第57卷第4期
2017年7月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 57, No. 4
July 2017

文章编号：1000-8608(2017)04-0430-06

圈与路联图点可区别Ⅰ-全染色和点可区别Ⅵ-全染色

苗婷婷[1]，王治文[2]，陈祥恩[*1]

（1.西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070；
2.宁夏大学 数学计算机科学学院，宁夏 银川 750021）

摘要： 一个图 G 的Ⅰ-全染色是指若干种颜色对图 G 的全体顶点及边的一个分配使得任意两个相邻点及任意两条相邻边被分配到不同颜色．图 G 的Ⅵ-全染色是指若干种颜色对图 G 的全体顶点及边的一个分配使得任意两条相邻边被分配到不同颜色．对图 G 的一个Ⅰ(Ⅵ)-全染色及图 G 的任意一个顶点 x，用 $C(x)$ 表示顶点 x 的颜色及 x 的关联边的颜色构成的集合(非多重集)．如果 f 是图 G 的使用 k 种颜色的一个Ⅰ(Ⅵ)-全染色，并且 $\forall u,v\in V(G),u\neq v$，有 $C(u)\neq C(v)$，则称 f 为图 G 的 k-点可区别Ⅰ(Ⅵ)-全染色，或 k-VDITC(VDVITC)．图 G 的点可区别Ⅰ(Ⅵ)-全染色所需最少颜色数目，称为图 G 的点可区别Ⅰ(Ⅵ)-全色数．利用组合分析法及构造具体染色的方法，讨论了圈与路的联图 $C_m\vee P_n$ 的点可区别Ⅰ(Ⅵ)-全染色问题，确定了这类图的点可区别Ⅰ(Ⅵ)-全色数，同时说明了 VDITC 猜想和 VDVITC 猜想对于这类图是成立的．

关键词： Ⅰ-全染色；点可区别Ⅰ-全染色；点可区别Ⅰ-全色数；圈与路的联

中图分类号： O157.5　　**文献标识码：** A　　**doi：** 10.7511/dllgxb201704015

0　引　言

点可区别正常边染色、点可区别一般边染色以及点可区别正常全染色分别在文献[1-2]、[3-5]和[6-7]中被研究．文献[8]讨论了两类点可区别的未必正常的全染色：点可区别Ⅰ-全染色和点可区别Ⅵ-全染色．本文在文献[8]的基础上讨论圈与路的联图 $C_m\vee P_n$ 的点可区别Ⅰ-全染色和点可区别Ⅵ-全染色问题，确定这类图的点可区别Ⅰ-全色数和点可区别Ⅵ-全色数，且证明 VDITC 猜想和 VDVITC 猜想对 $C_m\vee P_n$ 是成立的．

1　准备工作

所谓图 G 的全染色是指若干种颜色对于图 G 的点及边的一个分配．

对于图 G 的一个全染色，如果任意两个相邻点有不同颜色，并且任意两条相邻边有不同颜色，那么称它为图 G 的Ⅰ-全染色．

对于图 G 的一个全染色，如果任意两条相邻边有不同颜色，那么称它为图 G 的Ⅵ-全染色．

对图 G 的任意一个Ⅰ-全染色或Ⅵ-全染色 f 以及图 G 的任意一个顶点 u，用 $C_f(u)$ 或 $C(u)$ 表示在 f 下点 u 的颜色以及与 u 关联的所有边的颜色构成的集合，即 $C(u)=\{f(uv)\mid uv\in E(G)\}\cup\{f(u)\}$．注意 $C(u)$ 不是多重集，显然有 $|C(u)|\leqslant d_G(u)+1$．令 $\overline{C}(u)$ 表示 $C(u)$ 在全体颜色构成的集合中的补集．

如果 f 是图 G 的使用颜色 $1,2,\cdots,k$ 的一个Ⅰ-全染色，并且 $\forall u,v\in V(G),u\neq v$，有 $C(u)\neq C(v)$，则称 f 为图 G 的 k-点可区别Ⅰ-全染色，或 k-VDITC．图 G 的点可区别Ⅰ-全染色所需最少颜色数目，称为图 G 的点可区别Ⅰ-全色数，记为 $\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(G)$，即 $\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(G)=\min\{k\mid G\text{ 有 }k\text{-VDITC}\}$．

如果 f 是图 G 的使用颜色 $1,2,\cdots,k$ 的一个Ⅵ-全染色，并且 $\forall u,v\in V(G),u\neq v$，有 $C(u)\neq C(v)$，则称 f 为图 G 的 k-点可区别Ⅵ-全染色，或 k-VDVITC．图 G 的点可区别Ⅵ-全染色所需最少颜色数目，称为图 G 的点可区别Ⅵ-全色数，记为

收稿日期： 2016-06-25；　**修回日期：** 2017-06-02．
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(61163037,61163054,11261046,61363060)；宁夏回族自治区百人计划资助项目．
作者简介： 苗婷婷(1991-)，女，硕士生，E-mail：miaotingting6130@163.com；陈祥恩*(1965-)，男，教授，硕士生导师，E-mail：chenxe@nwnu.edu.cn．

$\chi_{vt}^{VI}(G)$，即$\chi_{vt}^{VI}(G)=\min\{k|G$ 有 k-VDVITC$\}$.

