文章编号：1000-8608(2017)05-0531-06

关于圈龙图的奇优雅性

孙　慧[1]，姚　兵*[1,2]

（1.西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070；
2.兰州交通大学 电子与信息工程学院，甘肃 兰州 730070）

摘要： 图的标号主要有（奇）优美标号、和谐标号、幸福标号、魔幻类标号等. 圈龙图和多毛圈龙图可以作为计算机网络的模型. 证明了圈龙图和多毛圈龙图都具有奇优雅标号，证明方法能够算法化，为网络模型的密码和可区别性研究提供了理论依据和可行的工具.

关键词： 圈龙图；多毛圈龙图；奇优雅标号；叶子；奇优雅图

中图分类号： O157.5　　**文献标识码：** A　　**doi：** 10.7511/dllgxb201705014

0　引　言

图标号研究起源于1967年Rosa的著名的优美树猜想[1]. 根据不同的条件，产生了各种类型的图标号，例如优美标号、奇优美标号、和谐标号、幸福标号、魔幻类标号等. 图的标号在现代科学技术的诸多领域(计算机科学、信息科学、密码学、数学证明等)都得到了广泛应用. 因此，图标号成为图论学科中发展迅速的分支之一[2-8]. 文献[8]收录了1 400多篇关于图标号的文章. 而周向前[9]在2012年提出奇优雅标号的概念，给出若干构造奇优雅标号的方法，并给出一个猜想：所有的树都是奇优雅的. 文献[9-13]是一些关于奇优雅标号的研究结果. Wang等在文献[14]中提出了“图结构＋数论”的新型密码设计思想，目的是设计使用者方便、破译困难的图结构密码. 这种设计需要足够多的图结构、图标号、灵活组合的策略. 受文献[7,10]和环形计算机网络的启发，以及为Wang等的设计提供新的具有奇优雅性质的图结构，本文讨论与计算机网络有关联的圈龙图和多毛圈龙图网络模型. 圈龙图是一种典型的环形计算机网络，每个顶点可以看作一个服务器；而多毛圈龙图是给圈龙图的任意顶点添加任意叶子得到的，一个叶子的顶点代表一个连接某一服务器的用户，多毛圈龙图是给圈龙图任意添加叶子的过程，它模拟了用户登录服务器的过程. 文献[7]研究的模型也是一种环形计算机网络模型，但与本文研究的圈龙图略有不同，且文献[7]没有多毛圈龙图网络模型.

1　定　义

文中所考虑的图均为有限、无向、简单图. 文中没有定义的术语和符号参见文献[15]. 为方便起见，用记号$[m,n]$表示集合$\{m,m+1,m+2,\cdots,n\}$，其中m和n均为非负整数，且满足$0\leqslant m<n$；用记号$[s,t]^{o}$表示集合$\{s,s+2,s+4,\cdots,t\}$，其中s和t均为奇数.

一个(p,q)-图G是指$|V(G)|=p$和$|E(G)|=q$. 图G的一个从顶点集$V(G)$(或边集$E(G)$，或全集$V(G)\cup E(G)$)到一个非负正数集的单射f是指任何2个不同顶点u、v(或2条边或2个元素)的像不同，即$f(u)\neq f(v)$，称f为G的一个标号(labelling). 以下顶点标号集合$\{f(u)|u\in V(G)\}$简记为$f(V(G))$，边标号集合$\{f(uv)|uv\in E(G)\}$简记为$f(E(G))$.

定义1[8,16]　对于给定的(p,q)-图G，如果存在一个单射$f:V(G)\rightarrow[0,q]$，使得边标号集合$f(E(G))=\{f(uv)=|f(u)-f(v)|\mid uv\in$

收稿日期：2017-02-16；　修回日期：2017-07-23.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61163054,61363060,61662066).
作者简介：孙　慧(1992-)，女，硕士生，E-mail：18919104606@163.com；姚　兵*(1956-)，男，教授，E-mail：yybb918@163.com.

$E(G)\}=[1,q]$，则称 f 是 G 的一个优美标号(graceful labelling)，也称 G 为优美图(graceful graph). 此外，若图 G 是具有顶点二部划分(X,Y)的二部图，且 f 满足 $\max\{f(x)\mid x\in X\}<\min\{f(y)\mid y\in Y\}$(以下简记为 $f(X)<f(Y)$)，则称 f 是 G 的一个集有序优美标号(set-ordered graceful labelling).

