第58卷第4期
2018年7月
大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology
Vol. 58, No. 4
July 2018

文章编号: 1000-8608(2018)04-0437-04

正整数不含分部量2有序分拆的一些恒等式

郭育红*

(河西学院 数学与统计学院,甘肃 张掖 734000)

摘要: 首先得到了关于正整数 n 不含分部量 2,且分部量 1 出现 In-place 偶数次的分拆恒等式,以及偶分部量出现 In-place 偶数次的分拆恒等式,并给出了组合双射证明.同时将分拆恒等式做了相应的推广.最后还给出了正整数 n 不含分部量 2 的有序分拆中,奇分部量有两种形式的分拆数的生成函数及递推关系.

关键词: 正整数的有序分拆;In-place;恒等式;生成函数;组合双射证明

中图分类号: O157　**文献标识码:** A　**doi:** 10.7511/dllgxb201804015

0 引言

在整数分拆理论中,MacMahon[1]第一次定义了正整数的有序分拆,即把正整数 n 表示成一些正整数的有序和,其中每一项叫该分拆的分部量.如果不考虑分部量的顺序就是无序分拆.例如,4 的有序分拆有 4,3+1,1+3,2+2,2+1+1,1+2+1,1+1+2,1+1+1+1 共 8 个,而 4 的无序分拆有 5 个:4,3+1,2+2,2+1+1,1+1+1+1.有序分拆也可以表示成向量的形式.例如,上述 4 的 8 个有序分拆可记为(4),(3 1),(1 3),(2 2),(2 1 1),(1 2 1),(1 1 2),(1 1 1 1).

分拆恒等式一直是分拆理论中很有趣的一部分内容,也一直是分拆理论的研究热点之一.最近几年,许多学者在研究整数分拆恒等式时,不仅考虑正整数不同类型的分拆数之间的关系,比如,在无序分拆的研究中,有 Euler 恒等式[1-2]以及相关的一系列恒等式.在有序分拆的研究中,关于分部量为奇数的分拆、分部量是 1 或 2 的分拆、分部量大于 1 的分拆之间也有丰富的分拆恒等式[3-5].而且,学者们也考虑了分部量出现的不同类型的频数带来的分拆恒等式.

2015 年,Munagi 等[6]在有序分拆中考虑了分部量出现的频数问题,给出了关于正整数的 In-place 有序分拆的几个恒等式.其还将有序分拆的分部量 λ 给出两种形式,分别表示成 λ、λ^*.同时将分拆恒等式中偶分部量、奇分部量出现 In-place 偶数次推广到一般的 k 次,$k\geqslant 2$,得到了更为宽泛的结果.

所谓正整数的有序分拆中分部量 λ 出现 In-place j 次是指在该分拆中,分部量 λ 连续出现 j 次.例如,分拆(2 2 2 2 3 4 4 5 5 6 6 2 2 3 1)就是一个偶分部量出现 In-place 偶数次的有序分拆.

2003 年,Chinn 等[7]讨论了正整数不含分部量 2 的有序分拆,给出了一系列计数结果,同时还给出了正整数不含分部量 2 的有序分拆数的一些组合性质.设正整数不含分部量 2 的有序分拆数为 $C_{\neq 2}(n)$,则 $C_{\neq 2}(n)$ 满足递推关系:$C_{\neq 2}(0)=C_{\neq 2}(1)=C_{\neq 2}(2)=1$,$C_{\neq 2}(n)=2C_{\neq 2}(n-1)-C_{\neq 2}(n-2)+C_{\neq 2}(n-3)$.他们还指出在文献[8]给出的序列中:若用 $a(n)$ 表示没有孤立的 1 的二进制序列数,则 $C_{\neq 2}(n)=a(n+1)$,$a(n)$ 的初始值:$a(0)=0$,$a(1)=a(2)=a(3)=1$.

本文在文献[6-7]的基础上,探讨正整数 n 不含分部量 2 的有序分拆中的 In-place 恒等式,得

收稿日期: 2017-12-09; **修回日期:** 2018-05-10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11461020).
作者简介: 郭育红*(1970-),女,硕士,教授,E-mail:gyh7001@163.com.

到关于分部量1出现In-place偶数次、偶分部量出现In-place偶数次的几个分拆恒等式.同时,研究推广情形.另外,还讨论正整数不含分部量2的有序分拆中,奇分部量有两种形式的分拆数的生成函数及递推关系,并给出递推关系的组合双射证明.

