文章编号：1000-8608(2017)06-0657-06

完全二部图优美性质探索

把丽娜， 刘 倩， 刘信生， 姚 兵*

（西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070）

摘要：图论的二部图及其标号在实际应用中较多，尤其最近图标号被应用于新型的图形密码设计. 首先构造出了组合完全二部图与串联完全二部图，发现了一种叫做奇边魔幻全标号的标号，并给出了组合完全二部图具有奇边魔幻全标号的证明. 此外，得出了串联完全二部图是优美图、(k,d)-优美图的结论.

关键词：树；完全二部图；优美标号；(k,d)-优美标号

中图分类号：O157.5　　**文献标识码**：A　　**doi**：10.7511/dllgxb201706016

0 引 言

图的标号设计是图论中具有实际应用背景的研究课题. 在图论的研究中，图的第一个标号问题是在20世纪60年代由Ringel[1]提出的，人们根据应用的需要发现了许多关于简单图的标号和猜想. 优美图是图的标号理论中十分重要的课题之一. 1966年，Rosa在其关于图同构分解问题的研究中提出了关于优美树的猜想，认为“所有的树图都是优美的”[2]. 猜想的提出引起了图论研究者的广泛关注，使得包括优美标号、奇优美标号在内的图标号问题研究得到了空前的发展. 图的优美标号问题是组合数学研究专题，它不仅属于图论的领域而且在设计理论的范畴. 优美图在物流运输、编码理论、雷达、天文学、电路设计等方面都有应用[3]. 优美图是图论中的一个重要分支，研究优美图标号问题有助于研究其他类型的图标号问题，定义一个图的顶点标号是图的顶点集到整数集的映射，边标号是图的边集到整数集的映射[4]. 根据对映射的不同要求，新的图标号以及新问题不断涌现. 经过多年的研究，目前已经有许多关于优美图的研究成果，也导致了一大批新的标号产生. 例如：(k,d)-优美标号、边魔幻标号、反魔幻标号、幸福标号及和谐标号等[5].

一个图G是二部图，如果它的顶点集$V(G)$可以分成两个子集X和Y，且图G中的每一条边都有一个顶点在X中，另一个顶点在Y中，图G可以记作$G(X,Y)$. 如果在二部图$G(X,Y)$中，X中的每个顶点都与Y中每个顶点相连，则称$G(X,Y)$为完全二部图，若X中有m个顶点，Y中有n个顶点，则完全二部图$G(X,Y)$记为$K_{m,n}$[6].

本文所提到的图都是简单的、无向的并且是有限的，所定义的记号同文献[4]. 为叙述方便，把一个有p个顶点和q条边的图叫做(p,q)-图G. 设(p,q)-图G有一个映射$f:V(G)\to[0,q]$. 记$f(V(G))=\{f(u):u\in V(G)\}$，$f(E(G))=\{f(uv)=|f(u)-f(v)|:uv\in E(G)\}$.

本文中用到的$[m,n]$是指集合$\{m,m+1,m+2,\cdots,n\}$，即从m到n的自然数；$[s,t]^{o}$表示奇数集合$\{s,s+2,s+4,\cdots,t\}$，即从s到t的全体奇数；$[k,l]^{e}$表示偶数集合$\{k,k+2,k+4,\cdots,l\}$，即从k到l的全体偶数[7]. 文中未给出的符号及定义参见文献[4].

1 基本概念

定义 1[5-7] 如果(p,q)-图G有一个映射$f:V(G)\to[0,q]$，使得图G中任意两个顶点x、y满足$f(x)\neq f(y)$且定义边$uv\in E(G)$的标号为$f(uv)=|f(u)-f(v)|$. 当$\{f(uv):uv\in E(G)\}=[1,q]$时，则称$f$为图$G$的一个优美标号，图$G$为

收稿日期：2017-05-13；　**修回日期**：2017-10-13.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(61163037,61163054,61363060).
作者简介：把丽娜(1992-)，女，硕士生，E-mail：917622578@qq.com；姚 兵*(1956-)，男，教授，E-mail：yybb918@163.com.

优美图.

定义 2[8] 对于给定的(p,q)-图G,如果存在一个映射$f:V(G)\to[0,k+(q-1)d]$,使得图G中任意两个顶点x、y满足$f(x)\neq f(y)$且边标号集合$f(E(G))=\{k,k+d,k+2d,\cdots,k+(q-1)d\}$,则称$f$为图$G$的一个$(k,d)$-优美标号,图$G$为$(k,d)$-优美图.

定义 3 对于给定的(p,q)-图G,如果存在一个映射$f:V(G)\to[0,2q-1]$,使得图G中任意两个顶点x、y满足$f(x)\neq f(y)$且定义边$uv\in E(G)$的标号为$f(uv)=f(u)+f(v)$. 当$\{f(uv):uv\in E(G)\}=[1,2q-1]^{\circ}$时,则称$f$为图$G$的一个奇边魔幻全标号,图$G$为奇边魔幻图.

