文章编号:1000-8608(2018)01-0086-06

脉冲噪声环境下基于最大相关熵准则的仿射投影算法

刘 诚¹, 邱天爽*1, 李景春², 李 蓉²

(1.大连理工大学电子信息与电气工程学部,辽宁大连 116024;2.国家无线电监测中心,北京 100037)

摘要:在许多工程技术应用中,噪声常呈现较强的冲激性,在数学上可用稳定分布模型来表示.常规的自适应滤波算法对于稳定分布噪声的鲁棒性较差.最大相关熵准则的提出,可以有效地改善在稳定分布噪声条件下自适应滤波算法的性能.以对称α稳定分布噪声为脉冲噪声 模型,使用最大相关熵准则作为代价函数,提出基于最大相关熵准则的仿射投影算法,将前一 次迭代的计算误差作为自变量代入相关熵函数中,使得改进后的仿射投影算法在脉冲噪声环 境下取得良好的收敛效果,并通过实验证明了新算法在强脉冲噪声以及广义信噪比较低的情 况下有较快的收敛速度和较好的收敛性能.

关键词:脉冲噪声;最大相关熵准则;仿射投影算法;自适应滤波 中图分类号:TN911.7 **文献标识码:**A **doi**:10.7511/dllgxb201801013

0 引 言

以最小均方(LMS)算法、递归最小二乘 (RLS)算法为代表的一类自适应滤波算法在信道 均衡、系统辨识、噪声消除等领域有广泛的应用. LMS算法原理简单,计算量小,但是收敛速度较 慢;RLS算法在收敛速度上比LMS算法快一个 数量级,而它的代价是增加了计算复杂度^[1].

作为 LMS 算法的扩展又不同于 LMS 算法, 仿射投影算法(APA)利用当前以及过去一段时 间的输入值和观测值,即一个 N 阶的向量作为输 入数据,取代 LMS 算法以单点作为输入数据的 方法,可以有效地减少样本的梯度噪声,适用于输 入数据频谱不平稳的情况.其算法性能介于 LMS 算法与 RLS 算法之间,在收敛速度和计算复杂度 之间取得较好的平衡^[2].目前,针对仿射投影算法 的研究主要集中在使用变步长的方法改善收敛性 能上,文献[3]和文献[4]均利用仿射投影误差的 范数修正步长的大小,没有从根本上改进算法的 法的代价函数,由于阶跃函数只能取最大或最小值,在强脉冲噪声环境下算法的收敛速度下降.

传统的自适应滤波算法常以最小均方误差准 则(MSE)作为代价函数,这样在假设噪声服从高 斯分布或至少具有有限的二阶统计量的情况下, 传统的算法会取得较好的收敛性能,而在自然环 境或许多工程技术应用中,噪声常表现出一种脉 冲状的非高斯性,并且往往具有很大的幅度,在数 学上用稳定分布的模型来描述这一类噪声.目前 常用的自适应滤波算法大多数的代价函数都是基 于最小均方误差准则,包括仿射投影算法在内的 这一类算法在稳定分布的噪声下会出现失调或者 不收敛等情况[6],无法满足自适应滤波的要求.针 对稳定分布噪声的情况,Liu 等在文献「7]中提出 了最大相关熵准则(MCC),基于这种准则开发的 算法,可以在脉冲噪声条件下表现出较好的性能。 在参数估计方面,文献[8]将 MSE 与 MCC 相结 合修正仿射投影算法的目标函数,并在混合高斯 噪声环境下取得较好收敛效果. 文献 [9] 将最大相 关熵准则与韧性子空间跟踪算法结合,证明了该

收稿日期: 2017-05-24; 修回日期: 2017-11-24.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61671105,61172108,61139001).

作者简介: 刘 诚(1993-),男,硕士生,E-mail:liucheng1228@mail.dlut.edu.cn;邱天爽*(1954-),男,博士,教授,博士生导师, E-mail:qiutsh@dlut.edu.cn.

算法在稳定分布噪声以及混合高斯噪声模型下具 有更优的子空间跟踪性能.