定义 2 对于给定的(p,q)-图 G，如果存在一个单射 $f:V(G)\to[0,2q-1]$，使得 $f(E(G))=\{f(uv)=|f(u)-f(v)|\mid uv\in E(G)\}=[1,2q-1]$，则称 G 为奇优美图(odd-graceful graph)，f 是 G 的一个奇优美标号(odd-graceful labelling). 若图 G 是具有顶点二部划分(X,Y)的二部图，且 f 满足 $f(X)<f(Y)$，则称 f 是 G 的一个集有序奇优美标号(set-ordered odd-graceful labelling).

定义 3[10] 对于给定的(p,q)-图 G，如果存在一个单射 $f:V(G)\to[0,2q-1]$，使得 $|f(V(G))|=p$ 和 $f(E(G))=\{f(uv)=[f(u)+f(v)](\bmod 2q)\mid uv\in E(G)\}=[1,2q-1]$，则称 G 为奇优雅图(odd-elegant graph)，f 是 G 的一个奇优雅标号(odd-elegant labelling).

给出本文的研究对象圈龙图和多毛圈龙图的构造：设有圈 $C_i=u_{i,1}u_{i,2}\cdots u_{i,a_i}u_{i,1}$，其长度为 $a_i=|V(C_i)|\geqslant 3$，$i\in[1,n]$($n\geqslant 2$). 进一步，将圈 C_i 的顶点 $u_{i,2}$ 与圈 C_{i+1} 的顶点 $u_{i+1,a_{i+1}}$ 重合为一个顶点($i\in[1,n-1]$)，再给圈 C_1 的顶点 u_{1,a_1-1} 用一条边 e 连接一个顶点 w 得到的图叫作圈龙图(cyclic-dragon graph)，记作 $D\langle C_i\rangle_1^n$，顶点 w 叫作龙须(dragon whisker)，圈 C_1 叫作圈龙图的头(head)，圈 C_n 叫作圈龙图的尾(tail). 圈龙图的示意图在图1中给出. 在图论学中，一度顶点叫作悬挂点，也叫叶子. 给圈龙图 $D\langle C_i\rangle_1^n$ 的任意的顶点 $u_{i,j}$ 添加 $p_{i,j}$ 片叶子，其中 $i\in[1,n]$，$j\in[1,a_i]$，$p_{i,j}\geqslant 0$，所得到的新图叫作多毛圈龙图(haired cyclic-dragon graph)，记作 $HD\langle C_i\rangle_1^n$.

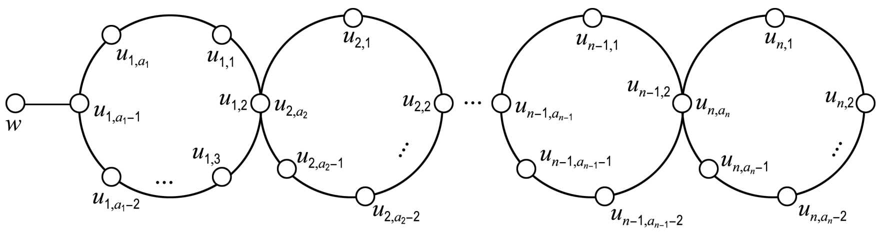

图 1 圈龙图 $D\langle C_i\rangle_1^n$

Fig. 1 A cyclic-dragon graph $D\langle C_i\rangle_1^n$

2 主要结论

在以下的论证中，若无特殊说明时，a_i 是圈龙图 $D\langle C_i\rangle_1^n$ 的第 i 个圈 C_i 的顶点数目，圈 C_i 上的顶点记为 $u_{i,j}$，其中 $i\in[1,n]$，$j\in[1,a_i]$.

引理 1 若圈龙图 $D\langle C_i\rangle_1^n=G$ 具有奇优雅标号 f，则 G 是二部图.

证明 设 f 是 G 的奇优雅标号. 现定义 $X=\{v\mid f(v)$是偶数$,v\in f(v)\}$，$Y=\{v\mid f(v)$是奇数$,v\in f(v)\}$. 显然，$V(G)=X\cup Y$ 以及 $X\cap Y=\varnothing$. 因为 G 是奇优雅的，所以 X 和 Y 都是独立集.

