

德杰尼斯五后问题泛化研究

李盘林^{*1}, 赵铭伟¹, 徐喜荣¹, 李丽双¹, 李伯章²

(1. 大连理工大学 电子信息与电气工程学部, 辽宁 大连 116024;

2. 滑铁卢大学 计算机工程系, 加拿大 安大略 滑铁卢)

摘要: 在德杰尼斯五后问题求解方法基础上, 给出了 $2p \times 2p$ 棋盘坐标表示, 定义了方环和马步格, 并利用皇后控制数或剩余控制数、皇后最佳(极值)位置或剩余最佳(极值)位置, 以及棋盘对称性, 得到了德杰尼斯五后问题泛化求解定理和便于求解的简化定理。

关键词: 德杰尼斯五后问题; 皇后控制数或剩余控制数; 皇后最佳(极值)或剩余最佳(极值)位置; 方环; 马步格

中图分类号: O158

文献标识码: A

doi:10.7511/dllgxb201703017

0 引言

在德杰尼斯五后问题求解方法^[1](下称五后问题)一文的结语中, 指出对于 $2p \times 2p$ ($p=1, 2, \dots$) 棋盘上最少放置多少皇后, 使它们在不同行、不同列和不同对角线上且能吃掉(或称管控)棋盘上其余任何棋子(下称五后问题泛化论题)这一问题的求解途径^[2], 它可极大地克服以往人们用视察法求解^[3]的盲目性。随着 p 的增大, 收效更加明显。本文进一步详细地研究五后问题泛化论题。

1 求解前准备

(1) $2p \times 2p$ 棋盘坐标表示: 完全类似于文献^[1]中的描述, 见图1。

(2) 方环的定义: 由格 $s_{p,p}, s_{p+1,p}, s_{p+1,p+1}$ 和 $s_{p,p+1}$ 组成 p 级方环; 由格 $s_{p-1,p-1}, s_{p,p-1}, s_{p+1,p-1}, s_{p+2,p-1}, s_{p+2,p+1}, s_{p+2,p+2}, s_{p+1,p+2}, s_{p,p+2}, s_{p-1,p+2}, s_{p-1,p+1}, s_{p-1,p}$ 组成 $p-1$ 级方环... 由格 $s_{1,1}, s_{2,1}, \dots, s_{2p,1}, s_{2p,2}, \dots, s_{2p,2p}, \dots, s_{2,2p}, s_{1,2p}, \dots, s_{1,2}$ 组成 1 级方环(或称边界方环)。由各

级方环中的格所组成的集合, 记为 $R_k, 1 \leq k \leq p$, 如 $R_p = \{s_{p,p}, s_{p+1,p}, s_{p+1,p+1}, s_{p,p+1}\}$ 。从方环定义可知, 方环是对于某些格在棋盘中位置的一种形象描述。

$n(Q|s_{i,j}), n(Q|s_{k,l})$ 设为皇后 Q 分别放置在 $s_{i,j}$ 和 $s_{k,l}$ 上的皇后控制数, 于是可给出下列定理:

定理 1 $|R_k| = 4(2p - 2k + 1), k \leq p$ 。

定理 2 $n(Q|s_{i,j} \in R_k) = 6p - 2k - 4, k \leq p$ 。

定理 3 若 $s_{i,j}, s_{k,l} \in R_k$, 则 $n(Q|s_{i,j}) = n(Q|s_{k,l}), 1 \leq k \leq p$ 。

定理 4 若 $s_{i,j} \in R_m, s_{k,l} \in R_n, m > n$, 则 $n(Q|s_{i,j}) > n(Q|s_{k,l}), 1 \leq m, n \leq p$ 。

证明略。

定理 4 表明了皇后放置格离棋盘中心 (p, p) 越近, 其皇后控制数越大。

(3) 马步格的定义: 与 $s_{i,j}$ 不同行、不同列和不在其对角线上最近距离的格, 称为 $s_{i,j}$ 的马步格, 如同中国象棋中马的走步。例如, 在图 1 中, $s_{p+1,p+2}$ 是 $s_{p,p}$ 的马步格。 $s_{i,j}$ 的所有马步格构成一个集合, 记为 $H(s_{i,j})$ 。由于 $s_{i,j}$ 处于棋盘中的不同位置 $H(s_{i,j})$ 的基数 $|H(s_{i,j})|$ 是不同的。

