第57卷第3期　　大 连 理 工 大 学 学 报　　Vol. 57, No. 3
2017年5月　　Journal of Dalian University of Technology　　May 2017

文章编号：1000-8608(2017)03-0316-05

一类含有 4-圈的单圈图一般点可区别全染色

陈祥恩*[1]，李　婷[1]，王治文[2]

（1. 西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州　730070；
2. 宁夏大学 数学计算机科学学院，宁夏 银川　750021）

摘要： 设 G 为简单图. 设 f 是图 G 的一个一般全染色，若对图 G 的任意两个不同的顶点 u、v，有 $C(u)\neq C(v)$，则称 f 为图 G 的一般点可区别全染色（简记为 GVDTC）. 对图 G 进行一般点可区别全染色所需要的最少颜色数称为图 G 的一般点可区别全色数. 将一类含有 4-圈的单圈图悬挂边的染色按从小到大的顺序排列，探讨了它的一般点可区别全染色，确定了它具有一般点可区别全染色，并得到了它的一般点可区别全色数.

关键词： 单圈图；一般全染色；一般点可区别全染色；一般点可区别全色数
中图分类号： O157.5　　**文献标识码：** A　　**doi：** 10.7511/dllgxb201703015

0　引　言

点可区别一般边染色是由 Harary 等于 1985 年在文献[1]中提出的，文献[2-4]对此也进行了研究. 近些年来点可区别的未必正常的全染色也逐渐被研究. 例如，点可区别 IE-全染色在文献[5]中被提出，而一般点可区别全染色也在文献[6]中被提出. 本文受文献[6]的启发，使用更为简单的方法探讨一类含有 4-圈的单圈图的一般点可区别全染色，并得到它的一般点可区别全色数.

1　准备工作

图 G 的一个一般全染色是指若干种颜色对图 G 的全体顶点及边的一个分配.

设 f 为图 G 的一个一般全染色或 IE-全染色，x 为图 G 的一个顶点，将在 f 下 x 的颜色及与 x 关联的边的颜色所构成的集合（非多重集）记为 $C_f(x)$ 或 $C(x)$，称之为顶点 x 在 f 下的色集合，即 $C(x)=\{f(xu)\mid xu\in E\}\cup\{f(x)\}$.

设 f 为图 G 的一般全染色，若对图 G 的任意两个不同的顶点 u、v，有 $C(u)\neq C(v)$，则称 f 为图 G 的点可区别一般全染色或者一般点可区别全染色（简记为 GVDTC）. 图 G 的使用了 k 种颜色的一般点可区别全染色称为图 G 的 k-一般点可区别全染色（简记为 k-GVDTC）. 对图 G 进行一般点可区别全染色所需要的最少颜色数称为图 G 的一般点可区别全色数，记为 $\chi_{gvt}(G)$.

星 S_n 就是完全二部图 $K_{1,n}(n\geqslant 1)$. 称 $S_{m,n}$ 是双星，如果 $S_{m,n}$ 是树，并且顶点集为 $V(S_{m,n})=\{u_i\mid i=0,1,\cdots,m\}\cup\{v_j\mid j=0,1,\cdots,n\}$，边集为 $E(S_{m,n})=\{u_0u_i\mid i=0,1,\cdots,m\}\cup\{v_0v_j\mid j=0,1,\cdots,n\}\cup\{u_0v_0\}$，其中 m、n 是正整数且均大于 1. 称 $S_{p,q,r}$ 是三星，如果 $S_{p,q,r}$ 是树，并且顶点集为 $V(S_{p,q,r})=\{u_i\mid i=0,1,\cdots,p\}\cup\{v_j\mid j=0,1,\cdots,q\}\cup\{w_t\mid t=0,1,\cdots,r\}$，边集为 $E(S_{p,q,r})=\{u_0u_i\mid i=0,1,\cdots,p\}\cup\{v_0v_j\mid j=0,1,\cdots,q\}\cup\{w_0w_t\mid t=0,1,\cdots,r\}\cup\{u_0v_0,v_0w_0\}$，其中 p、q、r 是正整数且均大于 1.

本文设 $C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$ 表示如图 1 所示的一类含有 4-圈的单圈图.