□

定理 1 设在圈龙图 $D\langle C_i\rangle_1^n$ 中，若 $a_i\equiv 0(\bmod 4)$($i\in[2,n]$)，且 $a_1\equiv 2(\bmod 4)$，则圈龙图 $D\langle C_i\rangle_1^n$ 具有奇优雅标号.

证明 采用第1章中关于圈龙图 $D\langle C_i\rangle_1^n$ 的顶点重合以及记号. 为简便，令 $D\langle C_i\rangle_1^n=G$，$|V(G)|=p$，$|E(G)|=q$，$\alpha(i)=\dfrac{a_i}{2}$，$L(i)=\sum_{j=1}^{i}a_j$，$s=2[L(n)+1]$，$F(i)=\sum_{j=i}^{n}a_j$ ($i\in[1,n]$)，其中 $F(n+1)=0$. 定义圈龙图 G 的一个标号函数 f 如下：

$$f(u_{1,2k})=\begin{cases}F(2)+2k-2n+1; & k\in\left[1,\dfrac{a_1+2}{4}\right]\\ F(2)+2k-2n+3; & k\in\left[\dfrac{a_1+2}{4}+1,\alpha(1)-1\right]\\ s-F(1)-2n+3; & k=\alpha(1)\end{cases}$$

$$f(w)=F(1)-2n+3;$$

$$f(u_{1,2k-1})=F(2)+2k+2n-4;k\in[1,\alpha(1)]$$

当 $i\in[2,n]$ 时

$$f(u_{i,2k})=F(i+1)+2k-2n+2i-1;\quad k\in[1,\alpha(i)]$$

$$f(u_{i,2k-1})=\begin{cases}F(i+1)+2k+2n-2i-2; & k\in\left[1,\dfrac{a_i}{4}\right]\\ F(i+1)+2k+2n-2i; & k\in\left[\dfrac{a_i}{4}+1,\alpha(i)\right]\end{cases}$$

另外，边标号集合 $f(E(G))=\{f(uv)=[f(u)+f(v)](\bmod 2q)\mid uv\in E(G)\}$.

以下证明 f 是 $D\langle C_i\rangle_1^n$ 的一个奇优雅标号，证明里省略“(mod $2q$)”.

(1)先证明 $f(V(G))\subset[0,2q-1]$，以及对于任意的顶点 $u,v\in V(G)$，有 $f(u)\neq f(v)$.

不难看出每个 $f(u_{i,2k-1})$ $(i\in[1,n],k\in[1,\alpha(i)])$ 是偶数，每个 $f(u_{i,2k})$ $(i\in[1,n],k\in[1,\alpha(i)])$ 和 $f(w)$ 是奇数. 令 $X=\{u_{i,2k-1}\mid u_{i,2k-1}\in V(G),i\in[1,n],k\in[1,\alpha(i)]\}$，$Y=\{u_{i,2k}\mid u_{i,2k}\in V(G),i\in[1,n],k\in[1,\alpha(i)]\}\cup\{w\}$. 注意到，当 $i\in[1,n]$ 时，有 $f(u_{i,2k-1})<f(u_{i,2k+1})$ $(k\in[1,\alpha(i)-1])$；当 $i\in[2,n]$ 时，有 $f(u_{i,a_i-1})<f(u_{i-1,1})$. 另一方面，在一个圈龙图 G 的头中，有 $f(u_{1,a_1})>f(w)$，$f(w)>f(u_{1,a_1-2})$，$f(u_{1,2k})>f(u_{1,2(k-1)})$ $(k\in[2,\alpha(1)-1])$；当 $i\in[2,n]$ 时，有 $f(u_{i,2k})>f(u_{i,2(k-1)})$ $(k\in[2,\alpha(i)])$. 此外，$f(u_{n,1})=0$，$f(u_{1,a_1-1})=F(2)+2n+a_1-4<s-1$，$f(u_{1,a_1})=s-F(1)-2n+3<s-1$，$f(u_{n,2})=F(n+1)+1=1$.