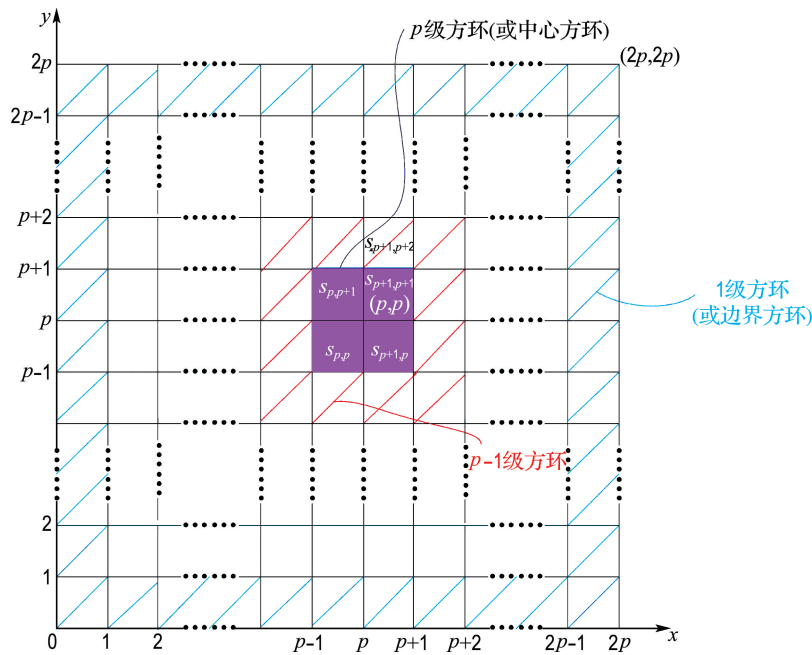


图 1 $2p \times 2p$ 棋盘定义
Fig. 1 Definition of $2p \times 2p$ chess board

令 $C = \{s_{i,j} | 1 \leq i, j \leq 2p\}$, 即 C 是棋盘上所有格的集合.

定理 5 若 $s_{i,j} \in C$, 则 $2 \leq |H(s_{i,j})| \leq 8$.

证明略.

设 $S_{i,j}$ 是与格 $s_{i,j}$ 同行、同列和同对角线上所有格集合, 则有以下定理:

定理 6 若 $s_{i,j} \in C$, 则 $n(Q|s_{i,j}) \leq |S_{i,j}|$.

证明 若第 1 个皇后放置在格 $s_{i,j}$ 上, 而 $n(Q|s_{i,j})$ 是表示皇后 Q 放置在 $s_{i,j}$ 的控制数, 则 $n(Q|s_{i,j}) = |S_{i,j}|$. 若第 2 个, 第 3 个, ..., 第 k 个皇后放置在格 $s_{i,j}$ 上, 而 $n(Q|s_{i,j})$ 是表示皇后 Q 放置在 $s_{i,j}$ 上的剩余控制数, 则 $n(Q|s_{i,j}) < |S_{i,j}|$. 综上, 定理证毕.

2 核心定理

下面, 为凸显放置皇后 Q 的先后次序, 令 $n(Q|s_{i,j})$ 是第 k 个皇后 Q 放置在 $s_{i,j}$ 上的剩余控制数 ($k \geq 2$).

设 $s_{i_0,j_0} = s_{p,p}$, 其实 R_p 中任何元素均可作为第 1 个皇后 Q 最佳位置.

再设 $C_0 = C, C_1 = C_0 - S_{i_0,j_0}, C_2 = C_1 - S_{i_1,j_1}$,

..., $C_k = C_{k-1} - S_{i_{k-1},j_{k-1}}$, 可见 C_k 是放置第 1 个, 第 2 个, ..., 第 $k-1$ 个皇后, 棋盘上尚未被已放置皇后管控的格集合, 或称 C_{k-1} 为已放置 $k-1$ 个皇后的自由域. 显然, 随着 k 增大, $|C_k|$ 将变小.

于是,

$$n(Q_1) = n(Q_{i_0,j_0}) = n(Q|s_{i_0,j_0}) = \max_{s_{i,j} \in C_0} n(Q|s_{i,j})$$

$$n(Q_2) = n(Q_{i_1,j_1}) = n(Q|s_{i_1,j_1}) = \max_{s_{i,j} \in C_1} n(Q|s_{i,j})$$

...

$$n(Q_k) = n(Q_{i_{k-1},j_{k-1}}) = n(Q|s_{i_{k-1},j_{k-1}}) = \max_{s_{i,j} \in C_{k-1}} n(Q|s_{i,j})$$

定理 7 (五后问题泛化定理)

$$n(Q_1) + n(Q_2) + \dots + n(Q_k) + \dots + n(Q_{m(p)}) = 2p \times 2p \quad (1)$$

其中 $n(Q_k) = n(Q|s_{i_{k-1},j_{k-1}}) = \max_{s_{i,j} \in C_{k-1}} n(Q|s_{i,j})$.

