文章编号：1000-8608(2017)04-0424-06

具有两种修复方法的可修复系统解研究

周 莉*， 芦雪娟， 王伟华

（齐齐哈尔大学 理学院，黑龙江 齐齐哈尔 161006）

摘要：将半离散算法应用到具有两种修复方法的可修复系统模型中，在$[0, x_0]$上对其修复率进行离散，得到了该系统的半离散化模型.进一步利用泛函分析中算子半群理论将半离散后的偏微分方程转化为抽象Cauchy问题，即转化为矩阵常微分方程组；再根据Trotter逼近定理证明了矩阵常微分方程组的解收敛于原方程的解.最后在故障率和修复率均为常数的前提下，利用Matlab对该系统的稳定性和可靠性等进行了数值试验并得到了该模型的数值解，同时给出了相应的图形趋势.结果表明，对具有两种修复方法的可修复系统模型进行半离散化研究，既可以为利用计算机进一步进行数值计算打下理论基础，又有助于研究和分析系统的可靠性.

关键词：可修复系统；半离散化；收敛；数值计算

中图分类号：TP391.9　　**文献标识码**：A　　**doi**：10.7511/dllgxb201704014

0 引 言

可修复系统在可靠性理论中占有重要地位，是非常重要的系统，也是可靠性数学研究的基本问题之一.目前，Gupur[1]、Li等[2]、Chung[3]从统计独立事件和两个状态单调相关联的系统到多个状态相对复杂系统的可靠性都进行了研究.对于一个可修复系统的可靠性来说，最希望的是设计出来的系统能长时间地安全稳定工作.对维修性来说，希望设计出来的系统在发生故障时能够被快速修复好.将良好的可靠性与良好的维修性结合起来，就可以保证系统较高的实用性.因此，在实际中为了提高系统的可靠性，经常采用检修的手段对系统进行维护.可修复系统一般由一些故障部件和一个或多个维修设备组成，维修设备对发生故障的部件进行检查和维修，修理后的部件可继续执行正常的工作.

Dhillon[4]运用Laplace变换研究了具有两种修复方法的可修复系统模型，得到了稳态解的存在性.张玉峰等[5]证明了该系统动态非负解是存在且唯一的.赵玉荣等[6]通过系统算子的谱点分析得出了其解的渐进稳定性及系统稳态解就是系统算子的零本征值对应的本征向量.本文在文献[6]的基础上将半离散算法[7]应用于该系统模型中，对系统的修复率$\mu_j(x)(j=1,2)$用初等阶梯函数进行逼近[8]，得到系统半离散化模型，最后对所得结果用Matlab进行数值模拟，并得出相应的模拟图形，从直观上验证理论研究结果的正确性.

1 数学模型

具有两种修复方法的复杂可修复系统（系统Ⅰ）的模型见图1.

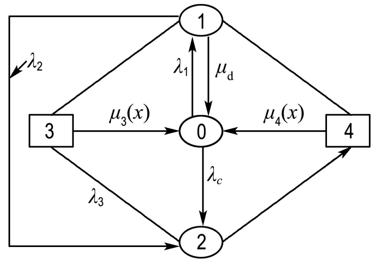


图1 具有两种修复方法的复杂可修复系统模型
Fig. 1 Repairable system model with two types of repair facilities

收稿日期：2017-03-09；　**修回日期**：2017-06-05.
基金项目：国家科技支撑计划课题资助项目(2013BAK12B0803)；黑龙江省教育厅基本业务专项理工面上项目(135109229).
作者简介：周 莉*(1976-)，女，硕士，副教授，E-mail：13796881349@139.com；芦雪娟(1979-)，女，博士，讲师，E-mail：lujuan02@163.com；王伟华(1978-)，女，硕士，副教授，E-mail：wangweihua8500@163.com.

