

基于 X-SBFEM 的非线性断裂数值模型研究

傅兴安^{1,2}, 李建波^{*1,2}, 林 皋^{1,2}

(1. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024;

2. 大连理工大学 建设工程学部 工程抗震研究所, 辽宁 大连 116024)

摘要: 从非线性断裂力学模型的角度, 开展准脆性材料(混凝土)裂纹过程区的有效模拟, 是当前的研究热点之一. 扩展比例边界有限元法(X-SBFEM)兼有扩展有限元法(XFEM)和比例边界有限元法(SBFEM)两种方法的优势, 利用 SBFEM 求解裂尖段应力奇异性问题, 利用 XFEM 模拟非裂尖段位移场不连续. 为在 X-SBFEM 中增加非线性断裂模型, 提出采用 side-face 力的形式, 基于黏聚力模型, 通过线性叠加迭代法来模拟准脆性材料(混凝土)裂纹过程区. 最后, 以数值算例——单边缺口的三点弯曲梁和四点剪切梁——模拟裂纹过程区能量耗散影响, 验证了所提方法的精度与应用效果.

关键词: 扩展比例边界有限元法; 应力强度因子; 黏聚力; side-face 力; 裂纹过程区

中图分类号: TV313

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb201705009

0 引言

材料的断裂行为以及断裂过程的数值模拟是评估结构承载能力的重要依据. 近几年从断裂力学角度提出的扩展比例边界有限元法(X-SBFEM)是在扩展有限元法^[1-2](XFEM)和比例边界有限元法^[3-4](SBFEM)的基础上发展而来的. X-SBFEM^[5-6]兼有两种方法的优势, 在裂纹主体段用 XFEM 模拟, 在裂尖端用 SBFEM 模拟, 最终建立裂纹体的总体平衡方程并进行求解. 其中, XFEM 的虚自由度与 SBFEM 的全实自由度的衔接是重点环节. X-SBFEM 克服了扩展有限元在域内裂纹尖端近场需要增强函数来描述, 且某些情况下, 该增强函数将是非多项式或不连续的, 造成在形成刚度矩阵时需要特殊处理. 而进一步考虑模型裂纹过程区(FPZ)的非线性影响, 在 X-SBFEM 的基础上, 引入非线性断裂力学, 对于推进模型的应用具有重要工程意义. 一般的, 准脆性材料裂纹的模拟主要有线弹性的方法(LEFM)和非线性的方法(NFM), 用 LEFM 还是 NFM 取决于 FPZ 相对于结构的尺寸^[7]. 现在线弹性力学

只能应用在大尺度结构上(如混凝土大坝等)的观点已被广泛接受. 为得到更高的计算精度, 对于正常尺寸的结构(如混凝土梁)应用基于 FPZ 的非线性断裂力学模型是有必要的^[7].

Yang 等^[8]、Shi 等^[9]近年采用 FEM-SBFEM 耦合的方法或 P-SBFEM 模拟 FPZ 的非线性行为时, 都通过插入黏聚界面单元(CIEs)来进行分析. 这种方法在模拟裂纹扩展过程中, 新生成裂纹边界变得扭曲复杂, 对于复杂结构模型应用起来有一定的难度^[7].

本文提出在 X-SBFEM 基础上采用线性渐进叠加假设的迭代法求解裂纹面黏聚力来考虑裂纹过程区的非线性影响, 并通过对裂纹扩展问题采用基于 LEFM 的最大环向拉应力准则来预测裂纹路径, 模拟裂纹尖端 FPZ 的能量耗散.

1 扩展比例边界有限元法(X-SBFEM)基本理论

X-SBFEM 的主要工作是通过建立裂尖超单元利用 SBFEM 半解析的性质来模拟裂尖近场的

收稿日期: 2016-09-18; 修回日期: 2017-05-26.

基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2016YFB0201000); 国家自然科学基金资助项目(51779222); 国家自然科学基金委创新研究群体项目(51421064); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(DUT17LK16).

作者简介: 傅兴安(1991-), 男, 硕士生, E-mail: fuxingan@mail.dlut.edu.cn; 李建波*(1977-), 男, 博士, 副教授, E-mail: jianboli@dlut.edu.cn; 林 皋(1929-), 男, 教授, 中国科学院院士, E-mail: gaolin@dlut.edu.cn.

非连续行为,而在裂纹非裂尖段则采用 XFEM 来描述,关键是单元接触界面处的数值处理.图 1 是模型域内拓扑关系的示意图^[6].