因此，$f(V(G))\subset[0,2q-1]$，对于任意的顶点 u,v，$u\neq v$，有 $f(u)\neq f(v)$.

(2)证明 $f(E(G))=[1,2q-1]^{\circ}$. 因为 $\min\{f(uv)\mid uv\in E(G)\}=f(u_{n,1}u_{n,2})=f(u_{n,1})+f(u_{n,2})=0+1=1$，$\max\{f(uv)\mid uv\in E(G)\}=f(u_{1,a_1}u_{1,a_1-1})=f(u_{1,a_1})+f(u_{1,a_1-1})=s-F(1)-2n+3+F(2)+2n+a_1-4=s-1=2q-1$，$f(u_{1,a_1}u_{1,a_1-1})>f(u_{1,a_1-1}w)$，$f(u_{1,a_1-1}w)>f(u_{1,a_1-1}u_{1,a_1-2})$，$f(u_{1,2k}u_{1,2k+1})>f(u_{1,2k}u_{1,2k-1})$ $\left(k\in\left[\dfrac{a_1+2}{4}+1,\alpha(1)-1\right]\right)$，$f(u_{1,\alpha(1)+3}u_{1,\alpha(1)+2})>f(u_{1,a_1}u_{1,1})$，$f(u_{1,a_1}u_{1,1})>f(u_{1,\alpha(1)+1}u_{1,\alpha(1)+2})$，$f(u_{1,2k}u_{1,2k+1})>f(u_{1,2k}u_{1,2k-1})$ $\left(k\in\left[1,\dfrac{a_1+2}{4}\right]\right)$；

当 $i\in[2,n]$ 时，$f(u_{i-1,1}u_{i-1,2})>f(u_{i,a_i-1}u_{i,a_i})$，$f(u_{i,2k-1}u_{i,2k})>f(u_{i,2k-1}u_{i,2(k-1)})$ $\left(k\in\left[\dfrac{a_i}{4}+1,\alpha(i)\right]\right)$，$f(u_{i,\alpha(i)+1}u_{i,\alpha(i)})>f(u_{i,1}u_{i,a_i})$，$f(u_{i,1}u_{i,a_i})>f(u_{i,\alpha(i)-1}u_{i,\alpha(i)})$，$f(u_{i,2k-1}u_{i,2k})>f(u_{i,2k-1}u_{i,2(k-1)})$ $\left(k\in\left[2,\dfrac{a_i}{4}\right]\right)$，$f(u_{i,3}u_{i,2})>f(u_{i,2}u_{i,1})$.

因此，$f(E(G))=[1,2q-1]^{\circ}$，对于任意的边 $uv,xy\in E(G)$，有 $f(uv)\neq f(xy)$.

综合知：f 满足奇优雅标号的定义，定理证明完毕.

□

图 2 是定理 1 的一个示例.

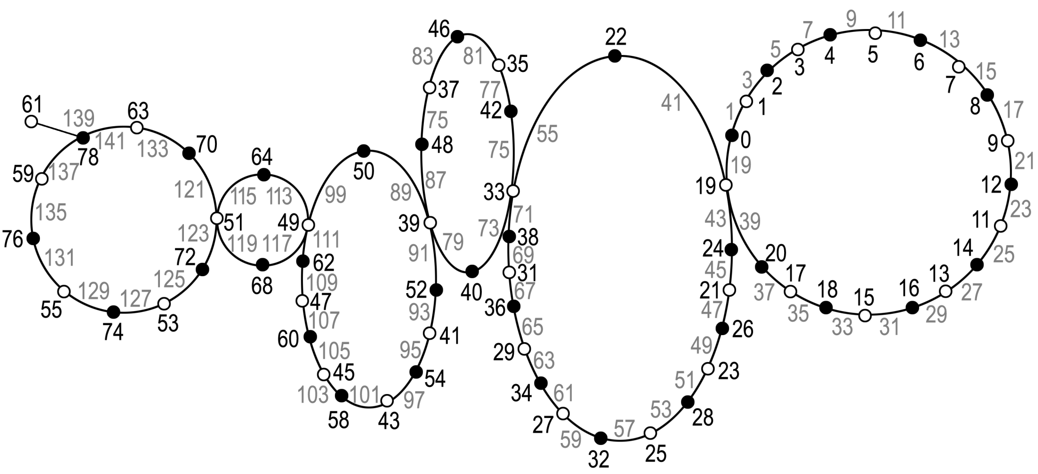

图 2　解释定理 1 的一个例子

Fig. 2　An example for illustrating Theorem 1

定理2 若圈龙图 $D\langle C_i\rangle_1^n$ 满足 $a_i\equiv 0(\bmod 4)$ $(i\in[2,n])$，$a_1\equiv 2(\bmod 4)$，那么在其上通过任意加叶子得到的多毛圈龙图 $HD\langle C_i\rangle_1^n$ 是奇优雅图.