图1是组合完全二部图的示意图,它由支架与完全二部图组成,而支架是由顶点$a_1,a_2,\cdots,a_s$依次连接,完全二部图则是由图$G_i(i\in[1,s])$构成,G_i即为$K_{m,n}$. 其中$V(G_i)=\{a_i,b_{i,t},c_{i,k}\mid t\in[1,m],k\in[1,n],i\in[1,s]\}$,$E(G_i)=\{a_ib_{i,1},b_{i,t}c_{i,k},a_ia_{i+1}\mid t\in[1,m],k\in[1,n],i\in[1,s]\}$,再将每个完全二部图$G_i$中的$a_i(i\in[1,s])$相连.

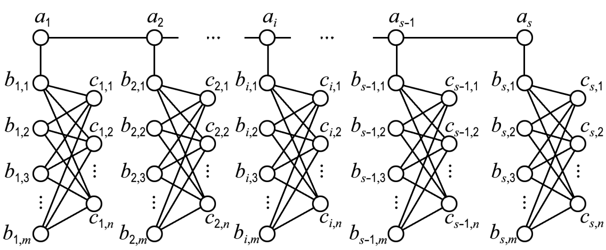

图1 一个组合完全二部图

Fig. 1 A combinatoric complete bipartite graphs

图2是串联完全二部图示意图,它由n个完全二部图依次连接而成,完全二部图则是由图G_i构成,G_i即为K_{m_i,n_i},其中$V(G_i)=\{b_{i,t_i},c_{i,k_i}\mid i\in[1,s],t_i\in[1,m_i],k_i\in[1,n_i]\}$,$E(G_i)=\{b_{i,t_i}c_{i,k_i},b_{i,1}c_{i-1,n}\mid i\in[1,s],t_i\in[1,m_i],k_i\in[1,n_i]\}$.

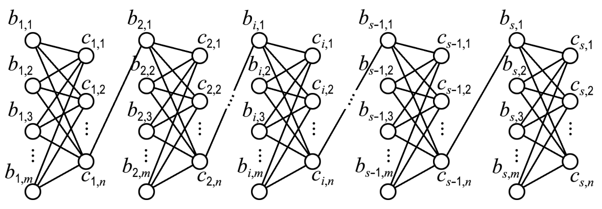

图2 一个串联完全二部图

Fig. 2 A series complete bipartite graphs

2 主要结论

定理 1 组合完全二部图具有奇边魔幻标号.

证明 设图G是组合完全二部图,定义图G的一个标号f:令$f(b_{1,1})=0$. 对$i\in[1,s]$,$t\in[1,m]$,$k\in[1,n]$分情形证明.

若$m=3$,$n=4$. 当$s=1$时,有

$f(b_{1,2})=8$, $f(b_{1,3})=16$; $f(c_{1,1})=1$,

$f(c_{1,2})=3$, $f(c_{1,3})=5$, $f(c_{1,4})=7$;

$f(b_{1,t}c_{1,k})=2(t-1)n+(2k-1)$;

$f(a_1b_{1,1})=f(b_{1,3}c_{1,4})+2$

即结论成立.

当$s\geqslant2$,i为奇数,且m、n为任意数时,边标号如下:

$$f(b_{i,t}c_{i,k})=2(mn+2)(i-1)+2n(t-1)+2k-1;$$

$$f(a_ib_{i,1})=2mn+1+2(mn+2)(i-1);$$

$$f(a_ia_{i+1})=2mn+3+2(mn+2)(i-1)$$

当i为偶数时,边标号如下:

$$f(b_{i,t}c_{i,k})=2m+7+2(mn-1)-2(k-1)-2(t-1)n+2(mn+2)(i-2);$$

$$f(a_ib_{i,1})=2mn+5+2(mn+2)(i-2);$$

$$f(a_ia_{i+1})=2mn+9+2(mn-1)+2(mn+2)(i-2)$$

顶点标号如下:

$$f(a_1)=f(a_1b_{1,1})-f(b_{1,1});$$

$$f(a_{i+1})=f(a_ia_{i+1})-f(a_i);$$

$$f(b_{i,1})=f(a_ib_{i,1})-f(a_i);$$

$$f(c_{i,k})=f(b_{i,1}c_{i,k})-f(b_{i,1});$$

$$f(b_{i,t})=f(b_{i,t}c_{i,k})-f(c_{i,k});$$

$$f(c_{1,k})=f(b_{1,1}c_{1,k})-f(b_{1,1});$$

$$f(b_{1,t})=f(b_{1,t}c_{1,k})-f(c_{1,k})$$

根据上述标号可知,图G的边$f(b_{i,t}c_{i,k})$、$f(a_ib_{i,1})$、$f(a_ia_{i+1})$标号均为奇数.

下证所有边标号在$[1,2q-1]^{\circ}$中. 在上述的公式中可知,当$i=1$时,$f(b_{1,1}c_{1,1})=1$是最小的,$f(b_{1,1}c_{1,2})=3$,$f(b_{1,1}c_{1,3})=5$. 类推得$f(b_{1,1}c_{1,n})=2n-1$,则这n条边的边标号均在$[1,2n-1]^{\circ}$中.