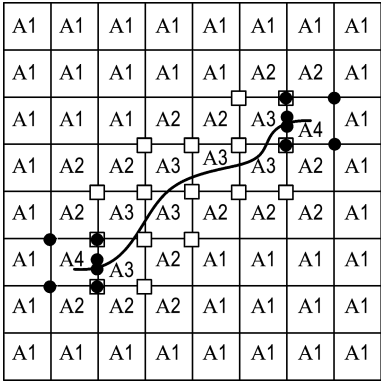


图 1 X-SBFEM 含裂纹模型域内拓扑关系

Fig. 1 Topological relation in the model domain including a crack based on X-SBFEM

1.1 扩展有限元法(XFEM)原理

基于单元分解思想,裂纹的主体段用扩展有限元法进行模拟,其位移场的一般形式为^[10]

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I \in \mathbf{N}^{\text{fem}}} N_I(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{q}_I + \sum_{J \in \mathbf{N}^{\text{c}}} N_J(\boldsymbol{x}) \mathcal{Q}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{a}_J \quad (1)$$

式中: $\mathbf{N}^{\text{fem}}$ 、 $\mathbf{N}^{\text{c}}$ 分别为普通有限元、因被内部裂纹贯穿而增强的节点. N 表示形函数. $\boldsymbol{q}_I$ 为普通自由度,而 $\boldsymbol{a}_J$ 为与 $\mathcal{Q}$ 所关联的广义自由度(如图 1 中方形节点所示), $\mathcal{Q}(\boldsymbol{x})$ 为 Heaviside 阶跃函数. 扩展有限元平衡方程为

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{aa}^e & \mathbf{K}_{ab}^e \\ \mathbf{K}_{ba}^e & \mathbf{K}_{bb}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_I \\ \boldsymbol{a}_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_a \\ \boldsymbol{P}_b \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{K}_{aa}^e$ 、 $\mathbf{K}_{bb}^e$ 、 $\mathbf{K}_{ab}^e$ 和 $\mathbf{K}_{ba}^e$ 分别为与普通自由度相关联、与广义自由度相关联及与普通自由度和广义自由度相耦合的刚度阵; $\boldsymbol{P}_a$ 和 $\boldsymbol{P}_b$ 分别为普通自由度和广义自由度上的等效节点力^[10-11].

1.2 比例边界有限元法(SBFEM)原理

如图 2 所示,考虑裂尖 SBFEM 超单元内裂纹面有 side-face 力. 首先在不考虑体力的情况下,SBFEM 的位移场和应力场为^[3]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\xi, \eta) &= \boldsymbol{N}(\eta) \boldsymbol{u}(\xi) = \sum_{i=1}^n c_i \xi^{\lambda_i} \boldsymbol{N}(\eta) \boldsymbol{\varphi}_i \quad (3) \\ \boldsymbol{\sigma}(\xi, \eta) &= \boldsymbol{D} \boldsymbol{L} \boldsymbol{N}(\eta) \boldsymbol{u}(\xi) = \\ &\quad \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_1(\eta) \boldsymbol{u}(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}_2(\eta) \boldsymbol{u}(\xi) \end{aligned} \quad (4)$$

式中: $\boldsymbol{N}(\eta)$ 为边界的形函数, $\boldsymbol{\varphi}_i$ 和 λ_i 分别为特征值及位移模态, c_i 表示积分常数, $\boldsymbol{D}$ 为弹性模量矩

阵, $\boldsymbol{L}$ 为线性算子矩阵, $\boldsymbol{B}_1(\eta)$ 和 $\boldsymbol{B}_2(\eta)$ 决定于 SBFEM 超单元的几何特性. 根据虚功原理可推得:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{K} \boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\Phi}^{-1} + \boldsymbol{E}_1^{\text{T}} \quad (5) \\ \boldsymbol{E}_0 \xi^2 \boldsymbol{u}(\xi)_{,\xi\xi} + (\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1^{\text{T}} - \boldsymbol{E}_1) \boldsymbol{u}(\xi)_{,\xi} - \boldsymbol{E}_2 \boldsymbol{u}(\xi) &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \quad (6)$$

式中: $\boldsymbol{P}$ 为超单元边界等效节点力, $\boldsymbol{\Phi}$ 为由位移模态为列所组成的矩阵, $\boldsymbol{u}^h$ 为边界节点位移, $\boldsymbol{E}_0$ 、 $\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 分别为位移控制方程的系数阵. 于是应力强度因子的公式可表达为^[6,12]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\text{I}} \\ \mathbf{K}_{\text{II}} \end{pmatrix} = \sqrt{2\pi L_0} \sum_{i=1,2} \begin{pmatrix} c_i \left(\boldsymbol{\psi}_{yy}(\eta=\eta_A) \right) \\ c_i \left(\boldsymbol{\psi}_{xy}(\eta=\eta_A) \right) \end{pmatrix}_i \quad (7)$$

式中: $\mathbf{K}_{\text{I}}$ 、 $\mathbf{K}_{\text{II}}$ 为两型应力强度因子, L_0 为裂尖到沿裂纹面延长线与边界相交点的距离. $\boldsymbol{\psi}_{yy}$ 、 $\boldsymbol{\psi}_{xy}$ 为应力模态.

