位置表示分部量着第 i 种颜色; 而两个分部量之间用一个“ $\times$ ”分割. 例如, n -color 有序分拆 2_1+1_1 可表示成“- $\times \times \times$ ”. 利用这种“ $\times$ ”和“-”表示, Shapcott 建立了正整数的 n -color 有序分拆数与分部量是 1 或 2 的称为 1-2 有序分拆的分拆数、分部量是奇数的称为奇有序分拆的分拆数、分部量大于 1 的有序分拆数之间的一些恒等式. Shapcott 在文献[14]中将正整数 ν 的 n -color 有序分拆做了推广, 给出了分部量和着色集都是任意非负整数集上的 C -color 有序分拆, 并且给出

了关于自反的 n -color 有序分拆数与 Fibonacci 数 F_n 之间的一个结果.

最近,文献[12]又给出了关于正整数的自反的 n -color 有序分拆数与偶数个 Fibonacci 数 F_{2n} 、奇数个 Lucas 数 L_{2n+1} 之间的关系式,并讨论了与自反的 n -color 有序分拆相关的一些恒等式.

本文将进一步研究正整数 ν 的自反的 n -color 有序分拆数与奇数个 Fibonacci 数 F_{2n+1} 、偶数个 Lucas 数 L_{2n} 之间的关系式,并进而讨论正整数 ν 的右端分部量不等于 1_1 的 n -color 有序分拆数与正整数的 1-2 有序分拆数、奇有序分拆数、分部量大于 1 的有序分拆数之间的一些恒等式.

1 定义和引理

1.1 定义

定义 1^[8] 如果正整数的一个 n -color 有序分拆的分部量从左向右读和从右向左读相等,则这个分拆叫自反的 n -color 有序分拆.

例如,3 有 4 个自反的 n -color 有序分拆,它们是 $3_1, 3_2, 3_3, 1_1 + 1_1 + 1_1$.

定义 2^[8] Fibonacci 数列是指 $F_0 = 0, F_1 = 1$,且满足 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$.

定义 3^[8] Lucas 数列是指 $L_0 = 2, L_1 = 1$,且满足 $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2$.

1.2 引理

引理 1^[13] 正整数 ν 的 n -color 有序分拆数等于 $2\nu-1$ 的 1-2 有序分拆数.

引理 2^[13] 正整数 ν 的 n -color 有序分拆数等于 2ν 的奇有序分拆数.

引理 3^[13] 正整数 ν 的 n -color 有序分拆数等于 $2\nu+1$ 的分部量大于 1 的有序分拆数.

引理 4^[14] 设 A_ν 表示正整数 ν 的自反的 n -color 有序分拆数, F_n 表示第 n 个 Fibonacci 数. 则

$$A_{2\nu+1} = F_{2\nu+1} + 2F_{2\nu} \tag{1}$$

$$A_{2\nu} = 3F_{2\nu} \tag{2}$$

这里 $\nu > 0$.

引理 5^[12] 设 A_ν 表示正整数 ν 的自反的 n -color 有序分拆数, 则

$$A_{2\nu+2} = 3A_{2\nu+1} - A_{2\nu} \tag{3}$$

这里 $\nu > 0$.

2 主要结果

首先给出正整数 ν 的自反的 n -color 有序分

拆数与 Fibonacci 数、Lucas 数之间的几个关系式.

定理 1 设 A_ν 表示正整数 ν 自反的 n -color 有序分拆数, F_n 表示第 n 个 Fibonacci 数, L_n 表示第 n 个 Lucas 数. 则

$$A_{2\nu+1} - A_{2\nu} = F_{2\nu-1} \tag{4}$$

$$A_{2\nu} - A_{2\nu-1} = F_{2\nu+1} \tag{5}$$

$$A_{2\nu+1} - A_{2\nu-1} = L_{2\nu} \tag{6}$$

$$A_{2\nu+2} - A_{2\nu} = 3F_{2\nu+1} \tag{7}$$

这里 $\nu > 0$.