将$f(b_{1,1}c_{1,1})$代入上述式中可得$f(b_{1,2}c_{1,1})=2n+1$,$f(b_{1,2}c_{1,2})=2n+3$,$\cdots$,$f(b_{1,2}c_{1,n})=4n-1$,则这n条边的边标号被包含在$[2n+1,4n-1]^{\circ}$里.

由公式知，$f(b_{1,m}c_{1,1})=2n(m-1)+1$，$f(b_{1,m}c_{1,2})=2n(m-1)+3,\cdots,f(b_{1,m}c_{1,n})=2nm-1$，由 $f(b_{1,m}c_{1,1}),f(b_{1,m},c_{1,2}),\cdots,f(b_{1,m}c_{1,n})$构成的集合为$[2n(m-1)+1,2nm-1]^{\circ}$.

当 $i=1$ 时，$f(a_1b_{1,1})=2nm+1$，$f(a_1a_2)=2nm+3$.

当 $i=2$ 时，$f(b_{2,m}c_{2,n})=2nm+7$，$f(b_{2,m}c_{2,n-1})=2nm+9,\cdots,f(b_{2,m}c_{2,1})=2n(m+1)+5$，显然 n 条边的边标号所在的集合为$[2nm+7,2n(m+1)+5]^{\circ}$. 且 $f(a_2b_{2,1})=2nm+5$.

当 $i=2,t=m-1,k=n$ 时，$f(b_{2,m-1}c_{2,n})=2n(m+1)+7$，$f(b_{2,m-1}c_{2,n-1})=2n(m+1)+9$，依此类推，得出 $f(b_{2,m-1}c_{2,1})=2n(m+2)+5$，有

$\{f(b_{2,m-1}c_{2,n}),f(b_{2,m-1}c_{2,n-1}),\cdots,f(b_{2,m-1}c_{2,1})\}=[2n(m+1)+7,2n(m+2)+5]^{\circ}$

当 $i=2,t=1,k=n$ 时，$f(b_{2,1}c_{2,n})=4mn-2n+7$，$f(b_{2,1}c_{2,n-1})=4mn-2n+9,\cdots,f(b_{2,1}c_{2,1})=4mn+5$，则这 n 条边的边标号包含在$[4mn-2n+7,4mn+5]^{\circ}$ 中. 且 $f(a_2a_3)=4mn+7$.

当 $i=3$ 时，$f(b_{3,1}c_{3,1})=4mn+9$. 依次下去标出整个图. 若 s 为奇数，则最大的边标号为 $f(a_sb_{s,1})=2(smn+2s-1)-1$；若 s 为偶数，则最大的边标号为 $f(b_{s,1}c_{s,1})=2(smn+2s-1)-1$.

由上述标号可得 $f(V(G))\rightarrow[0,2q-1]$，$f(E(G))=[1,2q-1]^{\circ}$(其中 $q=smn+2s-1$，表示图的总边数)，$f(uv)=f(u)+f(v)$. 则 f 是一个奇边魔幻全标号，图 G 是奇边魔幻图.

一个具有奇边魔幻全标号的组合完全二部图在图 3 中给出.

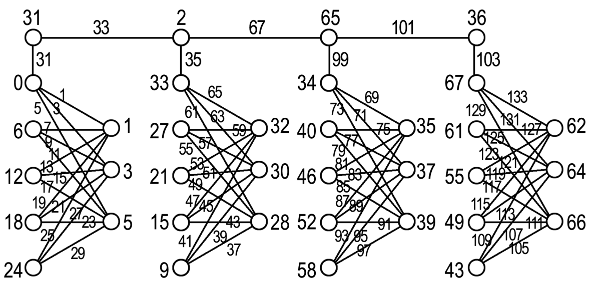

图 3　奇边魔幻全标号图

Fig. 3　An edge-odd-magical total labelling graph

定理 2　若图 G 是串联完全二部图，则图 G 有优美标号.

证明　对于完全二部图 $K_{m,n}$，其中 X 中有 m 个点，Y 中有 n 个点，则完全二部图 $K_{m,n}$ 有 mn 条边，有如图 4 所示的优美标号. 设 f 为图 G 的标号.

情形 1　若存在 s 个完全二部图，使每个完全二部图中的 m 为定值，n 为变动的，即 $m_i=m_j$，$n_i\neq n_j$. 下面把 s 个完全二部图连成一个串联完全二部图，并使得图 G 满足优美标号，注意到图 G 有$(s-1)+m\sum\limits_{i=1}^{s}n_i$ 条边. 令 $f(b_{1,1})=0$. 若 $m=3$，$n_1=4,n_2=6$，当 $s=2$ 时，有