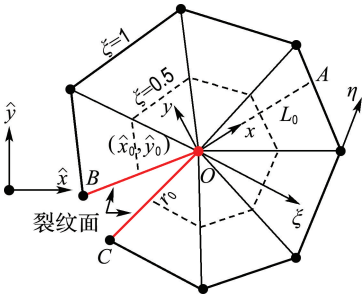


图 2 SBFEM 有限域的边界离散及相似坐标变换

Fig. 2 Discretization on boundary with element and scaled transformation of coordinates of bounded media of SBFEM

1.3 X-SBFEM 耦合模型边界模式

图 3 描述了一个典型的用 XFEM 和 SBFEM 模拟裂纹的方法. SBFEM 超单元直接通过单元两条边界来描述裂尖裂纹面, XFEM 则由阶跃函数引入附加的自由度来描述裂纹非裂尖段非连续位移场^[6]. 为了保证两种不同单元间的位移连续, 则需引入特殊的矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使 SBFEM 和 XFEM 衔接节点的位移协调. 在把 SBFEM 得到的未知节点位移($\boldsymbol{u}_E$ 、 $\boldsymbol{u}_F$ 、 $\boldsymbol{u}_A$ 和 $\boldsymbol{u}_B$)转换成 XFEM 未知节点位移($\boldsymbol{q}_2$ 、 $\boldsymbol{q}_3$ 、 $\boldsymbol{a}_2$ 和 $\boldsymbol{a}_3$)的过程中可以根据之前的公式推导出一个转换矩阵,如下式:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_B \\ \boldsymbol{u}_E \\ \boldsymbol{u}_A \\ \boldsymbol{u}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ N_2(x_A) & N_3(x_A) & \boldsymbol{0} & -2N_3(x_A) \\ N_2(x_F) & N_3(x_F) & 2N_2(x_F) & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_2 \\ \boldsymbol{q}_3 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵. 为保证位移协调并且把单刚

矩阵集入总体刚度阵,需把 SBFEM 超单元的位移向量和刚度矩阵重新排列,如下式:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab}\mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T\mathbf{K}_{ba} & \mathbf{T}^T\mathbf{K}_{bb}\mathbf{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{sb} \\ \mathbf{u}_{xf} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{T}^T\mathbf{F}_b \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{u}_{sb}$ 为 SBFEM 单元在非共用边界上的节点位移, $\mathbf{u}_{xf}$ 为 XFEM 单元在共用边界上的节点位移. 转换矩阵 $\mathbf{T}$ 只与 SBFEM 域和 XFEM 域共用边界上的裂纹开口处的形函数有关. $\mathbf{K}$ 表示刚度矩阵,其中下标 a 表示 SBFEM 域和 XFEM 域单元之间共用节点自由度,下标 b 表示非共用节点自由度.

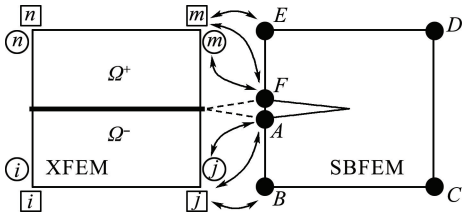


图 3 扩展有限元域与比例边界有限元域的耦合
Fig. 3 Coupling the XFEM and the SBFEM domain

2 非线性断裂力学模型

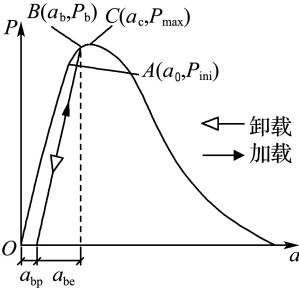
2.1 线性渐进叠加假设

Hillerborg 等^[13]提出的 P - a 曲线 (external load-crack mouth opening displacement curve) 是由混凝土结构的裂纹过程区 (FPZ) 的黏性行为引起的. 为简化 Xu 等^[14]求解黏性裂纹扩展的方法, 基于线性渐进叠加假设^[7], 把 FPZ 当作线弹性裂纹进行求解.