文献[6]中研究了路、圈、星（即 $K_{1,n}$）、双星、三星、轮、扇、完全图的一般点可区别全染色，确定了它们的一般点可区别全色数. 本文将探讨一类

收稿日期： 2016-06-15；　**修回日期：** 2017-02-23.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(61163037,61163054,11261046)；宁夏回族自治区百人计划资助项目.
作者简介： 陈祥恩*(1965-)，男，教授，E-mail：chenxe@nwnu.edu.cn；李　婷(1993-)，女，硕士生，E-mail：LTKR2016@126.com.

含有 4-圈的单圈图 $C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$ 的一般点可区别全染色，并确定它们的一般点可区别全色数.

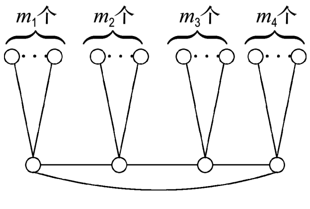


图 1　一类含有 4-圈的单圈图

Fig. 1　A family of unicyclic graphs including C_4

引理 1[6]　设 $S_n(n\geqslant 1)$是一个星，则

$$\chi_{\mathrm{gvt}}(S_n)=\begin{cases}2; & n=1,2\\ 3; & n=3\\ \left\lceil\dfrac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right\rceil; & n\geqslant 4\end{cases}$$

2　主要结果及其证明

定理 1　设 $C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}(m_i\geqslant 1,i=1,2,3,4)$是一个含有 4-圈的单圈图，令 $l=m_1+m_2+m_3+m_4$，则

$$\chi_{\mathrm{gvt}}(C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4})=\begin{cases}4; & l=4,5,6\\ \left\lceil\dfrac{\sqrt{8l+1}-1}{2}\right\rceil; & l\geqslant 7\end{cases}$$

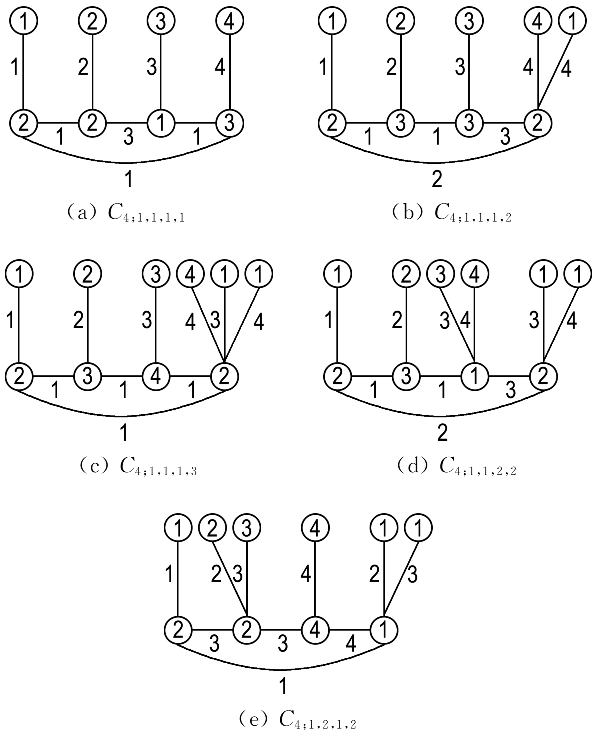
证明　当 $l=4$ 时，显然 $\chi_{\mathrm{gvt}}(C_{4;1,1,1,1})\geqslant 4$. 因为 3 种颜色只能区别 7 个点，而图 2(a)给出了 $C_{4;1,1,1,1}$的 4-GVDTC，因此 $\chi_{\mathrm{gvt}}(C_{4;1,1,1,1})=4$.

当 $l=5$ 时，显然 $\chi_{\mathrm{gvt}}(C_{4;1,1,1,2})\geqslant 4$. 因为 3 种颜色只能区别 7 个点，而图 2(b)给出了 $C_{4;1,1,1,2}$ 的 4-GVDTC，因此 $\chi_{\mathrm{gvt}}(C_{4;1,1,1,2})=4$.

当 $l=6$ 时，只需考虑 $C_{4;1,1,1,3}$、$C_{4;1,1,2,2}$、$C_{4;1,2,1,2}$ 即可. 显然对这 3 个图，$\chi_{\mathrm{gvt}}\geqslant 4$，而图 2(c)、(d)、(e)分别给出了 3 个图的 4-GVDTC，故 $\chi_{\mathrm{gvt}}(C_{4;1,1,1,3})=\chi_{\mathrm{gvt}}(C_{4;1,1,2,2})=\chi_{\mathrm{gvt}}(C_{4;1,2,1,2})=4$.