证明 式(4)的证明:由引理 4 及 Fibonacci 数的性质有

$$\begin{aligned} A_{2\nu+1} - A_{2\nu} &= F_{2\nu+1} + 2F_{2\nu} - 3F_{2\nu} = \\ &= F_{2\nu+1} - F_{2\nu} = F_{2\nu-1} \end{aligned}$$

式(5)的证明:由引理 5 及奇数 $2\nu+1$ 的自反的 n -color 有序分拆数与 Lucas 数及 Fibonacci 数的关系有

$$\begin{aligned} A_{2\nu} - A_{2\nu-1} &= 3A_{2\nu-1} - A_{2\nu-2} - A_{2\nu-1} = \\ &= 2A_{2\nu-1} - A_{2\nu-2} = \\ &= 2L_{2\nu-1} - 3F_{2\nu-2} = \\ &= 2(L_{2\nu-1} - F_{2\nu-2}) - F_{2\nu-2} = \\ &= 2F_{2\nu} - F_{2\nu-2} = F_{2\nu+1} \end{aligned}$$

式(6)的证明:由奇数 $2\nu+1$ 的自反的 n -color 有序分拆数与 Lucas 数的关系有

$$A_{2\nu+1} - A_{2\nu-1} = L_{2\nu+1} - L_{2\nu-1} = L_{2\nu}$$

式(7)的证明:由偶数 2ν 的自反的 n -color 有序分拆数与 Fibonacci 数的关系有

$$A_{2\nu+2} - A_{2\nu} = 3F_{2\nu+2} - 3F_{2\nu} = 3F_{2\nu+1}$$

由定理 1 的式(7)及偶数 2ν 的自反的 n -color 有序分拆数与 ν 的 n -color 有序分拆数之间的关系,不难得到下面的一个结论,以推论的形式给出.

推论 1 设 $C(\nu)$ 表示正整数 ν 的 n -color 有序分拆数, F_n 表示第 n 个 Fibonacci 数, 则

$$C(\nu+1) - C(\nu) = F_{2\nu+1} \tag{8}$$

推论 1 中的 $C(\nu+1) - C(\nu)$ 恰好是正整数 $\nu+1$ 的右端分部量不等于 1_1 的 n -color 有序分拆数,再结合 Fibonacci 数与正整数的 1-2 有序分拆、奇有序分拆、分部量不等于 1 的有序分拆之间的关系(引理 1~3),得到下面的几个恒等式.

定理 2 正整数 ν 的右端分部量不等于 1_1 的 n -color 有序分拆数等于 $2\nu-2$ 的 1-2 有序分拆数.

证明 用类似于 Shapcott 在文献[13]中的方法证明. 对于正整数 ν 的右端分部量不等于 1_1 的任意一个 n -color 有序分拆 α , 先写出 α 的“ $\times$ ”和“ $-$ ”符号图 Γ . 由于分拆 α 的右端分部量不是 1_1 , 在“ $\times$ ”和“ $-$ ”符号图 Γ 中, 右端的符号要么是“ $-$ ”, 要么右端连续的两个符号是“ $- \times$ ”. 于是做如下变换: 若 Γ 中右端是“ $-$ ”, 将“ $-$ ”换成“ $\times$ ”; 若 Γ 中右端符号是“ $- \times$ ”, 直接将“ $\times$ ”删掉, 然后再在新的“ $-$ ”和“ $\times$ ”符号图中按照从左向右的顺序, 将“ $\times$ ”换成 1, 将“ $-$ ”换成 2. 于是就得到了 $2\nu-2$ 的 1-2 有序分拆. 这是因为在 ν 的含有 t 个分部量的 n -color 有序分拆写成的“ $-$ ”和“ $\times$ ”符号图中有 $2t-1$ 个“ $\times$ ”, $\nu-t$ 个“ $-$ ”. 做第一种变换后, “ $\times$ ”的个数增加了一个, 即有 $2t$ 个“ $\times$ ”; 而“ $-$ ”的个数减少了一个, 即有 $\nu-t-1$ 个“ $-$ ”. 于是, 得到的有序分拆的分部量之和是 $1 \times 2t + 2 \times (\nu-t-1) = 2\nu-2$; 做第二种变换后, “ $\times$ ”的个数减少了一个, 即有 $2t-2$ 个“ $\times$ ”, 而“ $-$ ”的个数没变, 还是 $\nu-t$ 个, 于是, 得到的有序分拆的分部量之和是 $1 \times (2t-2) + 2 \times (\nu-t) = 2\nu-2$.

例如, 4 的右端分部量不等于 1_1 的 n -color 有序分拆 $1_1 + 1_1 + 2_1$ 产生 6 的 1-2 有序分拆 $1+1+1+1+1+1$ 的过程如下: $1_1 + 1_1 + 2_1 \rightarrow \times \times \times \times \times \times \rightarrow 1+1+1+1+1+1$.

显然, 上述变换过程是可逆的, 故结论成立. □

以 $\nu=3$ 为例用表 1 给出定理 2 中的对应关系.