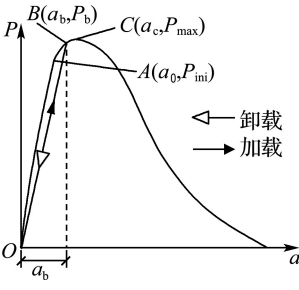
这种线性简化方法中假设塑性变形为 0, 忽略图 4(a) 中 a_{bp} 曲线非线性部分的影响, 即把图 4(a) 简化成图 4(b). 由此, 图 4(b) 中 B 点是线弹性点. 这样线弹性断裂力学将可以适用于虚拟的 OB 段加载的分析. 由此, 相同材料及几何特性条件下, 不同预设裂纹长度的一系列构件将会得到一系列类似的 B 点. 此时, P - a 曲线可以当成这一系列 B 点的包络线.

2.2 开裂准则

混凝土开裂往往呈现复合断裂形态, 从数值角度, 结构所承受的总荷载如图 5(c) 所示, 除承受外荷载外, 在裂纹过程区内, 如裂纹面之间相对的位移, 包括裂纹面的张裂位移 (COD) 和滑裂位移 (CSD), 没有超过图 6 所示的限值 w_c 和 s_c 时, 则还承受虚拟裂纹面内的黏聚力. 但裂纹面相对



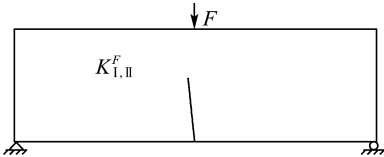
(a) 真实卸载/重加载轨迹



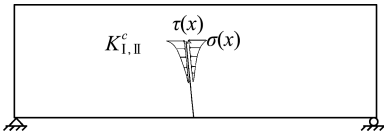
(b) 虚拟卸载/重加载轨迹

图 4 线性渐进叠加假设

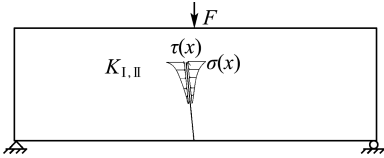
Fig. 4 The linear asymptotic superposition assumption



(a) 只有外力作用



(b) 只有黏聚力作用



(c) 外力与裂纹面黏聚力叠加作用

图 5 叠加法计算应力强度因子 $K_{I,II}$

Fig. 5 Superposition method for calculating stress intensity factor $K_{I,II}$

位移超过限值的部分令黏聚力为 0. 对于有黏聚力的情况, 以 I 型应力强度因子为例, 应力强度因子由两部分组成^[14]:

$$K_I = K_I^F + K_I^c \quad (10)$$

其中 K_I 为总应力强度因子; K_I^F 、 K_I^c 分别为由外荷载和黏聚力引起的分量, 均可以由标准 SBFEM 求解应力强度因子公式来计算. 当模型

由外力而引起裂纹张开时,则 $K_I^F > 0$,而黏聚力此时使裂纹趋向闭合,所以 $K_I^c < 0$.在这两者作用下,存在一个平衡状态,此时, $K_I = 0$,即断裂驱动力等于断裂抗力.由此可以得到 $K_I \geq 0$ 可以作为判断裂纹是否会继续扩展的依据^[7].

2.3 FPZ 软化曲线

裂纹过程区内的正黏聚力 $\sigma(x)$ 决定于图 6(a) σ - w 双线性的软化曲线或图 6(b) σ - w 单线性的软化曲线.切分量 $\tau(x)$ 由图 6(c) τ - s 曲线决定.图 6(a)(b) 曲线以下的面积为 I 型断裂能 G_{II} .图 6(c) 曲线间的面积为 II 型断裂能 G_{fII} 的 2 倍^[8].假设图 6 中曲线关系都为不可逆的卸载路径,即当裂纹面闭合时,一种弹性的卸载将随着 w 或 s 的减小而沿着图中的割线发生.实心箭头表示加载,空心箭头表示卸载.