以下假设 $l\geqslant 7$.

令 $k=\left\lceil\dfrac{\sqrt{8l+1}-1}{2}\right\rceil$，则 $k\geqslant 4$ 且 $\chi_{\mathrm{gvt}}(C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4})\geqslant k$，这是因为 k 是使得 $\binom{k}{1}+\binom{k}{2}\geqslant l$ 的最小正整数. 设 $u_1u_2u_3u_4u_1$ 是 $C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$ 的 4-圈，$C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$ 中与 u_i 相邻的悬挂点为 $u_{i,1},\cdots,u_{i,m_i}$，$i=1,2,3,4$. 设 G'是从 G 中删去 4 条边 u_1u_2、u_2u_3、u_3u_4、u_1u_4 后再将 4 个点 u_1、u_2、u_3、u_4 等同为一个点所得的图，则 G'是阶为 $l+1$ 的星，即 $G'\cong S_l$，令 w 为 G'的中心. 由引理 1 知，S_l 有 k-GVDTC g，则 G' 也有 k-GVDTC g，且不妨设 G'的悬挂边 $wu_{1,1}$ 到 wu_{4,m_4} 的颜色是按从小到大的顺序排列. 下面构造 $C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$ 的 k-GVDTC f.



(a) $C_{4;1,1,1,1}$　(b) $C_{4;1,1,1,2}$　(c) $C_{4;1,1,1,3}$　(d) $C_{4;1,1,2,2}$　(e) $C_{4;1,2,1,2}$

图 2　$C_{4;1,1,1,1}$、$C_{4;1,1,1,2}$、$C_{4;1,1,1,3}$、$C_{4;1,1,2,2}$、$C_{4;1,2,1,2}$ 的 4-GVDTC

Fig. 2　The 4-GVDTC of $C_{4;1,1,1,1}$, $C_{4;1,1,1,2}$, $C_{4;1,1,1,3}$, $C_{4;1,1,2,2}$, $C_{4;1,2,1,2}$

让 $C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$ 的悬挂点 $u_{i,j}$ 沿袭在 g 下 G'中对应的悬挂点 $u_{i,j}$ 的颜色，$j=1,2,\cdots,m_i$，$i=1,2,3,4$；让 $C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$ 的悬挂边 $u_iu_{i,j}$ 沿袭在 g 下 G'中对应的悬挂边 $wu_{i,j}$ 的颜色，$j=1,2,\cdots,m_i$，$i=1,2,3,4$. 则在此基础上以下只需考虑 u_1、u_1u_2、u_2、u_2u_3、u_3、u_3u_4、u_4、u_1u_4 的染色即可.

令 A_{u_i} 表示与 u_i 关联的悬挂边的颜色构成的

集合(非多重集),$i=1,2,3,4$. 以下分5种情况讨论:

(1) $|A_{u_i}|=1, i=1,2,3,4$

在这种情况下,可按图3(a)、(b)、(c)、(d)、(e)所给出的方式分5种情形对圈上的点、边进行染色. 比如:在情形(a)中,边 u_1u_2、u_2u_3、u_3u_4、u_1u_4 分别用3、4、4、1染色;点 u_1、u_2、u_3、u_4 分别用2、2、3、2染色. 这时,$C_f(u_1)=\{1,2,3\}$,$C_f(u_2)=\{1,2,3,4\}$,$C_f(u_3)=\{1,3,4\}$,$C_f(u_4)=\{1,2,4\}$,其他顶点即悬挂点的色集合为1-子集或2-子集. 因此所得的染色是 k-GVDTC. 在其他情形下,都可类似得到最终染色是 k-GVDTC,且不再赘述.