该模型可用积分-微分方程描述为

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-m_0p_0(t)+\mu_{\mathrm{d}}p_1(t)+\sum_{j=3}^{4}\int_0^{\infty}p(x,t)\mu_j(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_1(t)}{\mathrm{d}t}=-m_1p_1(t)+\lambda_1p_0(t) \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_2(t)}{\mathrm{d}t}=-m_2p_2(t)+\lambda_cp_0(t)+\lambda_2p_1(t) \tag{3}$$

$$\frac{\partial p_j(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial p_j(x,t)}{\partial x}=-\mu_j(x)p_j(x,t);\quad j=3,4 \tag{4}$$

$$p_j(0,t)=\lambda_jp_2(t);\ j=3,4 \tag{5}$$

$$p(0)=1,\ p_1(0)=p_2(0)=0,\ p_j(x,0)=0;\quad j=3,4 \tag{6}$$

记 $m_0=\lambda_1+\lambda_c, m_1=\lambda_2+\mu_{\mathrm{d}}, m_2=\lambda_3+\lambda_4$. 其中 $p_j(t)$表示 t 时刻系统处于 j 状态的概率，$j=0$ 为正常状态，$j=1$ 为退化状态，$j=2$ 为崩溃状态，$j=3$ 为大修状态，$j=4$ 为小修状态. $p_j(x,t)$表示系统处于状态 j 且已修时间为 x 的概率，$j=3,4$. λ_j 是系统定常故障率，$j=1$ 为从正常状态到退化状态，$j=2$ 为从退化状态到崩溃状态，$j=c$ 为从正常状态到崩溃状态. μ_{d} 是系统在退化状态时的定常修复率. $\mu_j(x)$表示系统处于状态 j 修复时间为 x 时的修复率，$j=3,4$，且满足

$$\int_c\mu_j(x)\mathrm{d}x=\infty;\ 0\leqslant\mu_j(x)<\infty$$

$$M=\sup_{x\in[0,\infty)}\mu_j(x);$$

$$\int_0^T\mu_j(x)\mathrm{d}x<\infty;\ 0\leqslant T<\infty$$

在 Banach 空间中用抽象 Cauchy 问题来描述这个系统状态空间：

$$\boldsymbol{X}=\left\{\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{R}^3\times L^1[0,\infty)\ \middle|\ \|\boldsymbol{p}\|=\sum_{j=0}^{2}|\boldsymbol{p}_j|+\sum_{j=3}^{4}\|\boldsymbol{p}_j\|_{L^1[0,\infty)}\right\}$$

显然 $\boldsymbol{X}$ 是 Banach 空间. 定义算子 $\boldsymbol{A}$ 及其定义域：

$$D(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{p}=(p_0\quad p_1\quad p_2\quad p_3(x)\quad p_4(x))\in\boldsymbol{X}\mid p_j(x)\text{是绝对连续函数，且 }p_j(x)\in L^1[0,\infty)(j=3,4),\ p_j(0)=\lambda_jp_2,\ j=3,4\}$$

$$\boldsymbol{Ap}=\begin{pmatrix}-m_0p_0+\mu_{\mathrm{d}}p_1+\sum_{j=3}^{4}\int_c p_j(x,t)\mu_j(x)\mathrm{d}x\\ -m_1p_1+\lambda_1p_0\\ -m_2p_2+\lambda_cp_0+\lambda_2p_1\\ -p_3(x)-\mu_3(x)p_3(x)\\ -p_3(x)-\mu_3(x)p_3(x)\end{pmatrix}$$

则方程(1)～(6)可以描述成 Banach 空间 $\boldsymbol{X}$ 中一个抽象的 Cauchy 问题：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{Ap}(t);\ t\geqslant0 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{p}(0)=(1\quad0\quad0\quad0\quad0)^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

2　模型的半离散化

假设 $\mu_j(x)$满足在$(0,\infty)$上是连续且有界的，$\int_0^{\infty}\mu_j(x)\mathrm{d}x=\infty$，对任意固定的 $\alpha>0$，$\int_0^{\alpha}\mu_j(x)\mathrm{d}x<\infty$，且存在 $\mu_j^*>0$，使得$\lim\limits_{\alpha\to\infty}\mu_j(x)=\mu_j^*$，取 $0=a_0<a_1<\cdots<a_n=x_0$，令 $\Delta_i=[a_{i-1},a_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，$x_0\in(0,\infty)$.