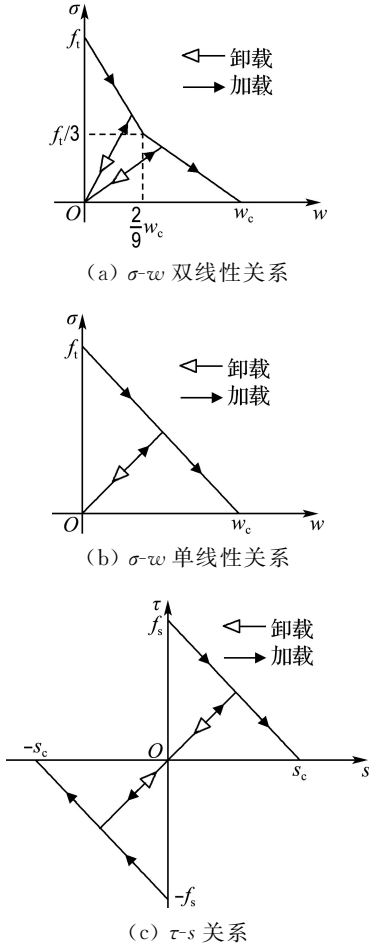


图 6 裂纹相对位移与黏聚力的关系
Fig. 6 Relations between relative displacements of crack and cohesive tractions

2.4 以迭代形式模拟黏聚力模型

本文工作的关键是根据裂纹面的相对位移采

用线性叠加的迭代法求解裂纹面黏聚力.

步骤 1 假设结构只受外力 F 作用,这样可以 根据 X-SBFEM 基于线弹性假定求出超单元裂纹面 相对位移 Δu_i ,再根据图 6 即可得出相应黏聚力 t_i .

步骤 2 如图 5,把外荷载 F 和步骤 1 中得 到的黏聚力 t_i 一起作用在结构上.其中黏聚力以 side-face 力形式施加在裂纹面上.

side-face 力分布荷载^[5]对应的虚功项为

$$\int_S (\delta u(\xi, \eta))^T p_n(\xi, \eta) dS = \int_0^1 (\delta u(\xi))^T p_n(\xi) \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2} d\xi = \int_0^1 (\delta u(\xi))^T F_t(\xi) d\xi \quad (11)$$

易得 SBFEM 非齐次控制方程:

$$E_0 \xi^2 u(\xi)_{,\xi\xi} + (E_0 + E_1^T - E_1) u(\xi)_{,\xi} - E_2 u(\xi) + \xi F_t(\xi) = 0 \quad (12)$$

假定荷载及位移模式能由幂级数表达,即

$$F_t(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi^i F_{t_i} \quad (13)$$

$$u_t(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi^i \phi_{t_i} \quad (14)$$

将式(14)代入式(12)和式(13)可得

$$\phi_{t_i} = [(t_i + 1)^2 E_0 + (t_i + 1)(E_1^T - E_1) - E_2]^{-1} F_{t_i} \quad (15)$$

$$q_{t_i} = [(t_i + 1)E_0 + E_1^T] \phi_{t_i} \quad (16)$$

因此,边界节点完整位移和等效节点力分别为

$$u^h = \sum_{i=1}^n \phi_{t_i} + \Phi c \quad (17)$$

$$P = \sum_{i=1}^n q_{t_i} + Qc \quad (18)$$

其中 Φ 和 Q 分别为式(6)解出的位移模态矩阵和 力的模态矩阵.综合式(17)和式(18)可得

$$K u^h = P - \sum_{i=1}^n q_{t_i} + K \sum_{i=1}^n \phi_{t_i} \quad (19)$$

故由 side-face 力形式加载的黏聚力产生的 SBFEM 等效边界节点力为

$$R_F = - \sum_{i=1}^n q_{t_i} + K \sum_{i=1}^n \phi_{t_i} \quad (20)$$

将 u_{sb}^h 代入式(17)可得

$$c = \Phi^{-1} (u_{sb}^h - \phi_t) \quad (21)$$

则可得到 SBFEM 超单元的位移场为

$$u(\xi, \eta) = N(\eta) \left(\sum_{i=1}^n c_i \xi^{\lambda_i} \phi_i - \xi^{+1} \phi_t \right) \quad (22)$$

式中: ϕ_i 为 SBFEM 解出的应力模态.由式(22)求

解出相对位移 Δu_{i+1} .

步骤 3 重复步骤 1、2 直至 t_i 与 Δu_{i+1} 的关系能很好地符合图 6 中的关系.

3 算例与分析

3.1 单边缺口三点弯曲梁

Hillerborg 等曾通过试验研究单边缺口三点弯曲梁模型^[13],梁的材料和几何尺寸数据等如图 7 所示. 抗拉强度 $f_t = 3.33 \text{ MPa}$, I 型断裂能 $G_{fI} = 137 \text{ N/m}$. 本算例基于 LEFM 最大环向拉应力准则来预测裂纹扩展路径. 单线性软化曲线(图 6(b))被用来做分析. 由 I 型断裂能 G_{fI} 所得出的单线性软化曲线限值为 $w_c = 0.0823 \text{ mm}$. 计算了在 20×200 网格密度条件下 3 种裂纹扩展步长 10、20 和 30 mm 的结果, 并与基于线弹性方法^[6]的结果进行对比.