证明 因为在 $2p \times 2p$ 棋盘上要求放置最少皇后, 使它们在不同行、不同列和不同对角线上, 并能管控(或吃掉)棋盘上除已放置皇后外的任何棋子, 这可转化为要求每放置一个皇后, 使它管控(或吃掉)棋盘上尽可能多的棋子, 并且对于满足下式:

$$n(Q_1) + n(Q_2) + \cdots + n(Q_l) + \cdots + n(Q_{m_k}) = 2p \times 2p \quad (1a)$$

或

$$n(Q|s_{i_0, j_0}) + n(Q|s_{i_1, j_1}) + \cdots + n(Q|s_{i_{l-1}, j_{l-1}}) + \cdots + n(Q|s_{i_{m_k-1}, j_{m_k-1}}) = 2p \times 2p$$

有多个(比如说 q 个)长度不同的皇后最佳(极佳)位置序列以及由它们分别组成的集 $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots, S_q$, 而

$$S_k = \{s_{i_0, j_0}^{(k)}, s_{i_1, j_1}^{(k)}, \dots, s_{i_{l-1}, j_{l-1}}^{(k)}, \dots, s_{i_{m_k-1}, j_{m_k-1}}^{(k)}\};$$

$$1 \leq k \leq q$$

$$s_{i_{l-1}, j_{l-1}}^{(k)} \in C, 1 \leq k \leq q, 0 \leq l \leq m_k$$

为方便计,每个位置序列称为式(1a)的一个广义解,相应的集合基数,称为广义解长度.

若 $m(p) = \min_{1 \leq k \leq q} |S_k|$, 则那些长度为 $m(p)$ 的广义解称为定理7的基础解.

为确定 $m(p)$, 首先应求满足式(1a)的所有广义解, 因为 p 有限, 理论上是可行的. 实际上, 只需求几个, 再利用 $m(p)$ 的估值: $\left\lfloor \frac{2(2p-1)}{3} \right\rfloor < m(p) < \lceil 2p-1 \rceil$, 便可确定 $m(p)$. 如果在求解中, 发现尚有更小的 $m(p)$, 则只好改之. 然而这种概率是很小的.

为求出所有广义解, 首先求出第一个广义解, 并以它为基础求出其余广义解. 若第一个广义解中有几处皇后剩余极佳位置, 对每一处中的每一个其他剩余极佳位置, 都按第一个广义解处理皇后剩余极佳位置那样, 求出一个新的广义解. 对于求出第二个广义解, 如同第一个广义解那样处理每个皇后剩余极佳位置, 如此这般, 便可求出所有广义解. 证毕.

推论1 若求得所有以 $s_{p,p}$ 为第1个皇后 Q 最佳位置的 $n(p)$ 个不同基础解, 则本定理便有 $8n(p)$ 个解.

$$\text{推论2} \quad \left\lfloor \frac{2(2p-1)}{3} \right\rfloor < m(p) < \lceil 2p-1 \rceil$$

注意, 两个不同基础解, 是指两个基础解中皇后最佳(极佳)位置或剩余最佳(极佳)位置所组成集合是不同的.

定理8

$$n(Q_1) + n(Q_2) + \cdots + n(Q_k) + \cdots + n(Q_{i_{m(p)-1}, j_{m(p)-1}}) = 2p \times 2p$$

或

$$n(Q|s_{i_0, j_0}) + n(Q|s_{i_1, j_1}) + \cdots + n(Q|s_{i_{k-1}, j_{k-1}}) + \cdots + n(Q|s_{i_{m(p)-1}, j_{m(p)-1}}) = 2p \times 2p$$

其中

$$n(Q|s_{i_{k-1}, j_{k-1}}) = \max_{s_{i,j} \in H^{k-2} C_{k-1} \| s_{i,j} \in C_{k-1}} n(Q|s_{i,j})$$

符号 $\|$ 的含义是: 若它的左部为真, 则考察左部而不再考察右部, 否则只考察右部.