1 已知定理

定理1[9] 设$n\geqslant 1$,正整数n的偶分部量出现偶数次的无序分拆数等于正整数n不含分部量$\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$的无序分拆数.

定理2[6] 设$n\geqslant 1$,正整数n的偶分部量出现In-place偶数次的有序分拆数等于正整数n不含分部量$\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$的有序分拆数.

定理3[6] 设$n\geqslant 1$,正整数n的奇分部量出现In-place偶数次的有序分拆数等于正整数$2n$的奇分部量有两种形式的有序分拆数.

2 主要结果

首先给出正整数n不含分部量2的有序分拆中关于分部量1的In-place有序分拆的一个恒等式.

定理4 正整数n的不含分部量2的有序分拆中,分部量1出现In-place偶数次($\neq 0$)的分拆数等于n的分部量大于1,且含分部量2的有序分拆数.

证明 对于正整数n的任何一个不含分部量2,且分部量1出现In-place偶数次($\neq 0$)的有序分拆,将偶数个1合并成$2k$,然后再将$2k$分拆成$\underbrace{2,2,\cdots,2}_{k个}$,其余分部量保持不变,于是就得到了$n$的分部量大于1,且含分部量2的分拆.

反之,对于正整数n的分部量大于1,且含分部量2的有序分拆,将分部量2分拆成(1 1),其余分部量不变,于是得到n的不含分部量2,且分部量1出现In-place偶数次($\neq 0$)的分拆. □

例1 取$n=6$,则6的不含分部量2,且分部量1出现In-place偶数次($\neq 0$)的有序分拆有3个:(1 1 4),(4 1 1),(1 1 1 1 1 1);同样,6的分部量大于1,且含分部量2的有序分拆有3个:(2 4),(4 2),(2 2 2).

进一步推广定理4,得到下面的结论.

定理5 对于正整数$l\geqslant 2$,正整数n的不含分部量l,分部量1出现In-place l的倍数次($\neq 0$)的有序分拆数等于n的分部量大于1,含分部量l的有序分拆数.

证明 证法类似于定理4,故略去.

下面给出一个例子来说明该恒等式.

例2 取$n=10$,$l=3$,则10的不含分部量3,分部量1出现In-place 3的倍数次的有序分拆有11个:(1 1 1 4 1 1 1),(4 1 1 1 1 1 1),(1 1 1 1 1 1 4),(1 1 1 5 2),(5 1 1 1 2),(5 2 1 1 1),(2 5 1 1 1),(1 1 1 2 5),(2 1 1 1 5),(1 1 1 7),(7 1 1 1).

同样,10的分部量大于1,且含分部量3的有序分拆有以下11个:(3 4 3),(4 3 3),(3 3 4),(3 5 2),(5 3 2),(5 2 3),(2 5 3),(3 2 5),(2 3 5),(3 7),(7 3).

在定理2、3中,同样考虑正整数n不含分部量2,得到了下面关于In-place有序分拆的两个恒等式.

定理6 正整数n的不含分部量2,偶分部量出现In-place偶数次的有序分拆数等于n的不含分部量4,且分部量不是$\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$的有序分拆数.

证明 类似于Munagi-Sellers在文献[6]中的证法.对于正整数n的任何一个不含分部量4,且分部量不是$\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$的有序分拆,做如下变换:将$4k$型($k>1$)的分部量分拆成($2r$ $2r$),这里$r>1$,其余分部量保持不变.于是,得到正整数n的不含分部量2,偶分部量出现In-place偶数次的有序分拆.反之,在正整数n的不含分部量2,偶分部量出现In-place偶数次的任意一个有序分拆中,奇分部量保持不变,将偶分部量按照从左向右的顺序每两个合并在一起,就得到$4k$型的分部量,由于分拆不含分部量2,于是就得到n的不含分部量4,且分部量不是$\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$的有序分拆. □

定理7 正整数$2n$的不含分部量4,奇分部量出现In-place偶数次的有序分拆数等于n的不

含分部量 2，奇分部量有两种形式的有序分拆数.

仍沿用 Munagi-Sellers 的记号，将奇分部量 λ 的两种形式记为 λ、λ^*.