文献[8]讨论了完全图、完全二部图、扇、轮、双星、路、圈、两个阶相同的圈的联、阶 n 为偶数的完全图去掉$\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor$条能构成为一个匹配的边后所得图的点可区别Ⅰ-全染色和点可区别Ⅵ-全染色，并提出了如下 VDITC 猜想和 VDVITC 猜想.

对于图 G，令 n_i 表示度为 i 的顶点的数目，$\delta\leqslant i\leqslant\Delta$，假设 $\zeta(G)=\min\left\{l\left|\binom{l}{i}+\binom{l}{i+1}+\binom{l}{i+2}+\cdots+\binom{l}{i+s}+\binom{l}{i+s+1}\geqslant n_i+n_{i+1}+n_{i+2}+\cdots+n_{i+s},\delta\leqslant i\leqslant i+s\leqslant\Delta,s\geqslant0\right.\right\}$.

猜想 1[8]　(**VDITC** 猜想)　$\chi_{vt}^{I}(G)=\zeta(G)$ 或 $\zeta(G)+1$.

猜想 2[8]　(**VDVITC** 猜想)　$\chi_{vt}^{VI}(G)=\zeta(G)$ 或 $\zeta(G)+1$.

引理 1　对于任意图 G，如果存在两个 Δ(最大度)顶点，则$\chi_{vt}^{I}(G)\geqslant\Delta+1$.

引理 2[8]　$\chi_{vt}^{I}(G)\geqslant\zeta(G)$.

引理 3[8]　如果存在正整数 r，$\delta\leqslant r\leqslant\Delta$，且 G 没有度为 r 的顶点，则 $\zeta(G)=\min\left\{l\left|\binom{l}{i}+\binom{l}{i+1}+\cdots+\binom{l}{i+s}+\binom{l}{i+s+1}\geqslant n_i+n_{i+1}+\cdots+n_{i+s},\delta\leqslant i\leqslant i+s\leqslant r-1,s\geqslant0\right.\right.$；或 $\left.r+1\leqslant i\leqslant i+s\leqslant\Delta,s\geqslant0\right\}$.

引理 4[8]　如果对于图 G 的任意两个不同的顶点 u 和 v，$d_u\neq d_v+1$，$d_v\neq d_u+1$，则 $\zeta(G)=\min\left\{l\left|\binom{l}{i}+\binom{l}{i+1}\geqslant n_i,\delta\leqslant i\leqslant\Delta\right.\right\}$.

命题 1　$\zeta(G)\leqslant\chi_{vt}^{VI}(G)\leqslant\chi_{vt}^{I}(G)$.

假设 $p\in\mathbf{Z}$，而 q 为正整数，用$(p)_q$ 表示$\{1,2,\cdots,q\}$中的模 q 同余于 p 的那个数，即$(p)_q\in\{1,2,\cdots,q\}$且$(p)_q\equiv p(\bmod q)$.

令 $V(C_m\vee P_n)=\{u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_n\}$，$E(C_m\vee P_n)=\{u_1u_2,u_2u_3,\cdots,u_{m-1}u_m,u_mu_1,v_1v_2,v_2v_3,\cdots,v_{n-1}v_n\}\cup\{u_iv_j\mid i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$.

2　主要结果

定理 1　设 $C_m\vee P_n$ 是圈 C_m 和路 P_n 的联，$m>n\geqslant2$，则$\chi_{vt}^{I}(C_m\vee P_n)=\begin{cases}m+2,n=2,3;\\m+3,n\geqslant4.\end{cases}$

证明　当 $n=2,m=3$ 时，$C_3\vee P_2$ 有 5 个 $m+1$ 度的点，有 5-VDITC f，其染色方式很容易得到.