下面构造阶梯函数：

$$\mu_{n_j}(x)=\begin{cases}\sup\limits_{\substack{a_{i-1}\leqslant x\leqslant a_i\\1\leqslant i\leqslant n}}\mu_j(x); & x\in\Delta_i\\ \mu_j^*; & x\in(x_0,\infty)\end{cases}$$

则由假设，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $x_0\in(0,\infty)$使得 $|\mu_j(x)-\mu_j^*|<\varepsilon$ 与 $|\mu_{n_j}(x)-\mu_j(x)|<\varepsilon$，从而半离散化后原模型变为$(\tilde{1})\sim(\tilde{6})$(即原模型中的 $\mu_j(x)$位置相应地换为 $\mu_{n_j}(x)$). 则原偏微分方程变为常微分方程$(\tilde{1})\sim(\tilde{6})$，如同前面一样，把$(\tilde{1})\sim(\tilde{6})$用 Banach 空间中的抽象 Cauchy 问题来描述：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_n(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{p}_n(t);\ t\geqslant0 \tag{9}$$

$$\boldsymbol{p}_n(0)=(1\quad0\quad0\quad0\quad0)^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

3　系统动态解的逼近

由文献[6]和[9]可知：$\boldsymbol{A}$ 生成一个 C_0 压缩半群，再由生成 C_0 半群的唯一性知此压缩 C_0 半群就是 $\boldsymbol{T}(t)$.

首先估计线性算子 $\boldsymbol{A}$ 的预解式 $R(v;\boldsymbol{A})$和线性算子 $\boldsymbol{A}_n$ 的预解式 $R(v;\boldsymbol{A}_n)$，然后用 Trotter 定理来证明系统动态解的逼近.

考虑方程$(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{p}(x)=\boldsymbol{y}(x)$,即

$$(v+\lambda_1+\lambda_c)p_0-\mu_d p_1-\sum_{j=3}^{4}\int_0^\infty p_j(x)\mu_j(x)\mathrm{d}x=y_0 \tag{11}$$

$$-\lambda_1 p_0+(v+\lambda_2+\mu_d)p_1=y_1 \tag{12}$$

$$-\lambda_c p_0-\lambda_2 p_1+(v+\lambda_3+\lambda_4)p_2=y_2 \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_j(x)+(v+\mu_j(x))p_j(x)=y_j;\ j=3,4 \tag{14}$$

由方程(14)可得

$$p_j(x)=\mathrm{e}^{-\int_0^x(v+\mu_j(\xi))\mathrm{d}\xi}\left[\int_0^x y_j(\tau)\mathrm{e}^{\int_0^x(v+\mu_j(\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau+p_j(0)\right];\quad j=3,4 \tag{15}$$

令

$$\sigma_j=\int_0^\infty \mu_j(x)\mathrm{e}^{-\int_0^x(v+\mu_j(\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x$$

$$\varphi_j=\int_0^\infty \mu_j(x)\int_0^x y_j(\tau)\mathrm{e}^{-\int_\tau^x(v+\mu_j(\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x;\ j=3,4$$

由边界条件,则有关于p_0、p_1、p_2方程组如下:

$$(v+\lambda_1+\lambda_c)p_0-\mu_d p_1-(\lambda_3\sigma_3+\lambda_4\sigma_4)p_2=y_0+\varphi(y_3)+\varphi(y_4) \tag{16}$$

$$-\lambda_1 p_0+(v+\lambda_2+\mu_d)p_1=y_1 \tag{17}$$

$$-\lambda_c p_0-\lambda_2 p_1+(v+\lambda_3+\lambda_4)p_2=y_2 \tag{18}$$

考虑关于p_0、p_1、p_2方程组的系数矩阵$\boldsymbol{D}$:

$$|\boldsymbol{D}|=\begin{vmatrix} v+\lambda_1+\lambda_c & -\mu_d & \lambda_3\sigma_3+\lambda_4\sigma_4 \\ -\lambda_1 & v+\lambda_2+\mu_d & 0 \\ -\lambda_c & -\lambda_2 & v+\lambda_3+\lambda_4 \end{vmatrix}$$

当$v>0$时$\det\boldsymbol{D}\neq 0$,方程组(16)~(18)有唯一解[6,10],那么方程组(11)~(14)有唯一解,从而有$R(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=3$.所以$(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$是闭算子,$(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$存在且有界[11].