证明　类似于 Munagi-Sellers 在文献[6]中的证法. 对于正整数 n 的任何一个不含分部量 2，奇分部量有两种形式的有序分拆，做如下变换：将每个偶分部量 μ 变成 2μ，把没有带 * 号的奇分部量 λ 变成 2λ，把带 * 号的奇分部量 λ^* 变换成"λ，λ". 因为 n 的分拆不含分部量 2，于是就得到了正整数 $2n$ 的不含分部量 4，奇分部量出现 In-place 偶数次的有序分拆. 显然，上述变换是可逆的. □

将定理 7 做自然的推广，就得到下面的结论：

定理 8　对于偶数 $l \geqslant 2$，正整数 $2n$ 的不含分部量 $2l$ 的有序分拆中，奇分部量出现 In-place 偶数次的分拆数等于 n 的不含分部量 l，奇分部量有两种形式的有序分拆数.

证明　证法类似于定理 7，故略去.

下面给出一个例子来说明定理 8 中的对应关系.

例 3　取 $n=3$，$l=2$，则 6 的不含分部量 4，奇分部量出现 In-place 偶数次的有序分拆有 10 个：(6)，(3　3)，(2　2　2)，(2　2　1　1)，(2　1　1　2)，(1　1　2　2)，(2　1　1　1　1)，(1　1　2　1　1)，(1　1　1　1　2)，(1　1　1　1　1　1). 同样，3 的不含分部量 2，奇分部量有两种形式的有序分拆有以下 10 个：(3)，(3^*)，(1　1　1)，(1　1　1^*)，(1　1^*　1)，(1^*　1　1)，(1　1^*　1^*)，(1^*　1　1^*)，(1^*　1^*　1)，(1^*　1^*　1^*).

在定理 7 中涉及正整数 n 的奇分部量有两种形式的有序分拆数，下面考虑正整数 n 的不含分部量 2，奇分部量有两种形式的有序分拆数. 考虑其生成函数.

设 $C^2_{\neq 2}(n)$ 表示正整数 n 的不含分部量 2，奇分部量有两种形式的有序分拆数，那么 $C^2_{\neq 2}(n)$ 的生成函数是

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1} C^2_{\neq 2}(n)x^n &= \sum_{j\geqslant 0}(2(x+x^3+x^4+\cdots)- \\ &\quad (x^4+x^6+\cdots))^j = \\ &\quad \frac{1-x^2}{1-2x-x^2-x^4}\end{aligned}$$

即有下面定理：

定理 9　设 $C^2_{\neq 2}(n)$ 表示正整数 n 的不含分部量 2，奇分部量有两种形式的有序分拆数，那么 $C^2_{\neq 2}(n)$ 的生成函数是

$$\sum_{n\geqslant 1} C^2_{\neq 2}(n)x^n = \frac{1-x^2}{1-2x-x^2-x^4}$$

由定理 9 不难得到下面关于正整数 n 的不含分部量 2，奇分部量有两种形式的有序分拆数的递推关系，有下面的结论.

定理 10　设 $C^2_{\neq 2}(n)$ 表示正整数 n 的不含分部量 2，奇分部量有两种形式的有序分拆数. 则 $C^2_{\neq 2}(n)=2C^2_{\neq 2}(n-1)+C^2_{\neq 2}(n-2)+C^2_{\neq 2}(n-4)$，$n>4$；$C^2_{\neq 2}(1)=2$，$C^2_{\neq 2}(2)=4$，$C^2_{\neq 2}(3)=10$，$C^2_{\neq 2}(4)=25$.

给出该递推关系的组合双射证明.

证明　将正整数 n 的不含分部量 2，奇分部量有两种形式的有序分拆分成两类：

(A)右端分部量是 1 或 1^*；

(B)右端分部量是 t 或 h^*，其中 $t>2$ 是整数，$h>3$ 是奇数.

对于(A)类中的任一分拆 α，删掉 α 右端的 1 或 1^*，就得到 $n-1$ 的不含分部量 2，奇分部量有两种形式的有序分拆. 而且当 n 的右端分部量是 1 或 1^*，其余分部量相同的两个分拆，分别删掉 1、1^* 后就产生了 $n-1$ 的同一分拆. 反之，对于 $n-1$ 的不含分部量 2，奇分部量有两种形式的任一个有序分拆，在其右端分别添上分部量 1 或 1^*，就得到 n 的右端分部量是 1 或 1^* 的分拆. 故(A)类中有 $2C^2_{\neq 2}(n-1)$个分拆.