当 $n=2,m\geqslant4$ 时，$C_m\vee P_2$ 有两个 $m+1$ 度的点，m 个 4 度点，由引理 1 知，$\chi_{vt}^{I}(C_m\vee P_2)\geqslant m+2$，只需给出 $C_m\vee P_2$ 的一个$(m+2)$-点可区别Ⅰ-全染色 f. 令

$f(u_iv_j)=i+j$，$f(u_iv_j)\in\{2,\cdots,m+2\}$，$1\leqslant i\leqslant m,j=1,2$；
$f(u_iu_{i+1})=i,i\in\{2,\cdots,m-1\}$；
$f(u_1u_2)=m+2,f(u_mu_1)=1,f(v_1v_2)=1$，
$f(v_1)=1,f(v_2)=3,f(u_1)=2$；
$f(u_i)=i+2,i\in\{2,\cdots,m\}$

最终得到的上述全染色是Ⅰ-全染色，并且在此染色下有

$C(v_1)=\{1,2,3,\cdots,m+1\}$，$C(v_2)=\{1,3,4,\cdots,m+1,m+2\}$；$C(u_i)=\{i-1,i,i+1,i+2\}$，$i\in\{3,\cdots,m-1\}$；$C(u_1)=\{1,2,3,m+2\}$，$C(u_2)=\{2,3,4,m+2\}$，$C(u_m)=\{m-1,m+1,m+2,1\}$

$\overline{C}(v_1)=\{m+2\}$，$\overline{C}(v_2)=\{2\}$

可见 $m+2$ 个点的色集合彼此互异，故上述Ⅰ-全染色是点可区别的.

当 $n=3,m=4$ 时，$C_4\vee P_3$ 有 1 个 $m+2$ 度的点，有 6-VDITC f，当 $n=3,m=5$ 时，$C_5\vee P_3$ 有 1 个 $m+2$ 度的点，有 7-VDITC f，它们的染色方式容易得到，文中不详细写出.

当 $n=3,m\geqslant6$ 时，显然$\chi_{vt}^{I}(C_m\vee P_3)\geqslant\Delta(C_m\vee P_3)=m+2$. 因为 $C_m\vee P_3$ 有 1 个 $m+2$ 度点，两个 $m+1$ 度点，m 个 5 度点，而 $m+2$ 种色有 1 个$(m+2)$-子集，$m+2$ 个$(m+1)$-子集，$\binom{m+2}{5}$个 5-子集，$\binom{m+2}{6}$个 6-子集，$m+2+1>3=n$，$\binom{m+2}{5}+\binom{m+2}{6}>m$，故由引理 3 计算出 $\zeta(C_m\vee P_3)=m+2$. 下面给出 $C_m\vee P_3$ 的一个$(m+2)$-点可区别Ⅰ-全染色 f. 令

$f(u_iv_j)=(i+j)_{m+2}$，
$f(u_iv_j)\in\{1,\cdots,m+2\},1\leqslant i\leqslant m,j=1,2,3$；
$f(u_iu_{i+1})=i,i\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，
$f(u_mu_1)=m,f(v_1v_2)=1,f(v_2v_3)=2$；
$f(v_1)=1,f(v_2)=2,f(v_3)=4,f(u_1)=3$，
$f(u_m)=m+1,f(u_i)=i+3,i\in\{2,\cdots,m-1\}$

最终得到的上述全染色是Ⅰ-全染色，并且在此染色下有

$C(v_1)=\{1,2,3,\cdots,m+1\}$，$C(v_2)=\{1,2,3,\cdots,m+1,m+2\}$，$C(v_3)=\{1,2,4,5,\cdots,m+1,m+2\}$；$C(u_i)=\{i-1,i,i+1,i+2,i+3\}$，$i\in\{2,\cdots,m-1\}$，$C(u_1)=\{1,2,3,4,m\}$，$C(u_m)=\{m-1,m,m+1,m+2,1\}$

$\overline{C}(v_1)=\{m+2\}$，$\overline{C}(v_2)=\varnothing$，$\overline{C}(v_3)=\{3\}$

可见 $m+3$ 个点的色集合彼此互异，故上述Ⅰ-全染色是点可区别的.

当 $n\geqslant 4$ 时有以下两种情形需要考虑.

情形1　$m\geqslant n+2$

由引理3得 $\zeta(C_m\vee P_n)=\min\left\{l\,\middle|\,\binom{l}{n+2}+\binom{l}{n+3}\geqslant m,\ \binom{l}{m+2}+\binom{l}{m+3}\geqslant n-2,\ \binom{l}{m+1}+\binom{l}{m+2}\geqslant 2,\ \binom{l}{m+1}+\binom{l}{m+2}+\binom{l}{m+3}\geqslant n\right\}=m+3$，因为 $n\geqslant 4$，当 $l=m+2$ 时 $\binom{l}{m+2}+\binom{l}{m+3}=1<n-2$，所以 $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(C_m\vee P_n)\geqslant\zeta(C_m\vee P_n)=m+3$. 现在只需证明 $C_m\vee P_n$ 有一个 $(m+3)$-VDITC f. 令