在实际应用中,特别是在无线电监测环境下, 接收信号常常会遇到脉冲性噪声的影响,使得无 线定位或参数估计的结果与真实值有较大偏离. 此外,若被监测的信号是运动的,则需要采用自适 应算法对其进行动态估计.由此可见,无线电监测 的实际问题亟须设计实现一种对于脉冲性噪声有 较好抑制作用的自适应滤波或参数估计方法.综 上,本文以最大相关熵准则为代价函数,改进仿射 投影算法,推导出适用于脉冲噪声下的基于最大 相关熵准则的仿射投影算法(MCCAPA).并以 SaS稳定分布(对称 α稳定分布)为脉冲噪声模 型,通过实验证明本文算法在适用于脉冲噪声环 境的同时,具有较快的收敛速度和较好的收敛性 能.

1 研究背景

1.1 SaS 分布噪声模型

SαS分布噪声模型是唯一一类满足广义中心 极限定理的分布.与高斯分布相比,SαS分布具有 更厚的统计拖尾,因此在时域上具有显著的脉冲 特性,可以很好地描述自然环境下或工程技术应 用中具有较强脉冲性的噪声类型,其噪声模型的 特征函数可以表示为

$$\Phi(u) = \exp\{jau - \gamma \mid u \mid^{\alpha}\}$$
(1)

式中: $0 < \alpha \leq 2$,为特征指数,用于描述稳定分布过 程的脉冲程度,且 α 取值越小,表现出越强的脉冲 性,当 $\alpha = 2$ 时,稳定分布退化为高斯分布; $a \in \mathbf{R}$, 为位置参数,表示分布的均值或中值; $\gamma \in (0,\infty)$, 为分散系数,用于描述分布的分散情况^[10-11].通过 上述模型可以很好地构造出在实际中普遍存在的 具有较强脉冲性的非高斯现象.因此,本文选择 SaS 分布来构造脉冲噪声环境.

1.2 最大相关熵准则

对于两个随机变量 X 和 Y,其相关熵的定义 为

$$V_{\sigma}(X,Y) = E[\kappa_{\sigma}(X-Y)]$$
(2)
其中 E[•]为期望, $\kappa_{\sigma}(\bullet)$ 为核函数, σ 为核长.

核函数可以减少把输入数据从低维空间到高 维空间映射后产生的计算量,同时映射到高维空 间的维数越大,区分输入数据差异的性能越好.其 中,高斯核函数可以将输入数据映射到无限维空 间,而其余的方法只能映射到有限维空间,故选择 高斯核函数代入相关熵的表达式可得到:

$$V_{\sigma}(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} E\left[\exp\left(\frac{-(X-Y)^2}{2\sigma^2}\right)\right] \quad (3)$$

文献[7]提出了相关熵可以诱导出一个测度 距离(correntropy induced metric, CIM),并给出 CIM 的表达式为 $CIM(X,Y) = [\kappa_{\sigma}(0) - V_{\sigma}(X, Y)]^{1/2}$.实际上,最大相关熵准则是依据最大化相 关熵 $V_{\sigma}(X,Y)$ 等价于最小化 CIM(X,Y)这一性 质的,即当测度距离越小时,两个变量的相似程度 越高,其相关熵的值越大.因此,依据最大相关熵 准则,当 $V_{\sigma}(X,Y)$ 取得最大值时,两个随机变量 X 和 Y 的误差 e(i) = X(i) - Y(i)最小^[12].

2 算法介绍

2.1 仿射投影算法

设 *u* 为 *n*×1 维的零均值随机变量,*d* 为一个 零均值随机标量,*w* 为自适应滤波器的系数向量, 给出基于最小均方误差准则的代价函数为

min
$$J(w) = E[(d-w^T u)^2]$$
 (4)
由式(4)可知,仿射投影算法滤波器权值的最佳解
表达式为

$$\widehat{\boldsymbol{w}} = \arg\min E[e^2(\boldsymbol{w})] \tag{5}$$

且滤波器权值的维纳解为 $w^* = R_u^{-1} r_{du}$,其中 $R_u = E[uu^T]$ 为正定的自协方差矩阵, r_{du} 为d和u的互协方差矩阵.应用平滑牛顿递归算法得到递归方程为

$$\boldsymbol{w}(i) = \boldsymbol{w}(i-1) + \eta (\boldsymbol{R}_{u} + \varepsilon \boldsymbol{I})^{-1} [\boldsymbol{r}_{du} - \boldsymbol{R}_{u} \boldsymbol{w}(i-1)]$$
(6)