$f(b_{1,2})=1$，$f(b_{1,3})=2$；$f(c_{1,1})=31$，
$f(c_{1,2})=28$，$f(c_{1,3})=25$，$f(c_{1,4})=22$；
$f(b_{2,1})=3$，$f(b_{2,2})=4$，$f(b_{2,3})=5$；
$f(c_{2,1})=21$，$f(c_{2,2})=18$，$f(c_{2,3})=15$，
$f(c_{2,4})=12$，$f(c_{2,5})=9$，$f(c_{2,6})=6$；
$f(b_{2,3}c_{2,6})=1$，$f(b_{2,2}c_{2,6})=2$，$f(b_{2,1}c_{2,6})=3$；
$f(b_{2,3}c_{2,5})=4$，$f(b_{2,2}c_{2,5})=5$，$f(b_{2,1}c_{2,5})=6$；
$f(b_{2,3}c_{2,4})=7$，$f(b_{2,2}c_{2,4})=8$，$f(b_{2,1}c_{2,4})=9$；
$f(b_{2,3}c_{2,3})=10$，$f(b_{2,2}c_{2,3})=11$，$f(b_{2,1}c_{2,3})=12$；
$f(b_{2,3}c_{2,2})=13$，$f(b_{2,2}c_{2,2})=14$，$f(b_{2,1}c_{2,2})=15$；
$f(b_{2,3}c_{2,1})=16$，$f(b_{2,2}c_{2,1})=17$，$f(b_{2,1}c_{2,1})=18$；
$f(b_{2,1}c_{1,4})=19$；$f(b_{1,3}c_{1,4})=20$，$f(b_{1,2}c_{1,4})=21$，
$f(b_{1,1}c_{1,4})=22$；$f(b_{1,3}c_{1,3})=23$，$f(b_{1,2}c_{1,3})=24$，
$f(b_{1,1}c_{1,3})=25$；$f(b_{1,3}c_{1,2})=26$，$f(b_{1,2}c_{1,2})=27$，
$f(b_{1,1}c_{1,2})=28$；$f(b_{1,3}c_{1,1})=29$，$f(b_{1,2}c_{1,1})=30$，
$f(b_{1,1}c_{1,1})=31$

可知它满足优美标号的条件.

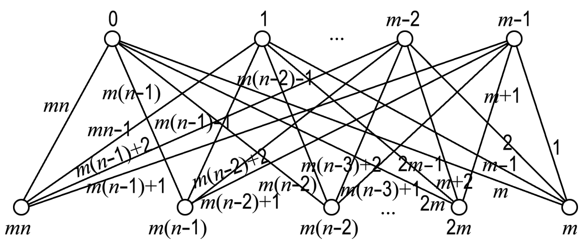

图 4　一个完全二部图

Fig. 4　A complete bipartite graph

推广到一般情况可按以下过程进行顶点标号：

$f(b_{1,1})=0$；$f(b_{i,t})=(i-1)m+(t-1)$；

$f(c_{1,1})=m\sum\limits_{i=1}^{s}n_i+(s-1)$；

$f(c_{1,k_1})=m\sum\limits_{i=1}^{s}n_i+(s-1)-m(k_1-1)$，

$f(c_{i,k_i})=f(c_{i-1,n})-1-(k_i-1)m$

可按以下过程进行边标号：$f(c_{i,k_i}b_{i,t})=$

$f(c_{i,k_i})-f(b_{i,t})$；$f(c_{i,n}b_{i+1,1})=f(c_{i,n})-f(b_{i+1,1})$. 其中 $i\in[1,s]$，$t\in[1,m]$，$k_i\in[1,n_i]$.

可知，$f(b_{1,1}c_{1,1})$，$f(b_{1,2}c_{1,1})$，$f(b_{1,3}c_{1,1})$，…，$f(b_{1,m}c_{1,1})$ 分别是 $q,q-1,q-2,\cdots,q-m+1$；$f(b_{1,1}c_{1,2})$，$f(b_{1,2}c_{1,2})$，$f(b_{1,3}c_{1,2})$，…，$f(b_{1,m}c_{1,2})$ 分别等于 $q-m,q-m-1,q-m-2,\cdots,q-2m+1$；依次下去，$f(b_{1,1}c_{1,n_1})$，$f(b_{1,2}c_{1,n_1})$，$f(b_{1,3}c_{1,n_1})$，…，$f(b_{1,m}c_{1,n_1})$ 的值是 $q-(n_1-1)m$，$q-(n_1-1)m-1$，$q-(n_1-1)m-2$，…，$q-n_1m+1$；…；$f(b_{2,1}c_{1,n_1})=q-n_1m$，$f(b_{2,1}c_{2,1})$，$f(b_{2,2}c_{2,1})$，$f(b_{2,3}c_{2,1})$，…，$f(b_{2,m}c_{2,1})$ 为 $q-n_1m-1,q-n_1m-2,q-n_1m-3,\cdots,q-(n_1+1)m$.