$f(u_iv_j)=(i+j)_{m+1}$，$f(u_iv_j)\in\{1,2,\cdots,m+1\}$，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$；

$f(v_jv_{j+1})=m+2$，$j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，且 j 是奇数；$f(v_jv_{j+1})=m+3$，$j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，且 j 是偶数

$f(u_iu_{i+1})=(i-1)_{m+1}$，$i\in\{1,2,\cdots,m-1\}$；$f(u_mu_1)=m$

$f(u_i)=i+1$，$f(u_i)\in\{2,\cdots,m+1\}$，$1\leqslant i\leqslant m$

$f(v_j)=m+2$，$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，且 j 是奇数；$f(v_j)=m+3$，$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，且 j 是偶数

最终得到的上述全染色是Ⅰ-全染色，并且在此染色下有

$C(u_i)=\{i+1,(i+2)_{m+1},\cdots,(i+n)_{m+1},i-1,(i-2)_{m+1}\}$，$i\neq 1,m$；$C(u_1)=\{2,3,\cdots,n+1,m+1,m\}$，$C(u_m)=\{m+1,1,2,\cdots,n-1,m-2,m\}$，$C(v_j)=\{j+1,(j+2)_{m+1},\cdots,(j+m)_{m+1},m+2,m+3\}$，$j\neq 1$；$C(v_1)=\{2,3,\cdots,m+1,m+2\}$

$\overline{C}(v_j)=\{j\}$，$j\in\{2,\cdots,n\}$；$\overline{C}(v_1)=\{1,m+3\}$

可见 $m+n$ 个点的色集合彼此互异，故上述Ⅰ-全染色是点可区别的.

情形2　$m=n+1$

由 $\zeta(C_m\vee P_n)=\min\left\{l\,\middle|\,\binom{l}{m+1}+\binom{l}{m+2}\geqslant m,\ \binom{l}{m+2}+\binom{l}{m+3}\geqslant m-3,\ \binom{l}{m+1}+\binom{l}{m+2}\geqslant 2,\ \binom{l}{m+1}+\binom{l}{m+2}+\binom{l}{m+3}\geqslant 2m-1\right\}=m+3$，因为此时 $m\geqslant 5$，当 $l=m+2$ 时，$\binom{l}{m+2}+\binom{l}{m+3}=1<m-3$，$\binom{l}{m+1}+\binom{l}{m+2}+\binom{l}{m+3}=m+3<2m-1$，所以得 $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(C_m\vee P_n)\geqslant\zeta(C_m\vee P_n)=m+3$. 现在只需证明 $C_m\vee P_n$ 有一个 $(m+3)$-VDITC f. 令

$f(u_iv_j)=(i+j)_{m+1}$，$f(u_iv_j)\in\{1,2,\cdots,m+1\}$，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$；

$f(u_iu_{i+1})=m+2$，$i\in\{2,3,\cdots,m-1\}$，且 i 是奇数；$f(u_iu_{i+1})=m+3$，$i\in\{2,3,\cdots,m-1\}$，且 i 是偶数；当 m 是偶数时，$f(u_mu_1)=m+3$，$f(u_1u_2)=m+2$；当 m 是奇数时，$f(u_mu_1)=m+2$，$f(u_1u_2)=1$

$f(v_jv_{j+1})=m+2$，$j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，且 j 是奇数；$f(v_jv_{j+1})=m+3$，$j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，且 j 是偶数

$f(u_i)=i+1$，$f(u_i)\in\{2,\cdots,m+1\}$，$1\leqslant i\leqslant m$

$f(v_j)=m+2$，$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，且 j 是奇数；$f(v_j)=m+3$，$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，且 j 是偶数

最终得到的上述全染色是Ⅰ-全染色，并且在此染色下有

$C(u_i)=\{i+1,(i+2)_{m+1},\cdots,(i+n)_{m+1},m+2,m+3\}$，$i\neq 1,2$；当 m 为偶数时，$C(u_1)=\{2,3,\cdots,m,m+2,m+3\}$，$C(u_2)=\{3,4,\cdots,m+1,m+2,m+3\}$；当 m 为奇数时，$C(u_1)=\{2,3,\cdots,m,m+2,1\}$，$C(u_2)=\{3,4,\cdots,m+1,m+3,1\}$；$C(v_j)=\{j+1,(j+2)_{m+1},\cdots,(j+m)_{m+1},m+2,m+3\}$，$j\neq 1$；$C(v_1)=\{2,3,\cdots,m+1,m+2\}$

$\overline{C}(v_j)=\{j\}$，$j\in\{2,\cdots,n\}$；$\overline{C}(v_1)=\{1,m+3\}$

当 m 为奇数时，n 为偶数，$\overline{C}(u_i)=\{i-1,i\}$，$i\in\{3,4,\cdots,m\}$；$\overline{C}(u_1)=\{m+1,m+3\}$，$\overline{C}(u_2)=\{2,m+2\}$

当 m 为偶数时，n 为奇数，$\overline{C}(u_i)=\{(i-1)_{m+1},i\}$，$i\in\{1,2,\cdots,m\}$

可见 $m+n$ 个点的色集合彼此互异，故上述Ⅰ-全染色是点可区别的.