其中 ε 为平滑因子, 是一个小的正数; η 为人工设 定的步长. 在实际的滤波过程中, 理论上无法获得 完整的协方差矩阵, 仿射投影算法采用当前与之 前共 K 个时刻的输入值和观测值来估计 R_u 和 r_u 的值, 即

$$\widehat{\mathbf{R}}_{u} = \frac{1}{K} \mathbf{U}(i) \mathbf{U}^{\mathsf{T}}(i)$$

$$\widehat{\mathbf{r}}_{du} = \frac{1}{K} \mathbf{U}(i) \mathbf{d}(i)$$
(7)

其中 $U(i) = (u(i-K+1) \cdots u(i))_{n \times K},$ $d(i) = (d(i-K+1) \cdots d(i))^{\mathrm{T}}.$ 将估计值代

人式(6),得到仿射投影算法的递推公式为

$$w(i) = w(i-1) + \eta U(i) [U^{T}(i)U(i) + \epsilon I]^{-1} \cdot [d(i) - U^{T}(i)w(i-1)]$$
(8)

2.2 基于最大相关熵准则的仿射投影算法

仿射投影算法在高斯噪声环境下可以取得较 好的收敛性能,但是在脉冲噪声环境下,由于它的 代价函数是基于最小均方误差准则的,不存在有 限的二阶或高阶统计量,会使算法性能退化,或者 出现不收敛的情况.为此,本文提出基于最大相关 熵准则的仿射投影算法(MCCAPA),使得其在脉 冲噪声环境下取得较好的效果.

根据最大相关熵准则的性质,令 $\rho(e) = \kappa_{\sigma}(0) - \kappa_{\sigma}(e)$,并且有 $\kappa_{\sigma}(0) = 1/\sqrt{2\pi\sigma}$,可以得到:

min
$$E[\rho(\boldsymbol{e}(i))] = \min E[\kappa_{\sigma}(0) - \kappa_{\sigma}(\boldsymbol{e}(i))] =$$

min $E[(1 - \exp(-\boldsymbol{e}^{2}(i))/(2\sigma^{2}))/\sqrt{2\pi}\sigma] \Leftrightarrow$
max $E[\exp(-\boldsymbol{e}^{2}(i)/2\sigma^{2})/(\sqrt{2\pi}\sigma] =$

$$\max E[\kappa_{\sigma}(\boldsymbol{e}(i))] \tag{9}$$

式中"⇔"表示等价转换,根据上式的转换得到基 于最大相关熵准则的代价函数为

$$\max J(\boldsymbol{w}) = \max E[\kappa_{\sigma}(\boldsymbol{e}(i))] = \max \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} E[\exp(-(\boldsymbol{d}(i) - \boldsymbol{w}_{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(i))^{2}/2\sigma^{2})]$$
(10)

由代价函数可以得到基于最大相关熵准则的 仿射投影算法滤波器最佳权值表达式为

$$\widehat{\boldsymbol{w}} = \arg\max E[\kappa_{\sigma}(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{w}))] \qquad (11)$$

应用平滑牛顿递归算法推导出递归方程:

$$w(i-1) + \eta(\mathbf{R}_{u} + \epsilon \mathbf{I})^{-1} \sqrt{f(w)} =$$

$$w(i-1) + \eta(\mathbf{R}_{u} + \epsilon \mathbf{I})^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{3}}} \cdot$$

$$\exp\left(\frac{-(e^{2}(i))}{2\sigma^{2}}\right) e(i)u(i) \qquad (12)$$

其中 e(i)为 $n \times K$ 阶矩阵.