证明 令 $\alpha(i)=a_i/2$，$L(i)=\sum_{j=1}^{i}a_j$，$s=2[L(n)+1]$，$F(i)=\sum_{j=i}^{n}a_j(i\in[1,n])$，$F(n+1)=0$，$F^*(i)=\sum_{j=i}^{n}\alpha(j)(i\in[2,n])$，$F^*(n+1)=0$，$L^*(k)=\sum_{j=1}^{k}\alpha(j)(k\in[1,n-1])$.

设圈龙图 $D\langle C_i\rangle_1^n=G$ 具有奇优雅标号 f，且 $|E(G)|=q$. 由引理1，得 G 是二部图，它的顶点集为 $V(G)=X\cup Y$，此时 $X=\{u_i|i\in[1,s]\}$，$Y=\{v_j|j\in[1,t]\}$ 且 $s+t=|V(G)|$. 由定理1，得 f 是奇优雅的. 令 $f(u_{k+F^*(i+1)})=f(u_{i,2k-1})(k\in[1,\alpha(i)])$，$f(u_sv_1)=f(u_{1,a_1-1}\,u_{1,a_1})$，$f(v_1)=f(u_{1,a_1})$，$f(v_2)=f(w)$，$f(v_{\alpha(1)+2-k})=f(u_{1,2k})$ $(k\in[1,\alpha(1)-1])$，$f(v_{\alpha(i)-k+L^*(i-1)-i+3})=f(u_{i,2k})(i\in[2,n],k\in[1,\alpha(i)-1])$，$f(v_t)=f(u_{n,2})=F(n+1)+1=1$. 显然，每个 $f(u_i)(i\in[1,s])$ 是偶数，每个 $f(v_j)(j\in[1,t])$ 是奇数.

在圈龙图 G 上，对任意的顶点添加任意片叶子（也可以不添加叶子），得到了一个多毛圈龙图 $HD\langle C_i\rangle_1^n=G^*$. 设 u_i 的叶子集是 $\{u_{i,1},u_{i,2},\cdots,u_{i,l_i}\}$，$v_j$ 的叶子集是 $\{v_{j,1},v_{j,2},\cdots,v_{j,k_j}\}$，其中 $l_i\geqslant 0$，$k_j\geqslant 0$，$i\in[1,s]$，$j\in[1,t]$，$M(s)=\sum_{i=1}^{s}l_i$，$N(t)=\sum_{j=1}^{t}k_j$. 因此，$|V(G^*)|=|V(G)|+M(s)+N(t)=p'$，$|E(G^*)|=|E(G)|+M(s)+N(t)=q'$. 下面给多毛圈龙图 G^* 定义一个如下的标号函数 g：

(i) 令 $g(u_i)=f(u_i)(i\in[1,s])$，$g(v_j)=f(v_j)(j\in[1,t])$.

(ii) 令 $g(u_1u_{1,1})=2q'-1$，$g(u_{1,1})=g(u_1u_{1,1})-g(u_1)=2q'-1$，其中 $g(u_1)=0$. 定义多毛圈龙图 G^* 的边标号为 $g(u_1u_{1,j})=2q'+1-2j(j\in[1,l_1])$，其顶点标号为 $g(u_{1,j})=g(u_1u_{1,j})-g(u_1)=2q'+1-2j(j\in[1,l_1])$.

再定义多毛圈龙图 G^* 的边标号为 $g(u_iu_{i,j})=2q'+1-2\left(j+\sum_{q=1}^{i-1}l_q\right)$，以及顶点标号为 $g(u_{i,j})=g(u_iu_{i,j})-g(u_i)(j\in[1,l_i],i\in[2,s])$.