$|\boldsymbol{D}|$是由σ_3、σ_4线性表示,当$v>0$时

$$0<|\sigma_j|=\left|\int_0^\infty \mu_j(x)\mathrm{e}^{-\int_0^x(v+\mu_j(\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x\right|\leqslant$$
$$\int_0^\infty \mu_j(x)|\mathrm{e}^{-vx}|\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_j(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_0^\infty \mu_j(x)|\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_j(\xi)\mathrm{d}\xi}|\mathrm{d}x\ (\mathrm{e}^{-vx}\text{为减函数})=$$
$$\int_0^\infty \mu_j(x)\left(-\frac{1}{\mu_j(\xi)|_0^x}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\int_0^x\mu_j(\xi)\mathrm{d}\xi}=1$$

即$0<|\sigma_j|<1$,$j=3,4$.那么$|\boldsymbol{D}|$也是有界的.

由Gramer法则可得

$$p_0=\frac{\{d_{11}y_0+d_{12}y_1+d_{13}y_2+d_{14}\varphi_3(\tau)+d_{15}\varphi_4(\tau)\}}{|\boldsymbol{D}|}$$

$$p_1=\frac{\{d_{21}y_0+d_{22}y_1+d_{23}y_2+d_{24}\varphi_3(\tau)+d_{25}\varphi_4(\tau)\}}{|\boldsymbol{D}|}$$

$$p_2=\frac{\{d_{31}y_0+d_{32}y_1+d_{33}y_2+d_{34}\varphi_3(\tau)+d_{35}\varphi_4(\tau)\}}{|\boldsymbol{D}|}$$

其中$d_{14}=d_{11}w_3$,$d_{15}=d_{11}w_4$,$d_{24}=d_{21}w_3$,$d_{25}=d_{21}w_4$,$d_{34}=d_{31}w_3$,$d_{35}=d_{31}w_4$.

令$w_j=\mathrm{e}^{-\int_0^x(v+\mu_j(\xi))\mathrm{d}\xi}$;$j=3,4$.将$p_0$、$p_1$、$p_2$代入$p_j(x)(j=3,4)$则有

$$p_3(x)=\frac{\{k_{11}y_0+k_{12}y_1+k_{13}y_2+k_{14}\varphi_3(\tau)+G(y_3)+k_{15}\varphi_4(\tau)\}}{|\boldsymbol{D}|}$$

$$p_4(x)=\frac{\{k_{21}y_0+k_{22}y_1+k_{23}y_2+k_{24}\varphi_3(\tau)+k_{25}\varphi_4(\tau)+G(y_4)\}}{|\boldsymbol{D}|}$$

其中

$$G(y_j)=\int_0^x y_j(\tau)\mathrm{e}^{-\int_\tau^x(v+\mu_j(\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau;\ j=3,4$$

$k_{11}=\lambda_3 d_{31}w_3$, $k_{12}=\lambda_3 d_{32}w_3$,
$k_{13}=\lambda_3 d_{33}w_3$, $k_{14}=k_{15}=\lambda_3 d_{31}$,
$k_{21}=\lambda_4 d_{31}w_4$, $k_{22}=\lambda_4 d_{32}w_4$,
$k_{23}=\lambda_4 d_{33}w_4$, $k_{24}=k_{25}=\lambda_4 d_{31}$

取

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & \tilde{G} & k_{15}\varphi_4(\tau) \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24}\varphi_3(\tau) & \hat{G} \end{pmatrix}$$

其中

$$\tilde{G}=k_{14}\varphi_3(\tau)+G(y_3)$$
$$\hat{G}=k_{25}\varphi_4(\tau)+G(y_4)$$

因此$\boldsymbol{A}$的预解式为

$$R(v;\boldsymbol{A})=(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{D}|}$$