根据 M 估计自适应滤波理论,可以得到最大 相关熵准则代价函数的维纳解为

$$\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{R}_{\kappa,\boldsymbol{u}}^{-1} \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{r}_{\kappa,\boldsymbol{du}}$$
(13)

式中: $R_{s,u}$ 为输入矩阵U(i)的自协方差矩阵, $r_{s,du}$ 为输入矩阵U(i)与目标矩阵d(i)的互协方差矩 阵,应用仿射投影算法原理得到估计式为

$$\widehat{\mathbf{R}}_{\kappa,u} = \frac{1}{K} \mathbf{U}(i) \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(i)$$

$$\widehat{\mathbf{r}}_{\kappa,du} = \frac{1}{K} \mathbf{U}(i) \mathbf{d}(i)$$
(14)

将上式代入式(12),利用矩阵求逆引理,得到 MCCAPA的递推公式为

$$\mathbf{w}(i) = \mathbf{w}(i-1) + \eta [\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(i)\mathbf{U}(i) + \varepsilon \mathbf{I}]^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^{3}} \cdot \exp\left(\frac{-(\mathbf{e}^{2}(i))}{2\sigma^{2}}\right) \mathbf{e}(i)\mathbf{U}(i)$$
(15)

其中 $\boldsymbol{e}(i) = \boldsymbol{d}(i) - \boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}(i)\boldsymbol{w}(i-1)$.

给出 MCCAPA 实现步骤如下: (1)初始化 w(0)=0,选择步长 η ,核长 σ . (2)计算 $y(i) = U^{T}(i)w(i-1)$ e(i) = d(i) - y(i) $k(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^{3}}} \exp\left(\frac{-(e^{2}(i))}{2\sigma^{2}}\right)$ $w(i) = w(i-1) + \eta [U^{T}(i)U(i) + \epsilon I]^{-1} \cdot k(i)e(i)U(i)$

(3)重复(2)至均方误差值收敛于稳态误差.

MCCAPA 利用最大相关熵准则作为代价函数,先由迭代误差代入最大相关熵准则的代价函数,先由迭代误差化入最大相关熵准则的代价函数计算出一个权值 k(i),再代入迭代公式进行迭代.当迭代误差 e(i)受到脉冲噪声的影响而增大时,权值 k(i) 减小,将权值代入迭代公式得到滤波器系数 w(i)的变化较小,从而保证了算法不会受到脉冲噪声的影响而出现不收敛或收敛性能下降的情况;反之,当迭代误差 e(i)较小时,权值 k(i) 较大,保证了算法可以取得较快的收敛速率.

MCCAPA 通过误差自适应地控制迭代公式 中滤波器系数的大小,既可以在迭代过程中使得 滤波器系数免受脉冲噪声的影响,保证算法的收 敛性能,也可以在噪声较小时快速调整滤波器的 系数,保证算法的收敛速度.

3 仿真实验

本文采用维纳模型构建的非线性信道均衡问 题来考查各算法性能,其模型结构如图1所示.

在维纳模型中,输入信号先经过线性变换,再 经过非线性变换,施加噪声,得到接收机接收信号 r(n)^[13].本文仿真信号采用 BPSK 信号,线性变 换公式为

$$x'(n) = x(n) + 0.5x(n-1)$$
 (16)



图1 维纳非线性信道模型

Fig. 1 Wiener nonlinear channel model

非线性变换公式为

 $y(n) = x'(n) - 0.5[x'(n)]^2 - 0.2[x'(n)]^3$ (17)

将 BPSK 信号通过式(16)、(17)处理后,再施 加稳定分布噪声,最终得到接收信号 r(n).

SaS分布在 a < 2时二阶矩无界,因此引入广 义信噪比(generalized SNR, R_{gsn})的概念.本文将 在不同 a 取值以及不同广义信噪比的情况下讨论 MCCAPA 与 APA 的收敛速度和误差性能的差 别,并将讨论在不同核长选择的情况下,MCCAPA 的误差性能.