(iii) 令 $g(v_1v_{1,1})=2q+1$，$g(v_{1,1})=g(v_1v_{1,1})-g(v_1)$，定义多毛圈龙图 G^* 的边标号为 $g(v_1v_{1,l})=2q-1+2l(l\in[1,k_1])$，顶点标号为 $g(v_{1,l})=g(v_1v_{1,l})-g(v_1)(l\in[1,k_1])$. 最后定义多毛圈龙图 G^* 的边标号 $g(v_iv_{i,j})=2q-1+2\left(j+\sum_{q=1}^{i-1}k_q\right)$，以及它的顶点标号 $g(v_{i,j})=g(v_iv_{i,j})-g(v_i)(j\in[1,k_i],i\in[2,t])$.

根据标号 g 的定义，有 $g(u_iu_{i,j})=[g(u_{i,j})+g(u_i)](\bmod 2q')=g(u_{i,j})+g(u_i)(j\in[1,l_i],i\in[1,s])$. $g(v_iv_{i,j})=[g(v_{i,j})+g(v_i)](\bmod 2q')=g(v_{i,j})+g(v_i)(j\in[1,k_i],i\in[1,t])$.

下面证明 g 是多毛圈龙图 G^* 的奇优雅标号，叙述里省略"$(\bmod 2q')$".

(1) 下证 $g:V(G^*)\to[0,2q'-1]$. 对于任意的顶点 $u,v\in V(G^*)$，有 $g(u)\neq g(v)$.

显然，每个 $g(u_i)(i\in[1,s])$ 是偶数，每个 $g(v_j)(j\in[1,t])$ 是奇数；每个 $g(u_{i,j})(j\in[1,l_i],i\in[1,s])$ 是奇数，每个 $g(v_{l,r})(r\in[1,k_l],l\in[1,t])$ 是偶数. 注意到 $0\leqslant g(u_i)<g(u_{i+1})\leqslant 2q-2$ $(i\in[1,s-1])$，$1\leqslant g(v_{j+1})<g(v_j)\leqslant 2q-1(j\in[1,t-1])$. 而且 $g(u_sv_1)=g(u_s)+g(v_1)=2q-1$，$g(v_t)=1$，$g(u_1v_t)=g(u_1)+g(v_t)=1$.

根据标号 g 的定义，有 $g(u_iu_{i,j})>g(u_iu_{i,j+1})\geqslant 2q+1(j\in[1,l_i-1],i\in[1,s])$；$g(u_iu_{i,l_i})>g(u_{i+1}u_{i+1,1})\geqslant 2q+1(i\in[1,s-1])$；$2q+1\leqslant g(v_iv_{i,j})<g(v_iv_{i,j+1})(j\in[1,k_i-1],i\in[1,t])$，$2q+1\leqslant g(v_iv_{i,k_i})<g(v_{i+1}v_{i+1,1})(i\in[1,t-1])$. 进一步，有 $2q'-1\geqslant g(u_{i,j})>g(u_{i,j+1})>0(j\in[1,l_i-1],i\in[1,s])$，$2q'-1\geqslant g(u_{i,l_i})>g(u_{i+1,1})>0(i\in[1,s-1])$；$0<g(v_{i,j})<g(v_{i,j+1})<2q'-1(j\in[1,k_i-1],i\in[1,t])$，$0<g(v_{i,k_i})<g(v_{i+1,1})<2q'-1(i\in[1,t-1])$.

因为

$$g(u_sv_1)=g(v_1)+g(u_s)=2q-1,$$
$$g(v_1v_{1,1})=g(v_1)+g(v_{1,1})=2q+1$$

以及

$$2q'+1\geqslant g(u_su_{s,l_s})=g(u_{s,l_s})+g(u_s)=$$
$$2q'+1-2\sum_{q=1}^{s}l_q=$$

$$2(q+M(t))+1\geqslant 2q+1$$

因此 $g(u_{s,l_s})>g(v_1)$，$g(v_{1,1})>g(u_s)$. 故当 $u\neq v$ $(u,v\in V(G^*))$时，总有 $g(u)\neq g(v)$，$g(V(G^*))\subset[0,2|E(G^*)|-1]$.