边 $b_{2,1}c_{2,2}$，$b_{2,2}c_{2,2}$，$b_{2,3}c_{2,2}$，…，$b_{2,m}c_{2,2}$ 所对应的标号分别为 $q-(n_1+1)m-1$，$q-(n_1+1)m-2$，$q-(n_1+1)m-3$，…，$q-(n_1+2)m$；依次下去，$f(b_{2,1}c_{2,n_2})$，$f(b_{2,2}c_{2,n_2})$，$f(b_{2,3}c_{2,n_2})$，…，$f(b_{2,m}c_{2,n_2})$ 分别为 $q-(n_1+n_2-1)m-1$，$q-(n_1+n_2-1)m-2$，$q-(n_1+n_2-1)m-3$，…，$q-(n_1+n_2)m$；$f(b_{2,m}c_{3,1})=q-(n_1+n_2)m-1$，…，$f(b_{s-1,m}c_{s,1})=n_sm+1$，$f(b_{s,1}c_{s,1})$，$f(b_{s,2}c_{s,1})$，$f(b_{s,3}c_{s,1})$，…，$f(b_{s,m}c_{s,1})$ 与数值 n_sm，n_sm-1，n_sm-2，…，$(n_s-1)m+1$ 对应相等；$f(b_{s,1}c_{s,2})$，$f(b_{s,2}c_{s,2})$，$f(b_{s,3}c_{s,2})$，…，$f(b_{s,m}c_{s,2})$ 的值是 $(n_s-1)m$，$(n_s-1)m-1$，$(n_s-1)m-2$，…，$(n_s-2)m+1$；依次下去，$f(b_{s,1}c_{s,n_s})$，$f(b_{s,2}c_{s,n_s})$，$f(b_{s,3}c_{s,n_s})$，…，$f(b_{s,m}c_{s,n_s})$ 与 $m,m-1,m-2,\cdots,1$ 对应相等.

情形2 每个完全二部图中的 m 为变动的，n 为定值，即 $m_i\neq m_j$，$n_i=n_j$. 把 s 个完全二部图连成一个串联完全二部图，下证图 G 满足优美标号，其中图 G 共有 $(s-1)+n\sum_{i=1}^{s}m_i$ 条边. 对 $i\in[1,s]$，$t_i\in[1,m_i]$，$k\in[1,n]$.

若 $n=3$，$m_1=4$，$m_2=6$. 当 $s=2$ 时，有

$f(b_{1,1})=0$，$f(b_{1,2})=1$，$f(b_{1,3})=2$，
$f(b_{1,4})=3$；$f(c_{1,1})=31$，$f(c_{1,2})=27$，
$f(c_{1,3})=23$；$f(b_{2,1})=4$，$f(b_{2,2})=5$，
$f(b_{2,3})=6$，$f(b_{2,4})=7$，$f(b_{2,5})=8$，
$f(b_{2,6})=9$；$f(c_{2,1})=22$，$f(c_{2,2})=16$，
$f(c_{2,3})=10$；$f(b_{2,6}c_{2,3})=1$，$f(b_{2,5}c_{2,3})=2$，
$f(b_{2,4}c_{2,3})=3$，$f(b_{2,3}c_{2,3})=4$，$f(b_{2,2}c_{2,3})=5$，
$f(b_{2,1}c_{2,3})=6$；$f(b_{2,6}c_{2,2})=7$，$f(b_{2,5}c_{2,2})=8$，
$f(b_{2,4}c_{2,2})=9$，$f(b_{2,3}c_{2,2})=10$，$f(b_{2,2}c_{2,2})=11$，
$f(b_{2,1}c_{2,2})=12$；$f(b_{2,6}c_{2,1})=13$，$f(b_{2,5}c_{2,1})=14$，
$f(b_{2,4}c_{2,1})=15$，$f(b_{2,3}c_{2,1})=16$，$f(b_{2,2}c_{2,1})=17$，
$f(b_{2,1}c_{2,1})=18$；$f(b_{2,1}c_{1,3})=19$；$f(b_{1,4}c_{1,3})=20$，
$f(b_{1,3}c_{1,3})=21$，$f(b_{1,2}c_{1,3})=22$，$f(b_{1,1}c_{1,3})=23$；
$f(b_{1,4}c_{1,2})=24$，$f(b_{1,3}c_{1,2})=25$，$f(b_{1,2}c_{1,2})=26$，
$f(b_{1,1}c_{1,2})=27$；$f(b_{1,4}c_{1,1})=28$，$f(b_{1,3}c_{1,1})=29$，
$f(b_{1,2}c_{1,1})=30$，$f(b_{1,1}c_{1,1})=31$

可知它满足优美标号的条件.