表 1 与 1-2 有序分拆的对应关系			
Tab. 1 The corresponding relations related to 1-2 compositions			
3 的右端分部量不是 1_1 的 n -color 有序分拆	n -color 有序分拆的“ $\times$ ”与“ $-$ ”表示	变换后的“ $\times$ ”与“ $-$ ”表示	4 的 1-2 有序分拆
3_1	$\times - -$	$\times - \times$	$1+2+1$
3_2	$- \times -$	$- \times \times$	$2+1+1$
3_3	$- - \times$	$- -$	$2+2$
$1_1 + 2_1$	$\times \times \times -$	$\times \times \times \times$	$1+1+1+1$
$1_1 + 2_2$	$\times \times - \times$	$\times \times -$	$1+1+2$

定理 3 正整数 ν 的右端分部量不等于 1_1 的 n -color 有序分拆数等于 $2\nu-1$ 的奇有序分拆数.

证明 用类似于 Shapcott 在文献[13]中的方法. 对于正整数 ν 的右端分部量不等于 1_1 的任意一个 n -color 有序分拆 α , 先写出 α 的“ $\times$ ”和“ $-$ ”符号图 Γ . 由于分拆 α 的右端分部量不是 1_1 , 在“ $\times$ ”和“ $-$ ”符号图 Γ 中, 右端的符号要么是“ $-$ ”, 要么右端连续的两个符号是“ $- \times$ ”. 于是做如下变换: 若 Γ 中右端是“ $-$ ”, 将“ $-$ ”换成“ $\times$ ”; 若 Γ 中右端符号是“ $- \times$ ”, 直接将“ $\times$ ”删掉.

接下来, 将“ $\times$ ”看成分部量的分割点, 把“ $\times$ ”两端的 j 个“ $-$ ”用 $2j+1$ 个“ $-$ ”代替, 并将 $2j+1$ 个“ $-$ ”写成有序分拆的分部量 $2j+1$. 这样就得到了正整数 $2\nu-1$ 的奇有序分拆. 这是因为在 ν 的含有 t 个分部量的 n -color 有序分拆写成的“ $-$ ”和“ $\times$ ”符号图中有 $2t-1$ 个“ $\times$ ”, $\nu-t$ 个“ $-$ ”. 如果设在“ $\times$ ”和“ $-$ ”符号图 Γ 中含有连续 j 个“ $-$ ”号的有 β_j 个, 而把“ $\times$ ”看成分部量的分割点时, 那么 $\sum_{j=1}^{\nu} \beta_j = (2t-1) + 1 = 2t$ 就是所有的

“ $\times$ ”个数加 1, 而所有“ $-$ ”的个数是 $\sum_{j=1}^{\nu} j\beta_j = \nu-t$ 个. 做第一种变换后, “ $\times$ ”的个数增加了一个, 即有 $2t$ 个“ $\times$ ”, 即 $\sum_{j=1}^{\nu} \beta_j = 2t+1$, 而“ $-$ ”的个数减少了一个, 即有 $\nu-t-1$ 个“ $-$ ”, 即 $\sum_{j=1}^{\nu} j\beta_j = \nu-t-1$.

于是, 得到的对应分拆的分部量之和是 $\sum_{j=1}^{\nu} (2j+1)\beta_j = 2 \sum_{j=1}^{\nu} j\beta_j + \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j = 2(\nu-t-1) + 2t+1 = 2\nu-1$; 做第二种变换后, “ $\times$ ”的个数减少了一个, 成了 $2t-2$ 个“ $\times$ ”, 而“ $-$ ”的个数没变, 还是 $\nu-t$ 个, 于是, 得到的相应分拆的分部量之和是 $\sum_{j=1}^{\nu} (2j+1)\beta_j = 2 \sum_{j=1}^{\nu} j\beta_j + \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j = 2(\nu-t) + 2t-1 = 2\nu-1$.

例如, 4 的右端分部量不等于 1_1 的 n -color 有序分拆 $1_1 + 1_1 + 2_1$ 产生 7 的奇有序分拆 $1+1+1+1+1+1+1$ 的过程如下: $1_1 + 1_1 + 2_1 \rightarrow \times \times \times \times \times \times \rightarrow - \times - \times - \times - \times - \times - \rightarrow 1+1+1+1+1+1+1$.

显然, 上述过程是可逆的, 故结论成立. □

以 $\nu=3$ 为例用表 2 给出定理 3 中的对应关系.