对于(B)类中的任一分拆，用$(t-2)$或$(h-2)^*$分别代替 t 或 h^*，就得到 $n-2$ 的相应分拆. 反之，对于 $n-2$ 的任一个不含分部量 2，奇分部量有两种形式的有序分拆 β，设其右端的分部量是 $r(r\neq 2)$或 s^*，s 是奇数，用$(r+2)$或$(s+2)^*$分别代替 r 或 s^*，就得到 n 的右端分部量不是 1 或 1^* 的相应分拆.

但是在上述变换过程中，当右端的分部量$t=4$ 时，用 $t-2$ 代替 t，就产生了 $n-2$ 的右端分部量是 2 的分拆，这不在前面讨论的分拆中，所以被删掉了. 同样，在 $n-2$ 的任一个相应分拆的右端分部量加上 2 也产生不了 n 的右端分部量是 4 的

不含分部量 2,奇分部量有两种形式的有序分拆,因此,在上述变换中就漏掉了 n 的右端分部量是 4 的相应分拆. 而 n 的右端分部量是 4 的不含分部量 2,奇分部量有两种形式的有序分拆,正好是 $n-4$ 的相应分拆,有 $C^2_{\neq 2}(n-4)$ 个. 于是,(B)类中就有 $C^2_{\neq 2}(n-2)+C^2_{\neq 2}(n-4)$ 个分拆.

综合(A)类、(B)类,就得到了 $C^2_{\neq 2}(n)=2C^2_{\neq 2}(n-1)+C^2_{\neq 2}(n-2)+C^2_{\neq 2}(n-4)$.

□

3 结 语

在整数分拆理论中,分拆恒等式的研究一直是研究热点,而对带约束条件正整数有序分拆恒等式的探讨还不是很深入. 本文主要研究了正整数 n 不含分部量 2 的有序分拆中的分部量 1 出现 In-place 偶数次、偶分部量出现 In-place 偶数次的分拆恒等式,得到了几个有趣的分拆恒等式. 另外,还讨论了正整数 n 不含分部量 2 的有序分拆中,奇分部量有两种形式的分拆数的生成函数,并给出了该分拆数的递推关系的组合双射证明. 这些结果在理论上进一步丰富了整数分拆恒等式,同时也为寻找整数分拆恒等式的组合双射提供了一些方法.

参考文献:

[1] MACMAHON P A. **Combinatory Analysis, Volumes 1** [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1915.

[2] ANDREWS G E. **The Theory of Partitions** [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

[3] GESSEL I M, LI J. Compositions and Fibonacci identities [J]. **Journal of Integer Sequences**, 2013, **16**: Article 12.4.5.

[4] SILLS A V. Compositions, partitions and Fibonacci numbers [J]. **The Fibonacci Quarterly**, 2011, **49**(4):348-354.

[5] DIFFENDERFER J D. Building a better bijection between classes of compositions [J]. **Integers**, 2014, **14**:A44.

[6] MUNAGI A O, SELLERS J A. Some Inplace identities for integer compositions [J]. **Quaestiones Mathematicae**, 2015, **38**(4): 535-540.

[7] CHINN P, HEUBACH S. Integer sequence related to compositions without 2′s [J]. **Journal of Integer Sequences**, 2003, **6**: Article 03.2.3.

[8] SLOANE N J A. The on-line encyclopedia of integer sequences [EB/OL]. (2002-01-01). http://www.research.att.com/njas/sequences.

[9] TOH P C. Ramanujan type identities and congruences for partition pairs [J]. **Discrete Mathematics**, 2012, **312**(6):1244-1250.

Some identities related to compositions of positive integers without 2′s

GUO Yuhong*

(School of Mathematics and Statistics, Hexi University, Zhangye 734000, China)

Abstract: Some identities related to compositions of positive integer n without 2′s such that part 1 appears In-place with even multiplicity, and each even part appears In-place with even multiplicity are obtained. Furthermore, the combinatorial bijective proofs are given, and these identities are generalized as well. In addition, the generating function, recurrence relation are obtained for the compositions of positive integer n without 2′s where each odd part can be of two kinds.

Key words: compositions of positive integer; In-place; identity; generating function; combinatorial bijective proof