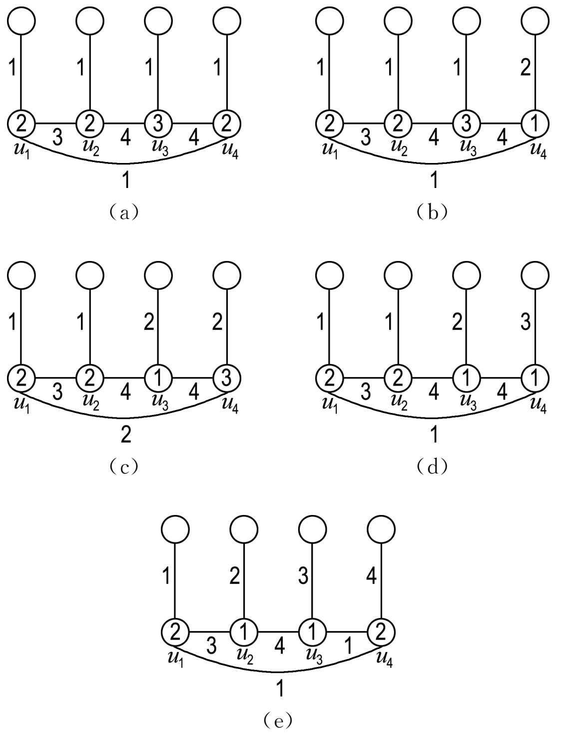


图3　情况(1)的示意图

Fig. 3　The schematic graph of case (1)

情形(a)记为情形(1,1,1,1),情形(b)记为情形(1,1,1,2),其他类似. 除上述5种情形外,还有情形(1,2,2,2)等价于情形(b);情形(1,2,2,3)与(1,2,3,3)均等价于情形(d). 因此,出现的这些情形将不再画图表示.

注记　图3均为示意图,在图中只标出了与 u_1、u_2、u_3、u_4 关联的悬挂边颜色的种类,而与 u_1、u_2、u_3、u_4 关联的悬挂边的条数不仅仅只有图中出现的条数. 后面再出现时,不再作注解.

(2) $|A_{u_1}|$、$|A_{u_2}|$、$|A_{u_3}|$、$|A_{u_4}|$ 中恰有3个是1

在这种情况下,可按图4所给出的9种方式进行染色.

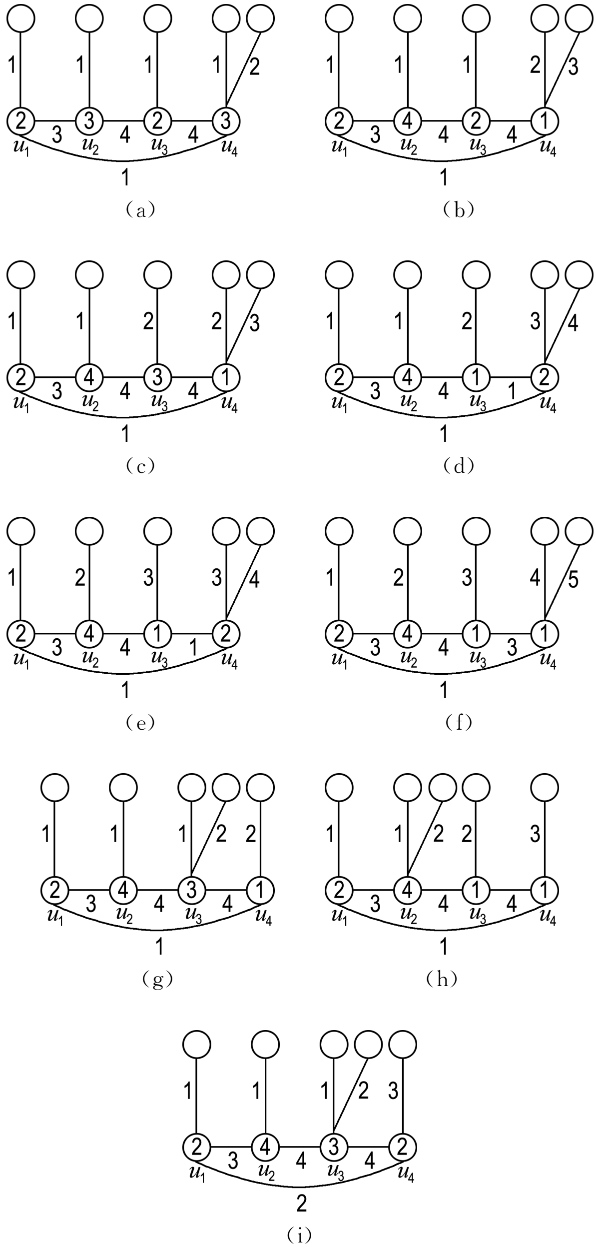


图4　情况(2)的示意图

Fig. 4　The schematic graph of case (2)