(2)证明 $g(E(G^*))=[1,2q'-1]^o$. 多毛圈龙图 G^* 的边标号由两部分组成：$\{g(uv)\mid uv\in E(G^*)-E(G)\}=[2q+1,2q'-1]^o$ 和 $\{g(uv)\mid uv\in E(G)\subseteq E(G^*)\}=[1,2q-1]^o$，也就是说，$g(E(G^*))=[1,2|E(G^*)|-1]^o$，满足奇优雅标号的定义，定理 2 得证. □

解释定理 2 的一个例子在图 3 中给出。

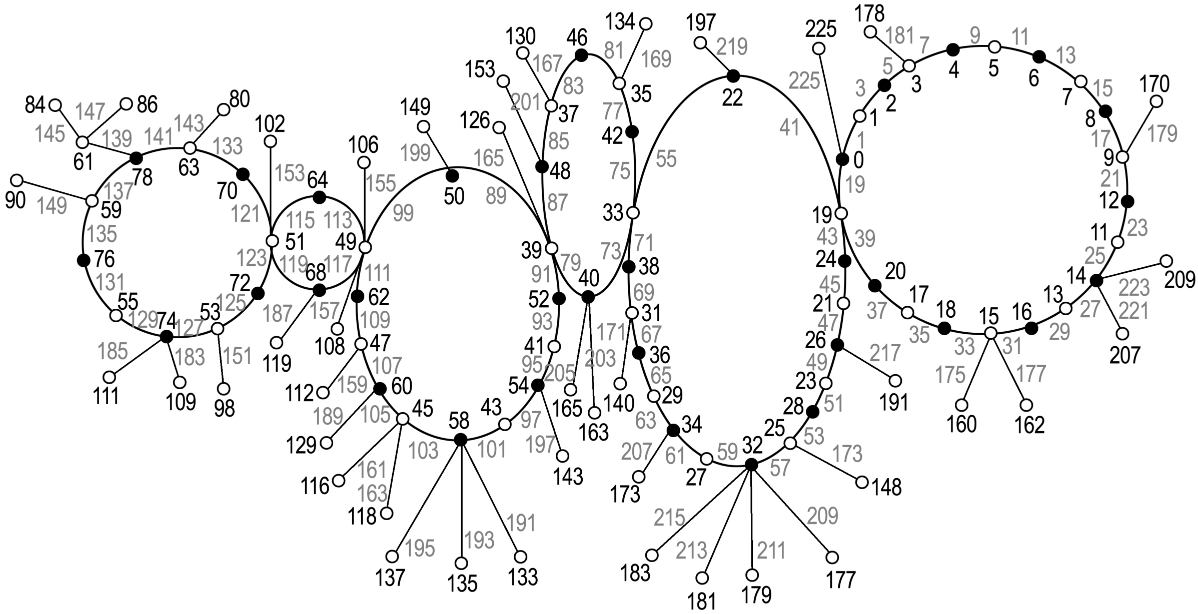

图 3　解释定理 2 的一个例子

Fig. 3　An example for illustrating Theorem 2

3　结　语

本文探索了圈龙图和多毛圈龙图的奇优雅性. 定理 1 证明了圈龙图具有奇优雅标号，定理 2 证明了多毛圈龙图也具有奇优雅标号. 进一步研究发现多毛圈龙图完美地继承了圈龙图具有奇优雅标号的性质. 需要注意的是，本文的圈龙图的圈 C_i 和 C_{i+1} 的连接点不能够任意，那么连接点任意的圈龙图的图是否也具有奇优雅标号呢？另外，多毛圈龙图是通过对圈龙图加叶子得来的，并且良好地继承了圈龙图具有奇优雅标号的性质，那么这种加叶子的方法是不是可以应用于所有的图，并且新图是否依然继承了原图的标号性质，这些都是今后需要继续研究的课题.

参考文献：

[1] ROSA A. On certain valuation of the vertices of a graph [M] // ROSENSTIEHL P. **Theory of Graphs**. New York: Gordon and Breach, 1967: 349-355.

[2] CHENG Hui, YAO Bing, CHEN Xiang′en, *et al*. On graceful generalized spiders and caterpillars [J]. **Ars Combinatoria**, 2008, **87**: 181-191.