表 2 与奇有序分拆的对应关系

Tab. 2 The corresponding relations related to odd compositions

3 的右端分部量不是 1_1 的 n -color 有序分拆	n -color 有序分拆的“ $\times$ ”与“ $-$ ”表示	变换后的“ $\times$ ”与“ $-$ ”表示	以“ $-$ ”做分部量	5 的奇有序分拆
3_1	$\times - -$	$\times - \times$	$- \times - -$ $- \times -$	$1+3+1$
3_2	$- \times -$	$- \times \times$	$- - - \times$ $- \times -$	$3+1+1$
3_3	$- - \times$	$- -$	$- - -$ $- -$	5
1_1+2_1	$\times \times \times -$	$\times \times \times \times$	$- \times - \times -$ $\times - \times -$	$1+1+1+1+1$
1_1+2_2	$\times \times - \times$	$\times \times -$	$- \times - \times$ $- - -$	$1+1+3$

定理 4 正整数 ν 的右端分部量不等于 1_1 的 n -color 有序分拆数等于 2ν 的分部量大于 1 的有序分拆数.

证明 用类似于 Shapcott 在文献[13]中的方法. 对于正整数 ν 的右端分部量不等于 1_1 的任意一个 n -color 有序分拆 α , 先写出 α 的“ $\times$ ”和“ $-$ ”符号图 Γ . 由于分拆 α 的右端分部量不是 1_1 , 所以在“ $\times$ ”和“ $-$ ”符号图 Γ 中, 右端的符号要么是“ $-$ ”, 要么右端连续的两个符号是“ $- \times$ ”. 于是做如下变换: 若 Γ 中右端符号是“ $-$ ”, 将“ $-$ ”换成“ $\times$ ”; 若 Γ 中右端符号是“ $- \times$ ”, 直接将“ $\times$ ”删掉.

接下来, 将“ $-$ ”看成分部量的分割点, 将“ $-$ ”两端的 i 个“ $\times$ ”用 $i+2$ 个“ $\times$ ”代替, 并将 $i+2$ 个“ $\times$ ”写成有序分拆的分部量 $i+2$. 这样就得到了正整数 2ν 的分部量大于 1 的有序分拆. 这是因为在 ν 的含有 t 个分部量的 n -color 有序分拆写成的“ $-$ ”和“ $\times$ ”符号图 Γ 中有 $2t-1$ 个“ $\times$ ”, $\nu-t$ 个“ $-$ ”. 如果设在“ $\times$ ”和“ $-$ ”符号图 Γ 中含有连续 i 个“ $\times$ ”号的有 γ_i 个, 而把“ $-$ ”看成分部量的分割点, 那么 $\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i = \nu - t + 1$ 就是所有的“ $-$ ”个数

加 1, 而所有“ $\times$ ”的个数是 $\sum_{i=1}^{\nu} i\gamma_i = 2t-1$. 做了第一种变换后, “ $\times$ ”的个数增加了一个, 即有 $2t$ 个“ $\times$ ”, 即 $\sum_{i=1}^{\nu} i\gamma_i = 2t$. 而“ $-$ ”的个数减少了一个, 即

有 $\nu-t$ 个“ $-$ ”, 即 $\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i = \nu - t$. 于是, 得到的对应分拆的分部量之和是 $\sum_{i=1}^{\nu} (i+2)\gamma_i = \sum_{i=1}^{\nu} i\gamma_i + 2\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i = 2t + 2(\nu - t) = 2\nu$; 做了第二种变换后, “ $\times$ ”的个数减少了一个, 成了 $2t-2$ 个“ $\times$ ”, 而“ $-$ ”的个数没变, 还是 $\nu-t+1$ 个, 于是, 得到的相应分拆的分部量之和是 $\sum_{i=1}^{\nu} (i+2)\gamma_i = \sum_{i=1}^{\nu} i\gamma_i + 2\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i = 2t-2 + 2(\nu-t+1) = 2\nu$.
例如, 4 的右端分部量不等于 1_1 的 n -color 有序分拆 $1_1+1_1+2_1$ 产生 8 的分部量大于 1 有序分拆的过程如下: $1_1+1_1+2_1 \rightarrow \times \times \times \times \times - \rightarrow \times \times \times \times \times \times \rightarrow \times \times \times \times \times \times \times \times \rightarrow 8$. 上述过程显然是可逆的, 故结论成立.

以 $\nu=3$ 为例用表 3 给出定理 4 中的对应关系.