实验1 在 MCCAPA 的核长取值、步进取 值均为最佳的条件下,设定广义信噪比为 10 dB, 在广义信噪比较理想的情况下比较噪声的冲激程 度对各算法的影响.α=1.8 时,噪声冲激程度较 小,接近于高斯噪声,进行 100 次蒙特卡罗实验, 得到两种算法的学习曲线如图 2 所示.可以观察 到,MCCAPA 取得较快的收敛速度,APA 收敛速 度较慢.学习曲线稳定后 MCCAPA 的误差控制 性能要稍好于 APA.



逐步减小 α 的取值,使噪声的冲激程度不断加大.当 α =1.1时,如图3所示,在受到严重冲激

噪声干扰的情况下, MCCAPA 收敛速度较快, 且 出现波动后可以快速收敛. 而 APA 会出现学习 曲线突变后不收敛的情况, 不适用于强冲激噪声 的恶劣情况.



继续减小 α 的值, MCCAPA 受冲激噪声的 影响不大, 且具有较好的韧性, 而 APA 则出现不 收敛的情况,算法不适用. 图 4 给出了在广义信噪 比为 10 dB 时均方误差随 α 变化的情况, 可以观 察到, MCCAPA 在脉冲噪声环境下的稳态误差 要小于 APA, 且在强脉冲噪声环境下, APA 不收 敛, 无法使用.



图 4 GSNR 为 10 dB 时均方误差随 α 变化情况 Fig. 4 MSE changes with α when GSNR is 10 dB

实验2 设α=1.6保持不变,改变广义信噪 比的值,观察两种算法在不同广义信噪比下的性 能.在广义信噪比较高的情况下,两种算法的收敛 情况与图2相似.逐步减小广义信噪比的值,当广 义信噪比为4dB时,如图5所示,APA会发生不 收敛的情况,MCCAPA收敛性能较好,并且 MCCAPA收敛速度更快,稳态波动较小.



图 5 GSNR 为 4 dB 时学习曲线

Fig. 5 Learning curve when GSNR is 4 dB

图 6 给出在 α=1.6 保持不变的情况下改变 广义信噪比,两种算法在迭代第 600 次时均方误 差随广义信噪比的变化情况.



图 6 α=1.6 时均方误差随广义信噪比变化情况 Fig.6 MSE changes with GSNR when α=1.6

当广义信噪比的值小于 8 dB 时, APA 会出 现稳定误差变大的情况,算法的收敛性能较差.如 图 6 所示,在广义信噪比较大,即实验环境较理想 的情况下,两种算法的稳态误差相差不大, MCCAPA的误差较小,体现了自适应滤波的效果 较好.随着广义信噪比的减小,两种算法的稳定误 差都会随之增大,然而在较为恶劣的情况下, APA 的误差会显著增加,可以看出 MCCAPA 在 收敛性能以及误差控制上优于 APA.

实验3 在理想条件下,针对 MCCAPA,讨 论核长σ对收敛性能的影响.核长是高斯核中用 来抑制噪声干扰的重要参数,鉴于目标信号和噪 声的多样性、复杂性,无法通过理论推导的方式确 定核长的最优解,而是通过大量仿真实验来确定最 合适的核长.表1给出广义信噪比为20 dB、α= 1.8的情况下,核长在0~2.0变化,MCCAPA 在 迭代第 600 次时均方误差.

表 1	均方	误差	随核	:长	的	变	化	情	况
-----	----	----	----	----	---	---	---	---	---

Tab	1	MSE	changes	with	kernel	size
ran.	1	TATOL	changes	VV I L I I	Reiner	0120

核长	均方误差/10-5	核长	均方误差/10-5
0	发散	1.2	667
0.2	发散	1.4	1 166
0.4	511	1.6	1 866
0.6	515	1.8	2 578
0.8	476	2.0	3 203
1.0	483		

观察可知,当核长在 0~2.0 变化时,均方误 差总体上呈现出先下降再上升的趋势,在 σ=0.8 时取得最小值.

4 结 语

针对最小均方误差准则在脉冲噪声情况下性 能不好的问题,本文使用最大相关熵准则修正仿 射投影算法的代价函数,推导出基于最大相关熵 准则的仿射投影算法.并通过实验证明在冲激性 较强以及信噪比较低等情况下,新算法MCCAPA 都具有比较好的收敛速度与较小的稳态误差,更 加适应于实际应用中的情况.