将$(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$中$\sigma_j$、$\varphi(y_j)$、$W_j$、$G(y_j)$,$\boldsymbol{D}$含有$\mu_j(x)$变为$\mu_{n_j}(x)$得到$(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_n)^{-1}$,相应的$\sigma_j$、$\varphi(y_j)$、$W_j$、$G(y_j)$、$|\boldsymbol{D}|$记为$\sigma_{n_j}$、$\varphi(y_{n_j})$、$W_{n_j}$、$G(y_{n_j})$、$|\boldsymbol{D}_n|$,$\boldsymbol{H}$记为$\boldsymbol{H}_n$,得到

$$R(v,\boldsymbol{A}_n)=(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_n)^{-1}=\frac{\boldsymbol{H}_n}{|\boldsymbol{D}_n|}$$

现在来证明系统修复率的逼近,只要证明$R(v,\boldsymbol{A}_n)\boldsymbol{y}\rightarrow R(\boldsymbol{v},\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$.

即证明

$$\frac{\boldsymbol{H}_n}{|\boldsymbol{D}_n|}\rightarrow\frac{\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{D}|}\quad(n\rightarrow\infty)$$

且$\frac{\boldsymbol{H}_n}{|\boldsymbol{D}_n|}\to\frac{\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{D}|}(n\to\infty)\Leftrightarrow\boldsymbol{H}_n\to\boldsymbol{H}$，$|\boldsymbol{D}_n|\to|\boldsymbol{D}|$且$|\boldsymbol{D}_n|\,|\boldsymbol{D}|\neq 0$，所以$|\boldsymbol{D}|\neq 0$，同理$|\boldsymbol{D}_n|\neq 0$，因为$|\boldsymbol{D}|$有界，所以$|\boldsymbol{D}_n|$有界，$|\boldsymbol{D}|$为$\sigma_j$的线性表示，$\sigma_j$中含有$\mu_j(x)$.

要证明$|\boldsymbol{D}_n|\to|\boldsymbol{D}|(n\to\infty)$，只需证明

$$\sigma_{n_j}\to\sigma_j(n\to\infty)$$

考虑

$$\begin{aligned}|\sigma_{n_j}-\sigma_j|&=\left|\int_0^\infty\mu_{n_j}(x)e^{-\int_0^x(v+\mu_{n_j}(\xi))d\xi}dx-\int_0^\infty\mu_j(x)e^{-\int_0^x(v+\mu_j(\xi))d\xi}dx\right|=\\&\left|\int_0^\infty[\mu_{n_j}(x)-\mu_j(x)]e^{-vx-\int_0^x\mu_j(\xi)d\xi}dx+\int_0^\infty\mu_{n_j}(x)e^{-vx-\int_0^x\mu_{n_j}(\xi)d\xi}-\int_0^\infty\mu_{n_j}(x)e^{-vx-\int_0^x\mu_j(\xi)d\xi}dx\right|\leqslant\\&\int_0^x|\mu_{n_j}(x)-\mu_j(x)|e^{-vx-\int_0^x\mu_{n_j}(\xi)d\xi}dx+\int_0^\infty\mu_{n_j}(x)\left|e^{-vx-\int_0^x\mu_j(\xi)d\xi}-e^{-vx-\int_0^x\mu_{n_j}(\xi)d\xi}\right|dx\end{aligned}$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}|\sigma_{n_j}|=|\sigma_j|$$

即

$$\lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{D}_n|=|\boldsymbol{D}|$$

证明$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{H}_n=\boldsymbol{H}$只需证明相应元素逼近，即

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(y_{n_j})=\varphi(y_j)$$
$$\lim_{n\to\infty}W_{n_j}=W_j$$
$$\lim_{n\to\infty}G(y_{n_j})=G(y_j)$$

$$|W_{n_j}-W_j|=\left|e^{-\int_0^x(v+\mu_{n_j}(\xi))d\xi}-e^{-\int_0^x(v+\mu_j(\xi))d\xi}\right|\leqslant e^{-vx}\int_0^x|\mu_{n_j}(\xi)-\mu_j(\xi)|d\xi\to 0$$