[3] KOTZIG A, ROSA A. Magic valuations of finite graphs [J]. **Canadian Mathematical Bulletin**, 1970, **13**: 451-461.

[4] 姚　明，姚　兵，赵振学. 关于太阳图魔幻标号的若干结果[J]. 甘肃科学学报，2015，**27**(4): 1-5.
YAO Ming, YAO Bing, ZHAO Zhenxue. Some results on the magic labelling of sun-graphs [J]. **Journal of Gansu Sciences**, 2015, **27**(4): 1-5. (in Chinese)

[5] 刘信生，刘元元，姚　兵，等. 龙图的优美性[J]. 兰州理工大学学报，2013，**39**(3): 133-135.
LIU Xinsheng, LIU Yuanyuan, YAO Bing, *et al*. Gracefulness of dragon graphs [J]. **Journal of Lanzhou University of Technology**, 2013, **39**(3):

133-135. (in Chinese)

[6] 王宏宇，姚 兵，杨 超. 一类特殊对称图的边魔幻性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2013，**36**(1):28-33.
WANG Hongyu, YAO Bing, YANG Chao. The edge-magic property of a special class of edge-symmetric graphs [J]. **Journal of Sichuan Normal University (Natural Science)**, 2013, **36**(1):28-33. (in Chinese)

[7] FU Mingyan, LIU Xiaodong, WANG Ligong, *et al*. The graceful property of a kind of string graphs [J]. **Journal of Southwest University for Nationalities (Natural Science Edition)**, 2005, **31**(6):843-851.

[8] GALLIAN J A. A dynamic survey of graph labeling [J]. **The Electronic Journal of Combinatorics**, 2013, **14**:DS6.

[9] 周向前. 关于图的优美、奇优美、奇优雅标号的研究[D]. 兰州:西北师范大学，2012.
ZHOU Xiangqian. The research on graceful, odd-graceful and odd-elegant labelings of graphs [D]. Lanzhou:Northwest Normal University, 2012. (in Chinese)

[10] ZHOU Xiangqian, YAO Bing, CHEN Xiang′en. Every lobster is odd-elegant [J]. **Information Processing Letters**, 2013, **113**(1/2):30-33.

[11] YANG Sihua, YAO Bing, ZHANG Wanjia, *et al*. On odd-elegant properties of generalized sun-graphs [C] // **2014 IEEE 7th Joint International Information Technology and Artificial Intelligence Conference, ITAIC 2014**. Piscataway: IEEE, 2014: 392-396.

[12] XIE Jianmin, YAO Bing, ZHAO Tinggang. An algorithm and its implementation for odd-elegant labeling of general sun graph $S_{m,n}$ [J]. **Journal of Shandong University (Natural Science)**, 2016, **51**(4):79-85.

[13] XIE Jianmin, YAO Bing, HONG Wenmei. Odd-elegant labeling algorithm of generalized ring core networks [C] // **2016 6th International Conference on Machinery, Materials, Environment, Biotechnology and Computer (MMEBC 2016)**. Amsterdam: Atlantis Press, 2016.

[14] WANG Hongyu, XU Jin, YAO Bing. Exploring new cryptographical construction of complex network data [C] // **2016 IEEE First International Conference on Data Science in Cyberspace (DSC)**. Piscataway: IEEE, 2016:155-160.

[15] BONDYJ A, MURTY U S R. **Graph Theory with Applications** [M]. Amsterdam: North-Holland, 1976.

[16] ZHOU Xiangqian, YAO Bing, CHEN Xiang′en, *et al*. A proof to the odd-gracefulness of all lobsters [J]. **Ars Combinatoria**, 2012, **103**:13-18.

On odd-elegant quality of cyclic-dragon graphs

SUN Hui[1], YAO Bing*[1,2]

(1. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;
2. School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Graph labellings mainly include (odd-) graceful labellings, harmonious labellings, felicitous labellings, magic types of labellings. As known, (haired) cyclic-dragon graphs can be used to computer network models. The odd-elegant quality of (haired) cyclic-dragon graphs is proved, and the proof methods can be easily translated into algorithm. The work provides theoretical basis and feasible tools for cryptology and distinguishing research in networks.

Key words: cyclic-dragon graphs; haired cyclic-dragon graphs; odd-elegant labelling; leaf; odd-elegant graph