当 $s>2$ 时，有以下标号过程：

$f(b_{1,1})=0$，$f(b_{1,t_1})=t_1-1$，

$f(b_{2,t_2})=n_1+(t_2-1)$，

$f(b_{3,t_3})=(n_1+n_2)+(t_3-1)$，

$$f(b_{i,t_i})=(\sum_{k=1}^{i-1}n_k)+(t_i-1);$$

$$f(c_{1,1})=n\sum_{i=1}^{s}m_i+(s-1),$$

$$f(c_{1,k})=n\sum_{i=1}^{s}m_i+(s-1)-m_1(k-1),$$

$f(c_{2,1})=f(c_{1,n})-1$，

$f(c_{2,k})=f(c_{2,1})-m_2(k-1)$，

$f(c_{i,1})=f(c_{i-1,n})-1$，

$f(c_{i,k})=f(c_{i,1})-m_i(k-1)$

图 G 的边标号按以下方程进行：

$f(c_{i,k}b_{i,t})=f(c_{i,k})-f(b_{i,t})$；

$f(c_{i,n}b_{i+1,1})=f(c_{i,n})-f(b_{i+1,1})$

有 $f(b_{1,1}c_{1,1})$，$f(b_{1,2}c_{1,1})$，$f(b_{1,3}c_{1,1})$，…，$f(b_{1,m_1}c_{1,1})$ 分别等于 $q,q-1,q-2,\cdots,q-m_1+1$；边 $b_{1,1}c_{1,2}$，$b_{1,2}c_{1,2}$，$b_{1,3}c_{1,2}$，…，$b_{1,m}c_{1,2}$ 的标号分别为 $q-m_1,q-m_1-1,q-m_1-2,\cdots,q-2m_1+1$；…；$f(b_{1,1}c_{1,n_1})$，$f(b_{1,2}c_{1,n_1})$，$f(b_{1,3}c_{1,n_1})$，…，$f(b_{1,m_1}c_{1,n_1})$ 分别为 $q-(n-1)m_1$，$q-(n-1)m_1-1$，$q-(n-1)m_1-2$，…，$q-nm_1+1$；依次下去，$f(b_{2,1}c_{1,n})=q-nm_1$，$f(b_{2,1}c_{2,1})$，$f(b_{2,2}c_{2,1})$，$f(b_{2,3}c_{2,1})$，…，$f(b_{2,m_2}c_{2,1})$ 的值为 $q-nm_1-1$，$q-nm_1-2$，$q-nm_1-3$，…，$q-nm_1-m_2$；$f(b_{2,1}c_{2,2})$，$f(b_{2,2}c_{2,2})$，$f(b_{2,3}c_{2,2})$，…，$f(b_{2,m_2}c_{2,2})$ 分别为 $q-nm_1-m_2-1$，$q-nm_1-m_2-2$，$q-nm_1-m_2-3$，…，$q-n(m_1+m_2)$；…；$f(b_{s,1}c_{s-1,n})=nm_s+1$，$f(b_{s,1}c_{s,1})$，$f(b_{s,2}c_{s,1})$，$f(b_{s,3}c_{s,1})$，…，$f(b_{s,m_s}c_{s,1})$ 与 nm_s，nm_s-1，nm_s-2，…，$(n-1)m_s+1$ 对应相等；$f(b_{s,1}c_{s,2})$，$f(b_{s,2}c_{s,2})$，$f(b_{s,3}c_{s,2})$，…，$f(b_{s,m_s}c_{s,2})$ 分别等于 $(n-1)m_s$，$(n-1)m_s-1$，$(n-1)m_s-2$，…，$(n-$

2) m_s+1；依次下去，$f(b_{s,1}c_{s,n})$，$f(b_{s,2}c_{s,n})$，$f(b_{s,3}c_{s,n})$，…，$f(b_{s,m}c_{s,n})$的值是 m_s，m_s-1，m_s-2，…，1.

情形 3　使完全二部图中的 m、n 均为变动的，即 $m_i\neq m_j$，$n_i\neq n_j$. 下面考察图 G 是否满足优美标号，图 G 有$\sum_{i=1}^{s}(m_in_i)+(s-1)$条边. 对 $i\in[1,s]$，$t_i\in[1,m_i]$，$k_i\in[1,n_i]$，则有

若 $m_1=4$，$m_2=6$，$n_1=3$，$n_2=2$. 当 $s=2$ 时，得

$f(b_{1,1})=0$，$f(b_{1,2})=1$，$f(b_{1,3})=2$，
$f(b_{1,4})=3$；$f(c_{1,1})=25$，$f(c_{1,2})=21$，
$f(c_{1,3})=17$；$f(b_{2,1})=4$，$f(b_{2,2})=5$，
$f(b_{2,3})=6$，$f(b_{2,4})=7$，$f(b_{2,5})=8$，
$f(b_{2,6})=9$；$f(c_{2,1})=16$，$f(c_{2,2})=10$；
$f(b_{2,6}c_{2,2})=1$，$f(b_{2,5}c_{2,2})=2$，$f(b_{2,4}c_{2,2})=3$，
$f(b_{2,3}c_{2,2})=4$，$f(b_{2,2}c_{2,2})=5$，$f(b_{2,1}c_{2,2})=6$；
$f(b_{2,6}c_{2,1})=7$，$f(b_{2,5}c_{2,1})=8$，$f(b_{2,4}c_{2,1})=9$，
$f(b_{2,3}c_{2,1})=10$，$f(b_{2,2}c_{2,1})=11$，$f(b_{2,1}c_{2,1})=12$；
$f(b_{2,1}c_{1,3})=13$；$f(b_{1,4}c_{1,3})=14$，$f(b_{1,3}c_{1,3})=15$，
$f(b_{1,2}c_{1,3})=16$，$f(b_{1,1}c_{1,3})=17$；$f(b_{1,4}c_{1,2})=18$，
$f(b_{1,3}c_{1,2})=19$，$f(b_{1,2}c_{1,2})=20$，$f(b_{1,1}c_{1,2})=21$；
$f(b_{1,4}c_{1,1})=22$，$f(b_{1,3}c_{1,1})=23$，$f(b_{1,2}c_{1,1})=24$，
$f(b_{1,1}c_{1,1})=25$