$$\begin{aligned}|G(y_{n_j})-G(y_j)|&=\left|\int_0^x e^{-\int_\tau^x(v+\mu_{n_j}(\xi))d\xi}d\tau-\int_0^x e^{-\int_\tau^x(v+\mu_j(\xi))d\xi}d\tau\right|\leqslant\\&\int_0^x e^{-v(x-\tau)}\int_0^x|\mu_{n_j}(\xi)-\mu_j(\xi)|d\xi d\tau\to 0(n\to\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\varphi(y_{n_j})-\varphi(y_j)|&=\left|\int_0^\infty\int_0^x\mu_{n_j}(\xi)e^{-\int_\tau^x(v+\mu_{n_j}(\xi))d\xi}d\tau dx-\int_0^\infty\int_0^x\mu_j(\xi)e^{-\int(v+\mu_j(\xi))d\xi}d\tau dx\right|\leqslant\\&\int_0^\infty\int_0^x e^{-v(x-\tau)}\left|\mu_{n_j}(x)e^{-\int_\tau^x\mu_{n_j}(\xi)d\xi}-\mu_j(x)e^{-\int_\tau^x\mu_j(\xi)d\xi}\right|d\tau dx\leqslant\\&\int_0^\infty\int_0^x e^{-v(x-\tau)}|\mu_{n_j}(x)-\mu_j(x)|e^{-\int_\tau^x\mu_j(\xi)d\xi}d\tau dx+\\&\int_0^\infty\int_0^x e^{-v(x-\tau)}\mu_j(x)\int_0^x|\mu_{n_j}(x)-\mu_j(x)|d\xi d\tau dx\to 0\end{aligned}$$

综上所述，$|\boldsymbol{H}_n|\to|\boldsymbol{H}|(n\to\infty)$. 亦即$\frac{|\boldsymbol{H}_n|}{|\boldsymbol{D}_n|}\to\frac{|\boldsymbol{H}|}{|\boldsymbol{D}|}(n\to\infty)$.

即

$$R(v;\boldsymbol{A}_n)\boldsymbol{y}\to R(v;\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}\ (n\to\infty)$$

由$\boldsymbol{T}(t)$是$\boldsymbol{A}$生成的收缩C_0半群，即$\|\boldsymbol{T}(t)\|\leqslant 1$，也就是说$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{G}(1,0)$. 同理可证$\boldsymbol{T}_n(t)$是$\boldsymbol{A}_n$生成的收缩$C_0$半群，即$\boldsymbol{A}_n\in\boldsymbol{G}(1,0)$. 最后由 Trotter 逼近定理可知对每一$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{X}$和$t\geqslant 0$，当$n\to\infty$时$\boldsymbol{T}_n(t)\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{y}$.

这样就证明了系统动态解的逼近.

4　数值模拟

下面利用数值计算方法，对上述结果进行数值模拟，以期待验证理论结果的正确性，并以此说明上述离散化方法的合理性.

为此假设故障率和修复率为常数，即$\lambda_j=\lambda_c=\lambda(j=1,2,3,4)$，$\mu_d=\mu_3(x)=\mu_4(x)=\mu$. 并令

$$\int_0^\infty p_j(x,t)dx=p_j(t);\ j=3,4$$

则系统(Ⅰ)转化为一个常微分方程组(Ⅱ)：

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-m_0p_0(t)+\mu_dp_1(t)+\sum_{j=3}^4\mu_{n_j}(x)p_j(t)\tag{19}$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt}=-m_1p_1(t)+\lambda_1p_0(t)\tag{20}$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt}=-m_2p_2(t)+\lambda_cp_0(t)+\lambda_cp_1(t)\tag{21}$$