定理 2　设 $C_m\vee P_n$ 是圈 C_m 和路 P_n 的联，$n>m\geqslant 3$，则 $\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(C_m\vee P_n)=n+3$.

证明　由引理得 $\zeta(C_m\vee P_n)=\min\left\{l \,\middle|\, \binom{l}{n+2}+\binom{l}{n+3}\geqslant m, \binom{l}{m+2}+\binom{l}{m+3}\geqslant n-2, \binom{l}{m+1}+\binom{l}{m+2}\geqslant 2, \binom{l}{m+1}+\binom{l}{m+2}+\binom{l}{m+3}\geqslant n\right\}=n+3$，因为当 $l=n+2$ 时 $\binom{l}{n+2}+\binom{l}{n+3}=1<m$，所以 $\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(C_m\vee P_n)\geqslant\zeta(C_m\vee P_n)=n+3$. 现在只需证明 $C_m\vee P_n$ 有一个 $(n+3)$-VDITC f. 有两种情形需要考虑.

情形 1　$m\equiv 0 \pmod 2$. 令

$f(u_iv_j)=(i+j-1)_{n+1}$，$f(u_iv_j)\in\{1,2,\cdots,n+1\}$，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$

$f(v_jv_{j+1})=n+2$，$j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，且 j 是奇数；$f(v_jv_{j+1})=n+3$，$j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，且 j 是偶数

$f(u_iu_{i+1})=n+2$，$i\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，且 i 是奇数；$f(u_iu_{i+1})=n+3$，$i\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，且 i 是偶数；$f(u_mu_1)=n+3$

$f(u_i)=i$，$f(u_i)\in\{1,2,\cdots,m\}$，$1\leqslant i\leqslant m$

$f(v_j)=n+2$，$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，且 j 是奇数；$f(v_j)=n+3$，$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，且 j 是偶数

最终得到的上述全染色是Ⅰ-全染色，并且在此染色下有

$C(u_i)=\{i,i+1,(i+2)_{n+1},\cdots,(i+n-1)_{n+1},n+2,n+3\}$，$1\leqslant i\leqslant m$；$C(v_j)=\{j,j+1,(j+2)_{n+1},\cdots,(j+m-1)_{n+1},n+2,n+3\}$，$j\neq 1$；$C(v_1)=\{1,2,3,\cdots,m,n+2\}$

$\overline{C}(u_i)=\{(i-1)_{n+1}\}$，$i\in\{1,2,\cdots,m\}$

可见 $m+n$ 个点的色集合彼此互异，故上述Ⅰ-全染色是点可区别的.

情形 2　$m\equiv 1 \pmod 2$. 令

$f(u_iv_j)=(i+j-1)_{n+1}$，$f(u_iv_j)\in\{1,2,\cdots,n+1\}$，$1\leqslant i\leqslant m-1$，$1\leqslant j\leqslant n$；$f(u_mv_j)=(i+j+2)_{n+2}$，$1\leqslant j\leqslant n$

$f(v_jv_{j+1})=n+3$，$j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，且 j 是奇数；$f(v_jv_{j+1})=n+2$，$j\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，且 j 是偶数

$f(u_iu_{i+1})=n+2$，$i\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，且 i 是奇数；$f(u_iu_{i+1})=n+3$，$i\in\{1,2,\cdots,m-1\}$，且 i 是偶数；$f(u_mu_1)=n+1$

$f(u_i)=i$，$f(u_i)\in\{1,2,\cdots,m\}$，$1\leqslant i\leqslant m$

$f(v_j)=n+3$，$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，且 j 是奇数；$f(v_j)=n+2$，$j\in\{1,2,\cdots,n\}$，且 j 是偶数

最终得到的上述全染色是Ⅰ-全染色，并且在此染色下有

$C(u_i)=\{i,i+1,(i+2)_{n+1},\cdots,(i+n-1)_{n+1},n+2,n+3\}$，$i\neq 1,m$；$C(u_1)=\{1,2,\cdots,n,n+1,n+2\}$，$C(u_m)=\{1,2,\cdots,n-1,n+1,n+2,n+3\}$；$C(v_j)=\{j,j+1,(j+2)_{n+1},\cdots,(j+m-2)_{n+1},j-1,n+2,n+3\}$，$j\neq 1$；$C(v_1)=\{1,2,\cdots,m-1,n+2,n+3\}$

$\overline{C}(u_i)=\{i-1\}$，$i\neq 1,m$；$\overline{C}(u_1)=\{n+3\}$，$\overline{C}(u_m)=\{n\}$

可见 $m+n$ 个点的色集合彼此互异，故上述Ⅰ-全染色是点可区别的.