可知它满足优美标号的条件. 推广到一般情况，可按以下过程进行顶点标号：

$f(b_{1,1})=0$，$f(b_{1,t_1})=t_1-1$；
$f(b_{2,t_2})=n_1+(t_2-1)$，
$f(b_{3,t_3})=n_1+n_2+(t_3-1)$，
$f(b_{i,t_i})=\sum_{k=1}^{i-1}n_k+(t_i-1)$；
$f(c_{1,1})=\sum_{i=1}^{s}(m_in_i)+(s-1)$，
$f(c_{1,k_1})=\sum_{i=1}^{s}(m_in_i)+(s-1)-m_1(k_1-1)$；
$f(c_{2,1})=f(c_{1,n_1})-1$，
$f(c_{2,k_2})=f(c_{2,1})-m_2(k_2-1)$，
$f(c_{i,1})=f(c_{i-1,n_{i-1}})-1$，
$f(c_{i,k_i})=f(c_{i,1})-m_i(k_i-1)$

由上述顶点标号可推导出图 G 的边标号：

$f(c_{i,k_i}b_{i,t_i})=f(c_{i,k_i})-f(b_{i,t_i})$；
$f(c_{i,n_i}b_{i+1,1})=f(c_{i,n_i})-f(b_{i+1,1})$

按上述公式标号可知，第一个完全图的边标号：$f(b_{1,1}c_{1,1})$，$f(b_{1,2}c_{1,1})$，…，$f(b_{1,m_1}c_{1,1})$，…，$f(b_{1,m_1}c_{1,2})$，…，$f(b_{1,m_1}c_{1,n_1})$分别为 q，$q-1$，…，$q-m_1+1$，…，$q-2m_1+1$，…，$q-n_1m_1$，$f(b_{2,1}c_{1,n_1})=q-n_1m_1-1$，按上面的顺序，串联完全二部图的第二个完全二部图的边标号在$[q-(n_1m_1+n_2m_2-2,q-n_1m_1-2)]$内，$f(b_{3,1}c_{2,n_2})=q-(n_1m_1+n_2m_2-3)$，…，$f(b_{s,1}c_{s-1,n})=nm_s+1$，$f(b_{s,1}c_{s,1})$，$f(b_{s,2}c_{s,1})$，$f(b_{s,3}c_{s,1})$，…，$f(b_{s,m_s}c_{s,1})$分别为 nm_s，nm_s-1，nm_s-2，…，$(n-1)m_s+1$；$f(b_{s,1}c_{s,2})$，$f(b_{s,2}c_{s,2})$，$f(b_{s,3}c_{s,2})$，…，$f(b_{s,m_s}c_{s,2})$为$(n-1)m_s$，$(n-1)m_s-1$，$(n-1)m_s-2$，…，$(n-2)m_s+1$；依次下去，$f(b_{s,1}c_{s-1,n_{s-1}})=n_sm_s+1$，第 s 个完全二部图的边标号在$[1,n_sm_s]$中.

综上，可得标号 f 满足 $f:V(G)\to[0,q]$，$f(E(G))=[1,q]$，则串联完全二部图 G 为优美图，f 为图 G 的一个优美标号.

□

推论 1　每个串联完全二部图 G 都有(k,d)-优美标号.

证明　类似定理 1 的分类，进行讨论.

情形 1　完全二部图中的 m 为定值，n 为变动的，即 $m_i=m_j$，$n_i\neq n_j$. 图 G 有 $m\left(\sum_{i=1}^{s}n_i\right)+(s-1)$条边，利用定理 1 的标号 f 作图 G 的一个新标号 g，按以下过程进行顶点标号：

$g(b_{1,1})=f(b_{1,1})d$，$g(b_{i,t})=f(b_{i,t})d$；
$g(c_{1,1})=k+(f(c_{1,1})-1)d$，
$g(c_{1,k_1})=k+(f(c_{1,k_1})-1)d$，
$g(c_{i,k_i})=(f(c_{i,k_i})-1)+k$；
$g(c_{i,k_i}b_{i,t})=g(c_{i,k_i})-g(b_{i,t})$，
$g(c_{i,n}b_{i+1,1})=g(c_{i,n})-g(b_{i+1,1})$

其中 $i\in[1,s]$，$t\in[1,m]$，$k_i\in[1,n_i]$.

情形 2　$m_i\neq m_j$，$n_i=n_j$. 把 s 个完全二部图连成一个串联完全二部图，可计算出图G有 $n\left(\sum_{i=1}^{s}m_i\right)+(s-1)$条边.