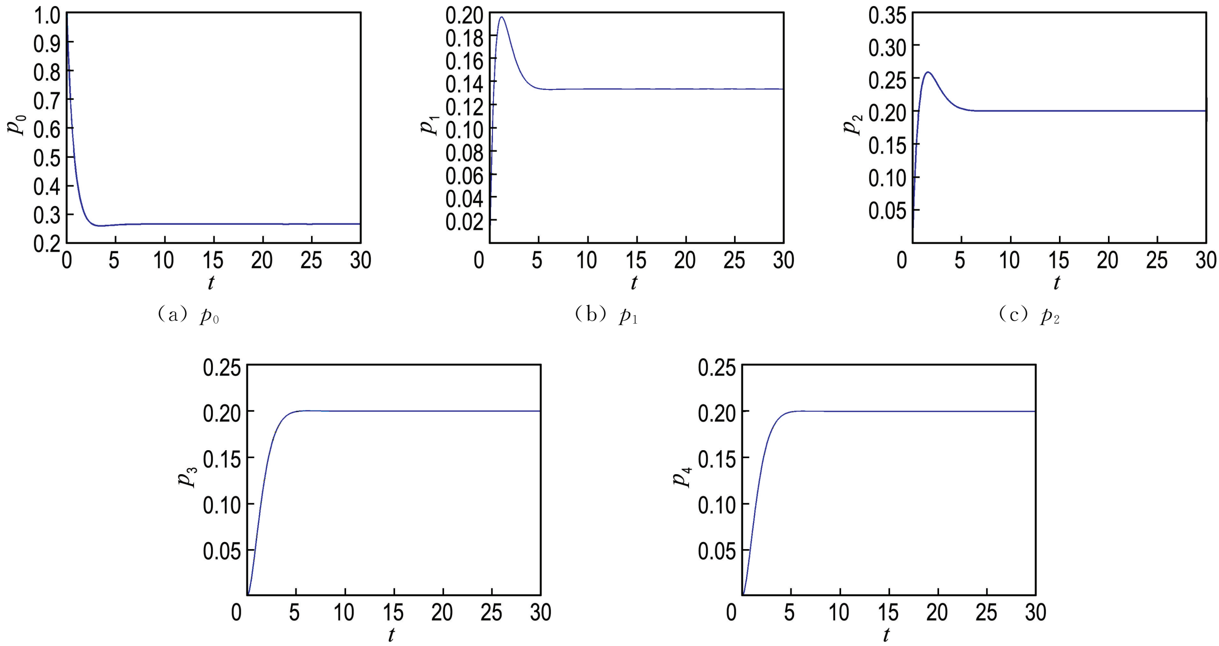
$$\frac{dp_3(t)}{dt}=\lambda_3p_2(t)-\mu_{n_3}(x)p_3(t)\tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_4(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda_4 p_2(t)-\mu_{n_4}(x)p_4(t) \tag{23}$$

$$p_0(0)=1,p_j(0)=0;\ j=1,2,3,4 \tag{24}$$

记 $m_0=\lambda_1+\lambda_c$，$m_1=\lambda_2+\mu_d$，$m_2=\lambda_3+\lambda_4$.

下面用 Matlab 数学软件求常微分方程组的数值解，此时令 $\lambda=0.5$，$\mu=0.5$，其结果如图 2 所示.



(a) p_0　(b) p_1　(c) p_2　(d) p_3　(e) p_4

图 2　系统Ⅰ的数值解($\mu_3(x)=\mu_4(x)=$常数)

Fig. 2　Numerical solution of System Ⅰ ($\mu_3(x)=\mu_4(x)=const$)

由以上模拟图形可以看出系统动态解是存在的. 这与以上证得的结论是相符的，从而也说明了半离散化方法应用于该模型是合理的.

5　结　语

本文通过半离散逼近算法将具有两种修复方法的复杂可修复系统模型进行合理离散并运用 Trotter 逼近定理加以证明. 同时在假设故障率和修复率为常数的前提下利用数值计算的方法对该模型进行数值模拟，得到了该系统的数值解，并给出了相应的数值模拟图，从而更有效地利用计算机寻求数学问题近似解，更好地解决数学问题.

参考文献：

[1] GUPUR G. Asymptotic stability of the time-dependent solution of a reliability system [J]. **Acta Analysis Functionalis Applicata**, 2005, **7**(4): 219-316.

[2] LI Wei, CAO Jinhua. Some performance measures of transfer line consisting of two unreliable machines with reprocess rule [J]. **Journal of Systems Science and Systems Engineering**, 1998, **7**(3): 283-292.