证明 由于 $n(Q_k) = n(Q_{i_{k-1}, j_{k-1}}) =$

$$n(Q|s_{i_{k-1}, j_{k-1}}) =$$

$$\max_{s_{i,j} \in C_{k-1}} n(Q|s_{i,j})$$

可知放置第 k 个皇后在自由域 $C_{k-1} = C_{k-2} - S_{i_{k-2}, j_{k-2}}$ 中求出皇后剩余最佳(极佳)位置 $s_{i_{k-1}, j_{k-1}}$, 利用马步格, 这可转化为

(1) 若自由域 C_{k-1} 中含有已求出皇后剩余最佳(极佳)位置的马步格, 则可求得第 k 个皇后剩余最佳(极佳)位置 $s_{i_{k-1}, j_{k-1}}$, 即

$$n(Q_k) = n(Q_{i_{k-1}, j_{k-1}}) = n(Q|s_{i_{k-1}, j_{k-1}}) =$$

$$\max_{s_{i,j} \in H^{k-2} C_{k-1} \cap C_{k-1}} n(Q|s_{i,j})$$

其中 $H^{k-2} C_{k-1} = (\bigcup_{l=0}^{k-2} H(s_{i_l, j_l})) \cap C_{k-1}$.

(2) 若自由域 C_{k-1} 中不存在已求出皇后剩余最佳(极佳)位置的马步格, 则可在自由域 C_{k-1} 中求出第 k 个皇后剩余最佳(极佳)位置 $s_{i_{k-1}, j_{k-1}}$, 即

$$n(Q_k) = n(Q_{i_{k-1}, j_{k-1}}) = n(Q|s_{i_{k-1}, j_{k-1}}) =$$

$$\max_{s_{i,j} \in C_{k-1}} n(Q|s_{i,j})$$

注意: (1) 中所求是从第2个开始的皇后剩余最佳(极佳)位置; (2) 中所求是几个最后皇后剩余最佳(极佳)位置.

需要指出的是, 对于式(1a)求每个广义解均以 $s_{p,p}$ 为第1个皇后最佳位置, 而其余皇后剩余最佳(极佳)位置均在自由域 $C_1, C_2, \dots$ 内求其皇后剩余控制数最大为依据, 这便有可能使选定皇后最佳(极佳)位置彼此在棋盘相距远而分散, 求

得皇后剩余控制数有的较大,有的很小,致使所求广义解长度增大,不利达到基础解要求,期望落空.若皇后最佳(极佳)位置在已选定皇后最佳(极佳)位置的马步格进行,由于这些马步格相聚中心(p,p)周围并逐渐向外展开,使得皇后剩余控制数变动不大,有利于广义解长度缩小而使所要求的基础解可能性增大.因此,定理 8 是五后问题泛化定理的便于求解的简化形式.

3 结 语

本文定理 7 和定理 8 是五后问题泛化研究的两个重要结果,为在 $n \times n$ 网格上布置最少节点管控全局的优化问题提供了一种有效方法,而且在防灾和安全领域及社会管理中得到了应用,有着明显的经济效益和社会效益.

参考文献:

[1] 李盘林,赵铭伟,徐喜荣,等. 德杰尼斯五后问题求

解方法[J]. 大连理工大学学报, 2016, **56**(3):304-308.

LI Panlin, ZHAO Mingwei, XU Xirong, *et al.* Solution to De Jaenisch's five queens problem[J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2016, **56**(3):304-308. (in Chinese)

[2] 李盘林,李丽双,赵铭伟,等. 离散数学[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社, 2016.

LI Panlin, LI Lishuang, ZHAO Mingwei, *et al.* **Discrete Mathematics** [M]. 3 rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2016. (in Chinese)

[3] 李盘林,李立建,刘晓红,等. 基于启发性知识研究生院课表编排系统[J]. 计算机学报, 1992, **15**(11):876-889.

LI Panlin, LI Lijian, LIU Xiaohong, *et al.* A heuristic knowledge-based graduate school timetable scheduling system [J]. **Chinese Journal of Computers**, 1992, **15**(11):876-889. (in Chinese)

Research on generalization of De Jaenisch's five queens problem

LI Panlin^{*1}, ZHAO Mingwei¹, XU Xirong¹, LI Lishuang¹, LI Bozhang²

(1. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Department of Computer Engineering, University of Waterloo, Waterloo, ON, Canada)

Abstract: On the basis of the solution to De Jaenisch's five queens problem, the coordinate representation of the $2p \times 2p$ chess board is introduced, and the square ring and lattice of the horse's walking in Chinese chess are defined. Using the control number or the remaining control number of the queen, the optimum (heuristically) or the remaining optimum (heuristically) positions of the queen and chess board symmetry, De Jaenisch's five queens problem generalization solution theorem and the simplified theorem convenient to solve are given.

Key words: De Jaenisch's five queens problem; control number/ the remaining control number of the queen; the optimum (heuristically) or the remaining optimum (heuristically) positions of the queen; square ring; lattice of the horse's walking in Chinese chess