情形(a)记为情形(1,1,1,12),情形(b)记为情形(1,1,1,23),其他类似. 除上述9种情形外,还有情形(12,2,2,2)等价于情形(a);情形(12,3,3,3)等价于情形(b);情形(1,1,23,3)、(1,12,3,

3)和(1,1,23,3)等价于情形(c)；情形(1,2,2,23)、(1,1,23,4)、(1,23,4,4)、(12,3,3,4)和(12,3,4,4)等价于情形(d)；情形(1,12,2,2)等价于情形(g)；情形(1,2,2,23)、(1,23,3,3)和(12,2,2,3)等价于情形(i)；情形(1,2,23,4)、(1,2,34,4)、(1,12,3,4)、(1,23,3,4)和(12,2,3,4)等价于情形(e)；情形(1,2,34,5)、(1,23,4,5)和(12,3,4,5)等价于情形(f)；情形(1,2,23,3)等价于情形(h). 因此,出现的这些情形将不再画图表示.

(3) $|A_{u_1}|$、$|A_{u_2}|$、$|A_{u_3}|$、$|A_{u_4}|$中恰有2个是1

(i) $|A_{u_1}|=|A_{u_2}|=1$, $|A_{u_3}|\geqslant 2$, $|A_{u_4}|\geqslant 2$

由悬挂边染色规律得,$A_{u_3}\neq A_{u_4}$,则$A_{u_4}\setminus A_{u_3}\neq\varnothing$且$A_{u_3}\setminus A_{u_4}\neq\varnothing$. 设$a,b\in A_{u_3}$且$a<b$, $a\notin A_{u_4}$, $c,d\in A_{u_4}$且$c<d$, $d\notin A_{u_3}$.

下面用c染u_1u_4;用d分别去染u_1与u_1u_2;用$\{1,2,\cdots,k\}\setminus\{c,d\}$中两种不同的颜色分别去染$u_3u_4$与$u_4$;用$\{1,2,\cdots,k\}\setminus\{a,b,d\}$中某种颜色去染$u_3$;用$\{1,2,\cdots,k\}\setminus(A_{u_2}\cup\{c,d\})$中某种颜色分别去染$u_2$与$u_2u_3$. 在最终染色下,$c,d\in C_f(u_1)\cap C_f(u_4)$,但$|C_f(u_1)|=3$, $|C_f(u_4)|\geqslant 4$. $d\notin C_f(u_3)$, $d\in C_f(u_2)$, $c\notin C_f(u_2)$, $|C_f(u_2)|=3$, $|C_f(u_3)|\geqslant 3$. 因此最终所得的染色是$C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$的k-GVDTC.

(ii) $|A_{u_1}|=|A_{u_3}|=1$, $|A_{u_2}|\geqslant 2$, $|A_{u_4}|\geqslant 2$

由悬挂边染色规律得,$A_{u_2}\neq A_{u_4}$,则$A_{u_4}\setminus A_{u_2}\neq\varnothing$且$A_{u_2}\setminus A_{u_4}\neq\varnothing$. 设$a,b\in A_{u_2}$且$a<b$, $a\notin A_{u_4}$, $c,d\in A_{u_4}$且$c<d$, $d\notin A_{u_3}$. 不妨设$A_{u_1}=\{c_0\}$.

下面用d分别去染u_1与u_3u_4;用$\{1,2,\cdots,k\}\setminus\{c,d\}$中两种不同的颜色分别去染$u_1u_4$与$u_4$,使得边$u_1u_4$的色不是$c_0$;再用染$u_1u_4$的色(非$c_0$)去染$u_1u_2$;用$\{1,2,\cdots,k\}\setminus(A_{u_1}\cup A_{u_3}\cup\{d\})$中某种色分别去染$u_2u_3$与$u_3$;用$\{1,2,\cdots,k\}\setminus\{a,b,d\}$中某种颜色去染$u_2$. 在最终染色下,$d\notin C_f(u_2)$, $|C_f(u_2)|\geqslant 3$; $c,d\in C_f(u_4)$, $|C_f(u_4)|\geqslant 4$; $|C_f(u_1)|=3$, $c_0,d\in C_f(u_1)$; $c_0\notin C_f(u_3)$, $d\in C_f(u_3)$, $|C_f(u_3)|=3$. 因此最终所得的染色是$C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$的k-GVDTC.