[3] CHUNG Who-kee. A reliability analysis of a k-out-of-N: G redundant system with the presence of chance common-cause shock failures [J]. **Microelectronics Reliability**, 1992, **32**(10): 1395-1399.

[4] DHILLON B S. Availability analysis of systems with two types of repair facilities [J]. **Microelectronics Reliability**, 1980, **20**(5): 679-686.

[5] 张玉峰，乔　兴. 在常规故障和临界人为错误条件下具有易损坏储备部件复杂系统的可靠性分析[J]. 数学的实践与认识, 2005, **35**(7): 195-206.

ZHANG Yufeng, QIAO Xing. Reliability analysis of a complex system with a deteriorating standby unit under common-cause failure and critical human error [J]. **Mathematics in Practice and Theory**, 2005, **35**(7): 195-206. (in Chinese)

[6] 赵玉荣，乔　兴，金雪梅. 有两种修复方法的复杂可修复系统解的渐近稳定性[J]. 数学的实践与认识，2008，**38**(22)：154-163.
ZHAO Yurong，QIAO Xing，JIN Xuemei. The asymptotic stability of the solution of a complex repairable system with two types of repair facilities [J]. **Mathematics in Practice and Theory**，2008，**38**(22)：154-163. (in Chinese)

[7] 周　莉，王伟华，张　敬. 两相同部件冷贮备可修系统半离散化的研究[J]. 数学的实践与认识，2012，**42**(5)：127-132.
ZHOU Li，WANG Weihua，ZHANG Jing. The study on semi-dispersed algorithm of asymptotic stability of a cold standby repairable system [J]. **Mathematics in Practice and Theory**，2012，**42**(5)：127-132. (in Chinese)

[8] 陶有德，路振国，范琳琳，等. 一类可修复计算机系统的数值计算[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版)，2013，**26**(4)：493-495.
TAO Youde，LU Zhenguo，FAN Linlin，*et al*. The numerical calculation of a repairable computer system [J]. **Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition)**，2013，**26**(4)：493-495. (in Chinese)

[9] DAZY A. 线性算子半群及对偏微分方程的应用[M]. 黄发伦，郑　权，译. 成都：四川大学出版社，1988.
DAZY A. **Semigroups of Linear Operators and Their Applications to Partial Differential Equations** [M]. HUANG Falun，ZHENG Quan，trans. Chengdu：Sichuan University Press，1988. (in Chinese)

[10] 徐厚宝，郭卫华，于景元，等. 一类串联可修复系统的稳态解[J]. 应用数学学报，2006，**29**(1)：46-52.
XU Houbao，GUO Weihua，YU Jingyuan，*et al*. The asymptotic stability of a series repairable system [J]. **Acta Mathematicae Applicatae Sinica**，2006，**29**(1)：46-52. (in Chinese)

[11] 张恭庆，郭懋正. 泛函分析讲义[M]. 北京：北京大学出版社，1990.
ZHANG Gongqing，GUO Maozheng. **Functional Analysis** [M]. Beijing：Beijing University Press，1990. (in Chinese)

Study of solution of repairable system with two types of repair facilities

ZHOU Li*，LU Xuejuan，WANG Weihua

(College of Science，Qiqihar University，Qiqihar 161006，China)

Abstract：The semi-discrete algorithm is applied to the repairable system with two types of repair facilities，the repairable rate in $[0, x_0]$ is discretized and the semi-discrete model of the system is acquired. Furthermore，by using the operator semi-group theory in functional analysis，the semi-discrete partial differential equation is transformed to the abstract Cauchy problems，i. e. the matrix ordinary differential equations. Then the solution of the matrix ordinary differential equations is proved to converge to the solution of the original equation according to Trotter approximate theorem. At last，because the failure rate and the repairable rate are constants，using Matlab the stability and the reliability of the system are proved and the numerical solution of the system is acquired，the corresponding graph trend is given. The results show that semi-discrete study of the repairable system model with two types of repair facilities can not only lay a theoretical foundation for the use of the computer for further numerical calculation，but also have practical value to analyze and study the reliability of the system.

Key words：repairable system；semi-discretization；convergence；numerical calculation