表 3 与分部量大于 1 的有序分拆的对应关系
Tab. 3 The corresponding relations related to compositions when parts are bigger than 1

3 的右端分部量不是 1_1 的 n -color 有序分拆	n -color 有序分拆的“ $\times$ ”与“ $-$ ”表示	变换后的“ $\times$ ”与“ $-$ ”表示	以“ $\times$ ”做分部量	6 的分部量大于 1 的有序分拆
3_1	$\times - -$	$\times - \times$	$\times \times \times -$ $\times \times \times$	$3+3$
3_2	$- \times -$	$- \times \times$	$\times \times - \times$ $\times \times \times$	$2+4$
3_3	$- - \times$	$- -$	$\times \times - \times$ $\times - \times \times$	$2+2+2$
1_1+2_1	$\times \times \times -$	$\times \times \times \times$	$\times \times \times$ $\times \times \times$	6
1_1+2_2	$\times \times - \times$	$\times \times -$	$\times \times \times$ $\times - \times \times$	$4+2$

3 结 语

本文研究了正整数 ν 的自反的 n -color 有序分拆数与奇数个 Fibonacci 数 F_{2n+1} 、偶数个 Lucas 数 L_{2n} 之间的关系, 给出了几个关系式. 利用其中的一个关系式给出了正整数 ν 的右端分部量不等于 1_1 的 n -color 有序分拆数与正整数的 1-2 有序

分拆数、奇有序分拆数、分部量大于 1 的有序分拆数之间的一些分拆恒等式,并给出了组合证明.理论上丰富了整数分拆恒等式.

参考文献:

- [1] MACMAHON P A. **Combinatory Analysis** [M]. New York: AMS Chelsea Publishing, 2001.
- [2] AGARWAL A K, ANDREWS G E. Rogers-Ramanujan identities for partitions with " N copies of N " [J]. **Journal of Combinatorial Theory, Series A**, 1987, **45**(1):40-49.
- [3] AGARWAL A K. n -Color compositions [J]. **Indian Journal of Pure and Applied Mathematics**, 2000(11):1421-1427.
- [4] AGARWAL A K. An analogue of Euler's identity and new combinatorial properties of n -color compositions [J]. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 2003, **160**(1-2):9-15.
- [5] NARANG G, AGARWAL A K. Lattice paths and n -color compositions [J]. **Discrete Mathematics**, 2008, **308**(9):1732-1740.
- [6] GUO Yuhong. n -Color even compositions [J]. **Ars Combinatoria**, 2013, **109**(2):425-432.
- [7] GUO Yuhong. Some n -color compositions [J]. **Journal of Integer Sequence**, 2012, **15**:Article 12.1.2.
- [8] NARANG G, AGARWAL A K. n -Color self-inverse compositions [J]. **Proceedings of Indian Academy of Sciences (Mathematical Sciences)**, 2006, **116**(3):257-266.
- [9] GUO Yuhong. n -Color even self-inverse compositions [J]. **Proceedings of Indian Academy of Sciences (Mathematical Sciences)**, 2010, **120**(1):27-33.
- [10] GUO Yuhong. n -Color odd self-inverse compositions [J]. **Journal of Integer Sequence**, 2014, **17**:Article 14.10.5.
- [11] 郭育红. 关于自反的 n -colour 有序分拆的一个关系式[J]. 武汉大学学报(理学版), 2012, **58**(5):430-432.
GUO Yuhong. A relationship of n -colour self-inverse compositions [J]. **Journal of Wuhan University (Natural Science Edition)**, 2012, **58**(5):430-432. (in Chinese)
- [12] 郭育红,王汝军. 与自反的 n -color 有序分拆相关的一些恒等式[J]. 数学学报:中文版, 2016, **59**(4):535-544.
GUO Yuhong, WANG Rujun. Some identities related to the self-inverse n -color compositions [J]. **Acta Mathematica Sinica: Chinese Series**, 2016, **59**(4):535-544. (in Chinese)
- [13] SHAPCOTT C. New bijections from n -color compositions [J]. **Journal of Combinatorics**, 2013, **4**(3):373-385.
- [14] SHAPCOTT C. C -color compositions and palindromes [J]. **The Fibonacci Quarterly**, 2012, **50**(4):297-303.

Some identities related to positive integer n -color compositions

GUO Yuhong*

(School of Mathematics and Statistics, Hexi University, Zhangye 734000, China)

Abstract: Firstly, some relations about the number of the self-inverse n -color compositions of positive integer, the Fibonacci number and the Lucas number are given. Furthermore, using one relation, some identities about the number of the n -color compositions of positive integer ν without part 1₁ on the right end, the number of the compositions with parts of size 1 and 2, the number of the compositions with odd parts and the number of the compositions with parts (>1) are obtained. And combinatorial proofs of identities are presented.

Key words: n -color compositions; the Fibonacci number; the Lucas number; identity; combinatorial proof