参考文献:

- [1] SAYED A H. Adaptive Filters [M]. New York: Wiley-IEEE Press, 2008.
- [2] GONZALEZ A, FERRER M, ALBU F, et al. Affine projection algorithms: Evolution to smart and fast algorithms and applications [J]. European Signal Processing Conference, 2012:6333930.
- [3] SHIN H C, SAYED A H, SONG W J. Variable step-size NLMS and affine projection algorithms [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2004, 11(2):132-135.
- [4] XIAO Longshuai, WU Ming, YANG Jun. A new efficient filtered-x affine projection sign algorithm for active control of impulsive noise [J]. Signal Processing, 2016, 120:456-461.
- [5] ZHENG Zongsheng, ZHAO Haiquan. Memory improved proportionate M-estimate affine projection algorithm [J]. Electronics Letters, 2015, 51(6): 525-526.
- [6] WANG Bing, CUI Guolong, YI Wei, et al.

Approximation to independent lognormal sum with *α-μ* distribution and the application [J]. Signal **Processing**, 2015, **111**:165-169.

- [7] LIU Weifeng, POKHAREL P P, PRINCIPE J C. Correntropy: properties and applications in non-Gaussian signal processing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(11):5286-5298.
- [8] YANG Xiaohan, QU Hua, ZHAO Jihong, et al. Hybrid affine projection algorithm [C] // 2014 13th International Conference on Control Automation Robotics and Vision, ICARCV 2014. Piscataway: IEEE, 2015;964-968.
- [9] 张金凤,邱天爽,李 森. 冲激噪声环境下基于最大 相关熵准则的韧性子空间跟踪新算法[J]. 电子学 报,2015,43(3):483-488.

ZHANG Jinfeng, QIU Tianshuang, LI Sen. A robust PAST algorithm based on maximum correntropy criterion for impulsive noise environments [J]. Acta Electronica Sinica, 2015, 43(3):483-488. (in Chinese)

- [10] 邱天爽,张金凤,宋爱民,等. 脉冲噪声下基于广义 类相关熵的 DOA 估计新方法[J]. 信号处理, 2012, 28(4):463-466.
 QIU Tianshuang, ZHANG Jinfeng, SONG Aimin, *et al.* The generalized correntropy-analogous statistics based direction of arrival estimation in impulsive noise environments [J]. Signal Processing, 2012, 28(4):463-466. (in Chinese)
- [11] TSIHRINTZIS G A, NIKIAS C L. Fast estimation of the parameters of alpha-stable impulsive interference [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(6):1492-1503.
- [12] SINGH A, PRINCIPE J C. Using correntropy as a cost function in linear adaptive filters [C] // 2009
 International Joint Conference on Neural Networks,
 IJCNN 2009. Piscataway: IEEE, 2009:2950-2955.
- [13] ABD-ELRADY E. A nonlinear approach to harmonic signal modeling [J]. Signal Processing, 2004, 84(1):163-195.

Affine project algorithm based on maximum correntropy criterion for impulsive noise environment

LIU Cheng¹, QIU Tianshuang^{*1}, LI Jingchun², LI Rong²

(1. Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
 2. The State Radio Monitoring Center, Beijing 100037, China)

Abstract: In many engineering applications, noise often shows strong impulsive, and is represented by a stable distribution model in mathematics. Traditional adaptive filtering algorithm is not robust in stable distribution noise. Maximum correntropy criterion can effectively improve the performance of the adaptive filtering algorithm under impulsive noise conditions. Applying symmetric α stable noise as the impulsive noise model, maximum correntropy criterion as the cost function, an affine project algorithm based on maximum correntropy criterion is proposed. By using a prior error as independent variable in the correntropy function, the improved affine project algorithm obtains a good convergence effect in impulsive noise environment. Experimental results show that the new algorithm has good convergence speed and performance under strong impulsive noise and low generalized signal-to-noise ratio conditions.

Key words: impulsive noise; maximum correntropy criterion; affine project algorithm; adaptive filtering