$g(b_{1,1})=f(b_{1,1})d$，$g(b_{i,t_i})=f(b_{i,t_i})d$；
$g(c_{1,1})=k+(f(c_{1,1})-1)d$，
$g(c_{1,k})=k+(f(c_{1,k})-1)d$，
$g(c_{i,k})=(f(c_{i,k})-1)d+k$；
$g(c_{i,k}b_{i,t_i})=g(c_{i,k})-g(b_{i,t_i})$，
$g(c_{i,n}b_{i+1,1})=g(c_{i,n})-g(b_{i+1,1})$

其中 $i\in[1,s]$，$t_i\in[1,m_i]$，$k\in[1,n]$.

情形 3　$m_i\neq m_j$，$n_i\neq n_j$. 观察图 G 是否满足(k,d)-优美标号，图 G 有$(s-1)+\sum_{i=1}^{s}m_in_i$ 条边.

$g(b_{1,1})=f(b_{1,1})d$, $g(b_{1,t_1})=f(b_{1,t_1})d$,

$g(b_{i,t_i})=f(b_{i,t_i})d$;

$g(c_{1,1})=(f(c_{1,1})-1)d+k$,

$g(c_{1,k_1})=(f(c_{1,k_1})-1)d+k$;

$g(c_{2,1})=(f(c_{2,1})-1)d+k$,

$g(c_{2,k_2})=(f(c_{2,k_2})-1)d+k$,

$g(c_{i,1})=(f(c_{i,1})-1)d+k$,

$g(c_{i,k_i})=(f(c_{i,k_i})-1)d+k$;

$g(c_{i,k_i}b_{i,t_i})=g(c_{i,k_i})-g(b_{i,t_i})$,

$g(c_{i,n_i}b_{i+1,1})=g(c_{i,n_i})-g(b_{i+1,1})$

其中 $i\in[1,s]$,$t_i\in[1,m_i]$,$k_i\in[1,n_i]$.

综上,标号 g 满足 $g:V(G)\to[0,k+(q-1)d]$ 和 $f(E(G))=\{k,k+d,k+2d,\cdots,k+(q-1)d\}$,则串联完全二部图为$(k,d)$-优美图,标号 g 为的它一个(k,d)-优美标号.

□

3 结语

本文对完全二部图的一些性质做了简要总结,并且在其他标号的基础上研究出一类新的标号:奇边魔幻标号.先对奇边魔幻标号、组合完全二部图、串联完全二部图进行定义,对组合完全二部图、串联完全二部图的性质进行了简单分析,并且证明了组合完全二部图是奇边魔幻图,串联完全二部图是优美图.当然,本文是从最基本的方法出发,显然不够深刻,还需要大量的后续工作来进一步探寻奇边优美标号的性质,以及该标号和这类完全二部图在日常生活中的应用等,从而进一步完善部分完全图的各类标号.

参考文献:

[1] RINGEL G. Problem 25 in theory of graphs and its application [C] // FLEDLER M, ed. **Proceeding of the 4th International Symposium Smolenice**. Prague: Czech Academy of Science, 1963:162-167.

[2] ROSA A. **On Certain Valuation of Vertices of Graph** [M]. New York: Gordon and Breach, 1966: 349-355.

[3] 李振汉,唐余亮,雷 鹰. 基于 ZigBee 的无线传感器网络的自愈功能[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2012, **51**(5):834-838.
LI Zhenhan, TANG Yuliang, LEI Ying. Self-healing function based on wireless sensor networks of ZigBee [J]. **Journal of Xiamen University (Natural Science)**, 2012, **51**(5): 834-838. (in Chinese)

[4] BONDY J A, MURTY U S R. **Graph Theory with Applications** [M]. New York: The Macmillan Press, 1976.

[5] YAO Bing, YAO Ming, CHEN Xiang'en, *et al*. Research on edge-growing models related with scale-free small-world networks [J]. **Applied Mechanics and Materials**, 2013, **513-517**:2444-2448.

[6] GALLIAN J A. A dynamic survey of graph labelling [J]. **The Electronic Journal of Combinatorics**, 2000, **6**:10-18.

[7] LI Lun, ALDERSON D, DOYLE J C, *et al*. Towards a theory of scale-free graphs: definition, properties, and implications [J]. **Internet Mathematics**, 2005, **2**(4):431-523.

[8] ACHARYA B D, HEDGE S M J. Graph theory [J]. **Arithmetic Graphs**, 1990, **2**:275-299.

Exploration of gracefulness of some complete bipartite graphs

BA Lina, LIU Qian, LIU Xinsheng, YAO Bing*

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The bipartite graphs of graph theory and graph labellings are widely used in practical applications, especially recently the graph labelling has been applied to design a new type of graphical password. Firstly, some complete bipartite graphs are constructed by combinatoric and series methods. A new labelling, called edge-odd-magical total labelling, is found and it is proved that the combinatoric complete bipartite graphs admit the edge-odd-magical total labelling. Moreover, series complete bipartite graphs are graceful, or (k,d)-graceful.

Key words: trees; complete bipartite graph; graceful labelling; (k,d)-graceful labelling