因此，不管哪种情形所得到的染色 f 都是 $C_m\vee P_n$ 的一个 VDITC.

定理 3　设 $C_n\vee P_n$ 是路 C_n 和圈 P_n 的联，$n\geqslant 3$，则 $\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(C_n\vee P_n)=\begin{cases}n+3, n=3,4;\\ n+4, n\geqslant 5.\end{cases}$

证明　由引理得 $\zeta(C_n\vee P_n)=\min\left\{l \,\middle|\, \binom{l}{n+2}+\binom{l}{n+3}\geqslant 2n-2, \binom{l}{n+1}+\binom{l}{n+2}\geqslant 2, \binom{l}{n+1}+\binom{l}{n+2}+\binom{l}{n+3}\geqslant 2n\right\}$. 则当 $3\leqslant n\leqslant 6$ 时，$\zeta(C_n\vee P_n)=n+3$；当 $n\geqslant 7$ 时，$\zeta(C_n\vee P_n)=n+4$.

$C_3\vee P_3$、$C_4\vee P_4$ 的 VDITC 很容易得到，文中略去.

当 $n=5$ 时，$\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(C_5\vee P_5)\geqslant n+3=8$.

假如 $C_5\vee P_5$ 存在 8-VDITC g，使用的颜色为 $1,2,\cdots,8$. 在 8 个点(最大度)$u_1,\cdots,u_5,v_2,v_3,v_4$ 中至少有 7 个顶点 $x_1,x_2,\cdots,x_7$ 它们的色集合为 7-子集，不妨设 $\overline{C}(x_i)=i$，$i=1,2,\cdots,7$，即点 x_i 的色以及其关联边的色都不是 i，$i=1,2,\cdots,7$. 仅考虑正常边的染色的情况，可以看出颜色 i 最多染了 $C_5\vee P_5$ 的 4 条边，$i=1,2,\cdots,7$，而颜色 8 最多染了 $C_5\vee P_5$ 的 5 条边，因此 8 种色最多染了图 $C_5\vee P_5$ 的 $7\times 4+1\times 5=33$ 条边，而 $C_5\vee P_5$ 共有 34 条边，矛盾. 对于 $C_5\vee P_5$ 无 8-VDVITC，

证明完全相同.

故$\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(C_5 \vee P_5) \geq 9$,且$C_5 \vee P_5$的一个9-VDITC很容易得到,文中不详细给出.

当$n=6$时,$\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(C_6 \vee P_6) \geq n+3=9$.

假如$C_6 \vee P_6$具有9-VDITC g,使用的颜色为$1,2,\cdots,9$.由于$d(u_i)=d(v_j)=8, i=1,2,\cdots,6, j=2,3,\cdots,5$,这10个点的色集合里至少含8种色,但是$\{1,2,\cdots,9\}$的至少含8种色的子集合共有10个:$\{1,2,\cdots,9\}, \overline{\{i\}}, i=1,2,\cdots,9$.因此$\{C(u_i) \mid i=1,2,\cdots,6\} \cup \{C(v_j) \mid j=2,3,\cdots,5\}=\{\overline{\{1\}}, \overline{\{2\}}, \cdots, \overline{\{9\}}, \overline{\varnothing}\}$,每种色最多染了5条边,故9种色共染了最多45条边.但该图共有47条边,矛盾.对于$C_6 \vee P_6$也不存在9-VDVITC,证明完全相同.

故$\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(C_6 \vee P_6) \geq 10$.下面给出$C_6 \vee P_6$的一个10-VDITC f.令

$f(u_i v_j)=(i+j)_{10}, f(u_i v_j) \in \{1,2,\cdots,10\}, 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6; f(u_5 v_6)=3$

$f(u_i u_{i+1})=(i-1)_{10}, i \in \{1,2,\cdots,5\}, f(u_6 u_1)=1; f(v_j v_{j+1})=j, j \in \{1,2,\cdots,5\}$

点u_i与v_j染其关联边的颜色,其中u_i染偶数色,v_j染奇数色,并且相邻点着不同色.特别地,$f(v_5)=1$.