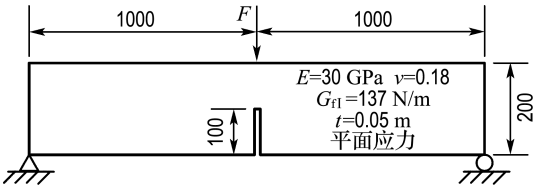


图 7 单边缺口三点弯曲梁

Fig. 7 Three-point single notched bending beam

图 8 是考虑 FPZ 非线性的 3 种不同裂纹扩展步长时的荷载-加载点位移曲线. 由图中可以看出, 陈白斌等^[6](基于 X-SBFEM) 和 Yang 等^[8](基于 SBFEM) 基于 LEFM 结果数据与 Hillerborg 等的试验数据^[13]有很大的差别, 尤其是他们的荷载

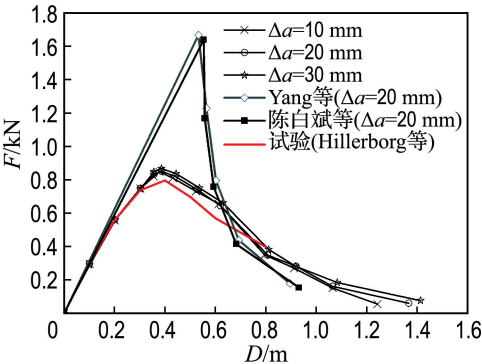


图 8 基于非线性断裂力学不同裂纹扩展步长时三点弯曲梁的荷载-加载点位移曲线

Fig. 8 NFM-based load-LPD curves for three-point bending beam with different crack increment lengths

峰值都比试验的峰值高出较多. 这是因为基于线弹性断裂力学方法无法模拟 FPZ 的能量耗散. 而从图中可以看出本文方法计算得到的结果与试验结果^[13]是较为符合的, 说明本文中所使用的基于 X-SBFEM 通过线性叠加的迭代法求解黏聚力的方法能很好地模拟 FPZ 的能量耗散. 而且从图中可以看出 3 种裂纹扩展步长的结果都很符合试验曲线, 这说明不同裂缝扩展步长对计算结果影响不大.

3.2 单边缺口四点剪切梁

Arrea 和 Ingraffea 曾试验和分析了单边缺口四点剪切梁模型^[15]. 其几何尺寸及材料参数如图 9 所示. 假设为平面应力状态. 抗拉强度 $f_t = 3.00 \text{ MPa}$, I 型断裂能 $G_{fI} = 100 \text{ N/m}$, II 型断裂能 $G_{fII} = 10 \text{ N/m}$. 裂纹路径预测基于 LEFM 最大环向拉应力准则. 单线性的软化曲线(图 6(b))和 τ - s 曲线(图 6(c))被用来做分析. 由 I 型断裂能 $G_{fI} = 100 \text{ N/m}$ 计算得到的 COD 限值 $w_c = 0.067 \text{ mm}$, 由 II 型断裂能 G_{fII} 求得的 CSD 限值 $s_c = 0.02 \text{ mm}$. 计算了在 20×200 网格密度条件下 3 种裂纹扩展步长 20、30 和 40 mm 的结果, 并与基于线弹性方法^[6]的结果进行对比.

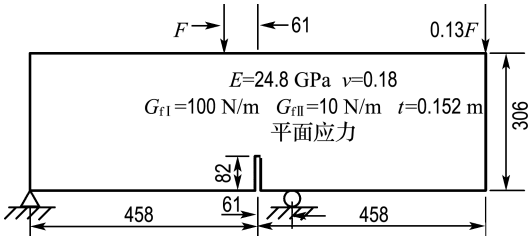


图 9 单边缺口四点剪切梁

Fig. 9 Four-point single notched shear beam

图 10 和图 11 分别展示了基于本文方法计算得到的不同裂纹扩展步长下荷载与裂纹口滑移位移的关系曲线、荷载与其加载点位移关系的曲线. 其中, 由图 10 可以看出, 本文计算结果与 Arrea 和 Ingraffea 试验得到的数据^[15]及 Yang 等^[8](基于 NFM) 的数值解拟合较好; 从图 11 可以看出, 本文计算结果与 Yang 等^[8](基于 NFM) 的数值解较为接近, 峰值都明显低于陈白斌等^[6](基于 X-SBFEM、LEFM) 所得的数值解结果, 说明本文方法较好地基于 X-SBFEM 算法模拟了裂纹尖端存在 FPZ 能量耗散的影响. 且由图看出 3 种裂纹扩展步长的结果接近, 即裂纹扩展步长对计算结果的影响不是很大, 从而验证了 X-SBFEM 算法