(iii) 情形"$|A_{u_1}|=|A_{u_4}|=1$, $|A_{u_2}|\geqslant 2$, $|A_{u_3}|\geqslant 2$","$|A_{u_2}|=|A_{u_3}|=1$, $|A_{u_1}|\geqslant 2$, $|A_{u_4}|\geqslant 2$"以及"$|A_{u_3}|=|A_{u_4}|=1$, $|A_{u_1}|\geqslant 2$, $|A_{u_2}|\geqslant 2$"均等价于情形(i)

(iv) 情形"$|A_{u_2}|=|A_{u_4}|=1$, $|A_{u_1}|\geqslant 2$, $|A_{u_3}|\geqslant 2$"等价于情形(ii)

(4) $|A_{u_1}|$、$|A_{u_2}|$、$|A_{u_3}|$、$|A_{u_4}|$中恰有1个是1

(i) $|A_{u_1}|=1$, $|A_{u_i}|\geqslant 2$, $i=2,3,4$

这时由悬挂边染色规律得,A_{u_2}、A_{u_3}、A_{u_4}互不相同. 设$A_{u_1}=\{c_0\}$, $a,b\in A_{u_4}$,且$a<b$.

下面用c_0染u_1u_4;用$k-1$染u_1;用k分别去染u_1u_2、u_2、u_2u_3、u_3和u_3u_4;用$\{1,2,\cdots,k\}\setminus\{c_0,a,b\}$中某种颜色去染$u_4$. 在上述染色下,$c_0\notin C_f(u_3)$,而$c_0\in C_f(u_1)\cap C_f(u_4)$,故$C_f(u_3)\neq C_f(u_i)$, $i=1,4$; $A_{u_2}\neq A_{u_3}$, $k\notin A_{u_2}\cup A_{u_3}$,故$C_f(u_2)\neq C_f(u_3)$; $|C_f(u_1)|=3$, $|C_f(u_4)|\geqslant 4$,故$C_f(u_1)\neq C_f(u_4)$; $k-1\in C_f(u_1)\setminus C_f(u_2)$,故$C_f(u_1)\neq C_f(u_2)$; $a\in C_f(u_4)\setminus C_f(u_2)$,故$C_f(u_2)\neq C_f(u_4)$. 因此,所得的染色是$C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$的$k$-GVDTC.

(ii) $|A_{u_2}|=1$, $|A_{u_i}|\geqslant 2$, $i=1,3,4$

这时由悬挂边染色规律得,A_{u_1}、A_{u_3}、A_{u_4}互不相同. 设$A_{u_2}=\{c_0\}$, $a,b\in A_{u_1}$,且$a<b$.

下面用c_0染u_1u_2;用$k-1$染u_2;用k分别去染u_2u_3、u_3、u_3u_4和u_1u_4. 若$k\in A_{u_4}$或$|A_{u_4}|\geqslant 3$,则用k染u_4;若$k\notin A_{u_4}$且$|A_{u_4}|=2$,则用a染u_4. 用$\{1,2,\cdots,k\}\setminus\{k,a,b\}$中某种颜色去染$u_1$. 可以看出,上述染色是$C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$的$k$-GVDTC.

(iii) $|A_{u_3}|=1$, $|A_{u_i}|\geqslant 2$, $i=1,2,4$

这时由悬挂边染色规律得,A_{u_1}、A_{u_2}、A_{u_4}互不相同. 设$A_{u_3}=\{c_0\}$, $d_0\in A_{u_1}$, $a,b\in A_{u_4}$,且$a<b$.

下面用$k-1$染u_3;用k分别去染u_1、u_1u_2、u_2、u_2u_3和u_3u_4;用d_0染u_1u_4;用$\{1,2,\cdots,k\}\setminus\{a,b,d_0\}$中某种颜色去染$u_4$. 可以看出,上述染色是$C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$的$k$-GVDTC.

(iv) $|A_{u_4}|=1$, $|A_{u_i}|\geqslant 2$, $i=1,2,3$

这时由悬挂边染色规律得,A_{u_1}、A_{u_2}、A_{u_3}互不相同. 设$A_{u_4}=\{c_0\}$, $d_0\in A_{u_1}$, $a,b\in A_{u_3}$,且$a<b$.