最终得到的上述全染色是Ⅰ-全染色,并且在此染色下有

$C(u_i)=\{(i-2)_{10}, i-1, i+1, (i+2)_{10}, \cdots, (i+6)_{10}\}, i \in \{2,\cdots,5\}; C(u_1)=\{1,2,\cdots,7,10\}, C(u_6)=\{1,2,3,4,7,8,9,10\}, C(v_j)=\{j-1, j, j+1, (j+2)_{10}, \cdots, (j+6)_{10}\}, j \in \{2,3,4\}; C(v_1)=\{1,2,3,\cdots,6,7\}, C(v_5)=\{1,3,4,\cdots,10\}, C(v_6)=\{1,2,5,7,\cdots,10\}$

$\overline{C}(u_i)=\{(i-3)_{10}, i\}, i \in \{2,\cdots,5\}, \overline{C}(u_1)=\{8,9\}, \overline{C}(u_6)=\{5,6\}; \overline{C}(v_j)=\{(j-3)_{10}, (j-2)_{10}\}, j \in \{2,3,4\}, \overline{C}(v_1)=\{8,9,10\}, \overline{C}(v_5)=\{2\}, \overline{C}(v_6)=\{3,4,6\}$

可见12个点的色集合彼此互异,故上述Ⅰ-全染色是点可区别的.

当$n \geq 7$时,由引理得$\zeta(C_n \vee P_n)=\min\left\{l \,\middle|\, \binom{l}{n+2}+\binom{l}{n+3} \geq 2n-2, \binom{l}{n+1}+\binom{l}{n+2} \geq 2, \binom{l}{n+1}+\binom{l}{n+2}+\binom{l}{n+3} \geq 2n\right\}=n+4$,因为当$l=n+3$时,$\binom{l}{n+2}+\binom{l}{n+3}=n+4<2n-2$,所以$\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(C_n \vee P_n) \geq \zeta(C_n \vee P_n)=n+4$.现在只需证明$C_n \vee P_n$有一个$(n+4)$-VDITC f.令

$f(u_i v_j)=(i+j-1)_{n+1}, f(u_i v_j) \in \{1,2,\cdots,n+1\}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$

$f(u_i u_{i+1})=n+2, i \in \{1,2,\cdots,n-1\}$,且$i$是奇数;$f(u_i u_{i+1})=n+3, i \in \{1,2,\cdots,n-1\}$,且$i$是偶数;当$n$为偶数时,$f(u_n u_1)=n+3$;当$n$为奇数时,$f(u_n u_1)=n+4$

$f(v_j v_{j+1})=n+4, j \in \{1,2,\cdots,n-1\}$,且$j$是奇数;$f(v_j v_{j+1})=n+3, j \in \{1,2,\cdots,n-1\}$,且$j$是偶数

$f(u_i)=i, 1 \leq i \leq n; f(v_j)=n+3, j \in \{1,2,\cdots,n\}$,且$j$是奇数;$f(v_j)=n+4, j \in \{1,2,\cdots,n\}$,且$j$是偶数

最终得到的上述全染色是Ⅰ-全染色,并且在此染色下有

$C(u_i)=\{i, i+1, (i+2)_{n+1}, \cdots, (i+n-1)_{n+1}, n+2, n+3\}, i \neq 1, n$;当$n$为偶数时,$C(u_1)=\{1,2,3,\cdots,n,n+2,n+3\}, C(u_n)=\{n,n+1,1,\cdots,n-2,n+2,n+3\}$;当$n$为奇数时,$C(u_1)=\{1,2,\cdots,n,n+2,n+4\}, C(u_n)=\{n,n+1,1,\cdots,n-2,n+3,n+4\}$

$C(v_j)=\{j, j+1, (j+2)_{n+1}, \cdots, (j+n-1)_{n+1}, n+4, n+3\}, j \neq n$;当$n$为奇数时,$C(v_n)=\{n,n+1,1,\cdots,n-2,n+3\}$;当$n$为偶数时,$C(v_n)=\{n,n+1,1,\cdots,n-2,n+4\}$

当n为奇数时,$\overline{C}(v_j)=\{(j-1)_{n+1}, n+2\}, j \in \{1,2,\cdots,n-1\}; \overline{C}(v_n)=\{n-1,n+2,n+4\}; \overline{C}(u_i)=\{i-1,n+4\}, i \in \{2,\cdots,n-1\}; \overline{C}(u_1)=\{n+1,n+3\}, \overline{C}(u_n)=\{n-1,n+2\}$

当n为偶数时,$\overline{C}(u_i)=\{(i-1)_{n+1}, n+4\}, i \in \{1,2,\cdots,n\}; \overline{C}(v_j)=\{(j-1)_{n+1}, n+2\}, j \in \{1,2,\cdots,n-1\}; \overline{C}(v_n)=\{n-1,n+2,n+3\}$.

可见$2n$个点的色集合彼此互异,故上述Ⅰ-全染色是点可区别的.