对于复合型裂纹扩展问题的适用性. 此外,图 11 可看成本文方法较好地表现出荷载-加载点位移曲线 snap-back 的现象. 图 12 所示为当 $a=20$ mm 时 $F=36.7$ kN 作用下的裂纹轨迹及正黏聚力沿裂纹面分布图.

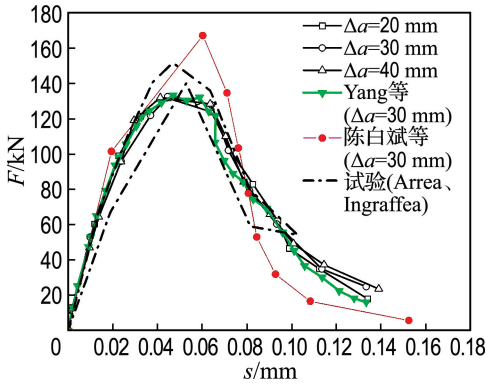


图 10 基于非线性断裂力学不同裂纹扩展步长下的荷载-滑移位移曲线

Fig. 10 NFM-based load-CMSD curves with the change of crack increment length

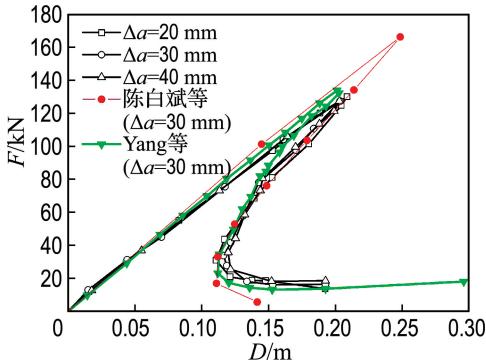
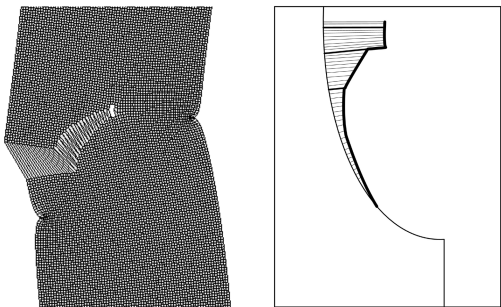


图 11 基于非线性断裂力学不同裂纹扩展步长时四点剪切梁的荷载-加载点位移曲线

Fig. 11 NFM-based load-LPD curves for four-point shear beam with different crack increment lengths



(a) 变形几何图 (b) 裂纹面正黏聚力分布

图 12 $F=36.7$ kN 下的裂纹轨迹

Fig. 12 The crack trajectory under the load of $F=36.7$ kN

4 结 语

本文提出基于扩展比例边界有限元法(X-SBFEM)采用线性叠加迭代法模拟准脆性材料(混凝土)裂纹过程区的非线性行为,并将其结果与基于 X-SBFEM 采用 LEFM 方法得到的结果进行对比,可以看出其模拟裂纹尖端 FPZ 的能量耗散的有效性. 本文发展了 X-SBFEM 在非线形断裂过程模拟中的应用. 此外,采用该方法不需要插入 CIEs 和引入影子域(shadow domain)就可以得到较高精度的结果.

参考文献:

[1] RABCUK T, BORDAS S, ZI G. On three-dimensional modelling of crack growth using partition of unity methods [J]. **Computers and Structures**, 2010, **88**(23/24):1391-1411.

[2] BELYTCHKO T, GRACIE R, VENTURA G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling [J]. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, 2009, **17**(4):043001.

[3] SONG Chongmin, WOLF J P. Semi-analytical representation of stress singularities as occurring in cracks in anisotropic multi-materials with the scaled boundary finite element method [J]. **Computers and Structures**, 2002, **80**(2):183-197.

[4] SONG Chongmin, TIN-LOI F, GAO Wei. A definition and evaluation procedure of generalized stress intensity factors at cracks and multi-material wedges [J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 2010, **77**(12):2316-2336.