下面用 a 染 u_4；用 k 分别去染 u_1、u_1u_2、u_2 和 u_2u_3；用 d_0 染 u_3u_4 与 u_1u_4；用 $\{1,2,\cdots,k\}\setminus\{a,b,d_0\}$ 中某种颜色去染 u_3. 可以看出，上述染色是 $C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$ 的 k-GVDTC.

(5) $|A_{u_1}|$、$|A_{u_2}|$、$|A_{u_3}|$、$|A_{u_4}|$ 均大于 1

由悬挂边染色规律得，A_{u_1}、A_{u_2}、A_{u_3}、A_{u_4} 互不相同. 设 $a,b\in A_{u_1}$ 且 $a<b$，$c,d\in A_{u_4}$ 且 $c<d$. 下面用 a 染 u_4；用 k 分别去染 u_1、u_1u_2、u_2、u_2u_3、u_3、u_3u_4 和 u_1u_4.

在上述染色下，$a\in C_f(u_1)\cap C_f(u_4)$，而 $a\notin C_f(u_2)\cap C_f(u_3)$，$|C_f(u_i)|\geqslant 3$，$i=1,2,3,4$，故 $C_f(u_i)\neq C_f(u_j)$，$j=1,4$，$i=2,3$；$c\notin C_f(u_1)$，而 $c\in C_f(u_4)$，故 $C_f(u_1)\neq C_f(u_4)$；$A_{u_2}\neq A_{u_3}$，$k\notin A_{u_2}\cup A_{u_3}$，故 $C_f(u_2)\neq C_f(u_3)$. 因此，所得的染色是 $C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$ 的 k-GVDTC.

综上即得 $C_{4;m_1,m_2,m_3,m_4}$ 的 k-GVDTC f.

3 结 语

在本文定理 1 中，通过探讨一类含有 4-圈的单圈图的一般点可区别全染色，证明了它具有一般点可区别全染色，并得到了它的一般点可区别全色数. 另外，一类含有 4-圈的单圈图是通过在 4-圈的基础上加悬挂点得到的，那么这种方法是不是可以继续延续下去，进而得到一类含有 n-圈的单圈图($n\geqslant 5$)的一般点可区别全色数？这就是今后需要继续研究的课题.

参考文献：

[1] HARARY F, PLANTHOLT M. The point-distinguishing chromatic index [M] // HARARY F, MAYBEE J S, eds. **Graphs and Application**. New York: Wiley Interscience, 1985:147-162.

[2] HORNÁK M, SOTÁK R. The fifth jump of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$[J]. **Ars Combinatoria**, 1996, **42**:233-242.

[3] HORNÁK M, SOTÁK R. Localization jumps of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$[J]. **Discussiones Mathematicae Graph Theory**, 1997, **17**(2):243-251.

[4] HORNÁK M, ZAGAGLIA S N. On the point-distinguishing chromatic index of $K_{m,n}$ [J]. **Ars Combinatoria**, 2006, **80**:75-85.

[5] CHEN Xiang′en, GAO Yuping, YAO Bing. Vertex-distinguishing IE-total colorings of complete bipartite graphs $K_{m,n}$ ($m<n$) [J]. **Discussiones Mathematicae Graph Theory**, 2013, **33**(2):289-306.

[6] LIU Chanjuan, ZHU Enqiang. General vertex-distinguishing total colorings of graphs [J]. **Journal of Applied Mathematics**, 2014, **2014**:849748.

General vertex-distinguishing total colorings of a family of unicyclic graphs including C_4

CHEN Xiang′en*[1], LI Ting[1], WANG Zhiwen[2]

(1. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;
2. School of Mathematics and Computer Sciences, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: Let G be a simple graph. For a general total coloring f of G, if $C(u)\neq C(v)$ for any two different vertices u and v of G, then f is called a general vertex-distinguishing total coloring of G (or GVDTC of G for short). The minimum number of colors required in a GVDTC is the general vertex-distinguishing total chromatic number. The general vertex-distinguishing total colorings of a family of unicyclic graphs including C_4 are discussed by making the coloring of its pendent edges in an ascending order. It is determined that it has a general vertex-distinguishing total coloring of G and its general vertex-distinguishing total chromatic number is got.

Key words: unicyclic graphs; general total coloring; general vertex-distinguishing total coloring; general vertex-distinguishing total chromatic number