定理4 若图G是圈C_m与路P_n($m \geq 3, n \geq 2$)的联,则$\chi_{vt}^{\mathrm{VI}}(C_m \vee P_n)=\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(C_m \vee P_n)$.

由命题1知上述定理显然成立.

3 结 语

点可区别Ⅰ(Ⅵ)-全色数的确定和点可区别

正常全色数的确定一样，是困难的问题. 目前缺少有效的方法和有力的工具，已得到的相关结论很少，并且其研究主要集中在具体图上. 通过本文的讨论，可以看出 VDITC 猜想及 VDVITC 猜想对 $C_m \vee P_n(m\geqslant 3, n\geqslant 2)$ 是成立的：当 $n=5,6$ 时，$\chi_{vt}^{\mathrm{VI}}(C_n \vee P_n)=\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(C_n \vee P_n)=\zeta(C_n \vee P_n)+1$，而对其他的 $C_m \vee P_n$ 有 $\chi_{vt}^{\mathrm{VI}}(C_m \vee P_n)=\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(C_m \vee P_n)=\zeta(C_m \vee P_n)$. 以后将继续对圈和圈、圈和扇及圈和轮的联图的点可区别Ⅰ(Ⅵ)-全色数进行研究.

参考文献：

[1] BURRIS A C, SCHELP R H. Vertex-distinguish proper edge-colorings [J]. **Journal of Graph Theory**, 1997, **26**(2): 73-82.

[2] BAZGAN C, HARKAT-BENHAMDINE A, LI Hao, *et al*. On the vertex-distinguish proper edge-colorings of graphs [J]. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, 1999, **75**(2): 288-301.

[3] HARARY F, PLANTHOLT M. The point-distinguishing chromatic index [M] //HARARY F, MAYBEE J S, Eds. **Graphs and Application**. New York: Wiley Interscience, 1985: 147-162.

[4] HORŇÁK M, SALVI N Z. On the point-distinguishing chromatic index of complete bipartite graphs [J]. **Ars Combinatoria**, 2006, **80**: 75-85.

[5] CHEN Xiang'en. Point-distinguishing chromatic index of the union of paths [J]. **Czechoslovak Mathematical Journal**, 2014, **64**(3): 629-640.

[6] ZHANG Zhongfu, QIU Pengxiang, XU Baogen, *et al*. Vertex-distinguishing total colorings of graphs [J]. **Ars Combinatoria**, 2008, **87**: 33-45.

[7] CHEN Xiang'en, MA Yanrong. Vertex-distinguishing total colorings of $2C_n$ [J]. **Chinese Quarterly Journal of Mathematics**, 2013, **28**(3): 323-330.

[8] CHEN Xiang'en, LI Zepeng. Vertex-distinguishing Ⅰ-total colorings of graphs [J]. **Utilitas Mathematica**, 2014, **95**: 319-327.

Vertex-distinguishing Ⅰ-total colorings and vertex-distinguishing Ⅵ-total colorings of join-graph of cycle and path

MIAO Tingting[1], WANG Zhiwen[2], CHEN Xiang'en[*1]

(1. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;
2. School of Mathematics and Computer Sciences, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: Ⅰ-total coloring of a graph G is an assignment of several colors to the vertices and edges of graph G such that any two adjacent vertices receive different colors and any two adjacent edges receive different colors. Ⅵ-total coloring of a graph G is an assignment of several colors to the vertices and edges of graph G such that any two adjacent edges receive different colors. For Ⅰ(Ⅵ)-total coloring of graph G and a vertex x of graph G, $C(x)$ is used to denote the set (not multiset) composed of color of x and colors of the edges incident with x. Let f be Ⅰ(Ⅵ)-total coloring of a graph G using k colors and $C(u)\neq C(v)$ for any two different vertices u and v of graph G, then f is called a k-vertex-distinguishing Ⅰ(Ⅵ)-total coloring of graph G, or k-VDITC (VDVITC) of graph G for short. The minimum number of colors required in a VDITC (VDVITC) is the vertex-distinguishing Ⅰ(Ⅵ)-total chromatic number. The problems of vertex-distinguishing Ⅰ(Ⅵ)-total colorings of the join-graph $C_m \vee P_n$ of cycle and path are discussed by the method of combinatorial analysis and constructing concrete coloring. Meanwhile, vertex-distinguishing Ⅰ(Ⅵ)-total chromatic numbers of graph $C_m \vee P_n$ are determined. The results illustrate that the VDITC conjecture and VDVITC conjecture are valid for graph $C_m \vee P_n$.

Key words: Ⅰ-total coloring; vertex-distinguishing Ⅰ-total coloring; vertex-distinguishing Ⅰ-total chromatic number; join of cycle and path