[5] 陈白斌,李建波,林 皋. 无需裂尖增强函数的扩展比例边界有限元法[J]. 水利学报, 2015, **46**(4): 489-496, 504.

CHEN Baibin, LI Jianbo, LIN Gao. An extended scaled boundary finite element method without asymptotic enrichment of the crack tip [J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2015, **46**(4): 489-496, 504. (in Chinese)

[6] 陈白斌,李建波,林 皋. 基于 X-SBFEM 的裂纹体非网格重剖分耦合模型研究[J]. 工程力学, 2015, **32**(3):15-21.

CHEN Baibin, LI Jianbo, LIN Gao. Study on the coupling model of crack without remeshing based on X-SBFEM [J]. **Engineering Mechanics**, 2015, **32**(3):15-21. (in Chinese)

[7] 朱朝磊. 基于比例边界有限元方法的混凝土结构静态断裂模拟[D]. 大连:大连理工大学, 2014.

- ZHU Chaolei. Static and dynamic fracture simulation of concrete structures based on scaled boundary finite element method [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2014. (in Chinese)
- [8] YANG Z J, DEEKS A J. Fully-automatic modelling of cohesive crack growth using a finite element-scaled boundary finite element coupled method [J]. **Engineering Fracture Mechanics**, 2007, **74** (16): 2547-2573.
- [9] SHI Mingguang, ZHONG Hong, OOI E T, *et al.* Modelling of crack propagation of gravity dams by scaled boundary polygons and cohesive crack model [J]. **International Journal of Fracture**, 2013, **183**(1):29-48.
- [10] 茹忠亮, 朱传锐, 赵洪波. 裂纹扩展问题的改进 XFEM 算法[J]. 工程力学, 2012, **29**(7):12-16.
RU Zhongliang, ZHU Chuanrui, ZHAO Hongbo. An improved algorithm of XFEM for the crack propagation problems [J]. **Engineering Mechanics**, 2012, **29**(7):12-16. (in Chinese)
- [11] 张晓东, 丁 勇, 任旭春. 混凝土裂纹扩展过程模拟的扩展有限元法研究[J]. 工程力学, 2013, **30**(7): 14-21.
ZHANG Xiaodong, DING Yong, REN Xuchun. Simulation of the concrete crack propagation process with the extended finite element method [J]. **Engineering Mechanics**, 2013, **30** (7): 14-21. (in Chinese)
- [12] 刘钧玉, 林 皋, 胡志强. 裂纹面荷载作用下多裂纹应力强度因子计算[J]. 工程力学, 2011, **28**(4):7-12.
- LIU Junyu, LIN Gao, HU Zhiqiang. The calculation of stress intensity factors of multiple cracks under surface tractions [J]. **Engineering Mechanics**, 2011, **28**(4):7-12. (in Chinese)
- [13] HILLERBORG A, MODEER M, PETERSSON P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements [J]. **Cement and Concrete Research**, 1967, **6**(6):773-781.
- [14] XU Shilang, REINHARDT H W. Determination of double-K criterion for crack propagation in quasi-brittle fracture. Part II: Analytical evaluating and practical measuring methods for three-point bending notched beams [J]. **International Journal of Fracture**, 1999, **98**(2):151-177.
- [15] ARREA M, INGRAFFEA A. Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete: 81-13 [R]. Ithaca: Department of Structural Engineering, Cornell University, 1982.

Study of numerical model of nonlinear fracture based on X-SBFEM

FU Xing'an^{1,2}, LI Jianbo^{*1,2}, LIN Gao^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. Institute of Earthquake Engineering, Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, China)

Abstract: The effective simulation of the fracture process zone (FPZ) of quasi-brittle material (concrete) by using nonlinear fracture mechanics model is one of the hot spots in the current research. Extended scaled boundary finite element method (X-SBFEM) has advantages of both extended finite element method (XFEM) and scaled boundary finite element method (SBFEM), making full use of XFEM to describe discontinuous displacement field in non-crack-tip area and SBFEM to precisely solve stress singular problems in the crack-tip area. For the application of nonlinear fracture models in X-SBFEM, based on the model of the cohesive traction, the FPZ of the quasi-brittle material (concrete) is simulated using the iterative method of linear superposition by the form of side-face traction. Finally, numerical examples of the three-point single notched bending beam and the four-point single notched shear beam are used to simulate the energy dissipation effect in the FPZ, which verify the accuracy and application effect of the proposed method.

Key words: extended scaled boundary finite element method (X-SBFEM); stress intensity factor; cohesive traction; side-face traction; fracture process zone (FPZ)