第58卷第5期
2018年9月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 58, No. 5
Sept. 2018

文章编号：1000-8608(2018)05-0547-04

若干 Mycielski 图邻点可区别Ⅰ-均匀全染色

张 婷*[1]， 朱恩强[2]， 赵双柱[3]， 杜 佳[3]

（1.兰州文理学院 师范学院，甘肃 兰州 730000；
2.北京大学 信息科学技术学院，北京 100871；
3.兰州文理学院 数字媒体学院，甘肃 兰州 730000）

摘要：图 G 的一个邻点可区别Ⅰ-均匀全染色是指对图 G 的邻点可区别的一个Ⅰ-全染色 f，若 f 还满足 $||T_i|-|T_j||\leqslant 1(i\neq j)$，其中 $T_i=V_i\cup E_i=\{v|v\in V(G),f(v)=i\}\cup\{e|e\in E(G),f(e)=i\}$，则称 f 为图 G 的一个邻点可区别Ⅰ-均匀全染色，而图 G 的邻点可区别Ⅰ-均匀全染色中所用的最少颜色数称为图 G 的邻点可区别Ⅰ-均匀全色数．通过函数构造法，得到了 $M(P_n)$、$M(C_n)$、$M(S_n)$ 的邻点可区别Ⅰ-均匀全色数，并且满足猜想．

关键词：Mycielski 图；邻点可区别Ⅰ-均匀全染色；邻点可区别Ⅰ-均匀全色数
中图分类号：O157.5 **文献标识码：**A **doi：**10.7511/dllgxb201805016

0 引 言

关于均匀染色的概念最早是由 Meyer[1] 提出的，1994 年，Fu[2] 提出了均匀全染色概念以及均匀全染色猜想．许多学者围绕图的均匀全染色做了大量研究[3-5]．文献[6-8]研究了一些特殊图的点可区别Ⅰ-全染色和邻点可区别Ⅰ-全染色．文献[9]给出了路、圈、扇、轮、完全图、完全二部图的邻点可区别Ⅰ-均匀全色数，提出邻点可区别Ⅰ-均匀全色数最大不超过 2 的猜想；文献[10]研究了几类图的均匀邻点可区别Ⅰ-全染色．本文根据图 $M(P_n)$、$M(C_n)$ 和 $M(S_n)$ 的构造特征，利用函数构造法，研究并确立它们邻点可区别Ⅰ-均匀全色数，并验证其满足猜想．

1 相关定义和引理

定义 1[11] 对于阶数不小于 2 的连通图 $G(V,E)$，设 f 是从 $V(G)\cup E(G)$ 到 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的映射，k 为自然数，如果 f 满足

(1)对 $\forall uv\in E(G)$，$u\neq v$，有 $f(u)\neq f(v)$；

(2)对 $\forall uv,uw\in E(G)$，$v\neq w$，$f(uv)\neq f(uw)$；

(3)对 $\forall uv\in E(G)$，$u\neq v$，$C(u)\neq C(v)$

则称 f 为图 G 的一个邻点可区别的Ⅰ-全染色(简记为 k-Ⅰ-AVDTC)．记 $\chi_{at}^{i}(G)=\min\{k|G$ 的 k-Ⅰ-AVDTC$\}$ 为图 G 的邻点可区别Ⅰ-全色数．其中 $C(u)=\{f(u)\}\cup\{f(uv)|uv\in E(G)\}$ 称为点 u 在 f 下的色集，$C(u)$ 在色全集合 $C=\{1,2,\cdots,k\}$ 中的补集记为 $\overline{C}(v)=C\backslash C(u)$．

定义 2[9] 设 f 是简单连通图 $G(V,E)$ ($|V(G)|\geqslant 2$)的一个 k-Ⅰ-AVDTC，若满足 $\forall i,j\in\{1,2,\cdots,k\}$，$i\neq j$，有 $||T_i|-|T_j||\leqslant 1$，则称 f 为图 G 的一个 k-邻点可区别Ⅰ-均匀全染色(简记为 k-Ⅰ-AVDETC)，而称 $\chi_{aet}^{i}(G)=\min\{k|G$ 的 k-Ⅰ-AVDETC$\}$ 为图 G 的邻点可区别Ⅰ-均匀全色数，其中 $T_i=V_i\cup E_i$，$V_i=\{v|v\in V(G),f(v)=i\}$，$E_i=\{e|e\in E(G),f(e)=i\}$．

定义 3[12] 对简单图 G，若 $V(M(G))=V(G)\cup V'\cup\{w\}$，$E(M(G))=E(G)\cup\{uv'|u\in V(G),v'\in V',uv\in E(G)\}\cup\{wv'|v'\in V'\}$，其中 $V'=\{v'|v\in V(G)\}$，$\{w\}\cap(V\cup V')=\varnothing$，称图 $M(G)$ 是图 G 的 Mycielski 图．

猜想 1[9] 对简单连通图 G，有 $\chi_{aet}^{i}(G)\leqslant\Delta(G)+2$．

引理 1[9] $\chi_{aet}^{i}(G)\geqslant\chi_{at}^{i}(G)\geqslant\Delta(G)$，$\Delta(G)$ 表

收稿日期：2017-12-10； 修回日期：2018-06-05．
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60974112)；中国博士后科学基金资助项目(2015M580928)．
作者简介：张 婷*(1985-)，女，硕士生，副教授，E-mail：51115023@qq.com．

示图 G 的最大度.

引理 2[9] 对 $|V(G)|\geqslant 2$ 的连通图 G,若有最大度点相邻,$\chi_{\mathrm{aet}}^{i}(G)\geqslant\chi_{\mathrm{at}}^{i}(G)\geqslant\Delta(G)+1$.

文中未加说明的符号或术语可参见文献[13].

2 主要结论

定理 1 设 P_n 表示阶为 $n(n\geqslant 3)$ 的路,则有

$$\chi_{\mathrm{aet}}^{i}(M(P_n))=\begin{cases}4, & n=3;\\ 5, & n=4;\\ n, & n\geqslant 5.\end{cases}$$

证明 以下分3种情形证明本定理.

情形 1 当 $n=3$ 时,$\Delta(M(P_3))=4$,由引理1知 $\chi_{\mathrm{aet}}^{i}(G)\geqslant\Delta(G)$,为证定理为真,只需给出 $M(P_3)$ 的一个4-Ⅰ-AVDETC.为此,构造映射 f:$V(M(P_3))\cup E(M(P_3))\to\{1,2,3,4\}$,$f(v_1)=f(v_1')=f(v_1v_2)=f(v_3v_2')=1$;$f(v_2)=f(v_2')=f(v_2v_1')=f(v_3'w)=2$; $f(v_3)=f(v_3')=f(v_2v_3')=f(v_2'w)=3$;$f(v_2v_3)=f(v_1v_2')=f(v_1'w)=f(w)=4$.

为验证上述全染色法 f 是邻点可区别的,现列出各顶点的色集合:

$C(v_1)=\{1,4\}$;$\overline{C}(v_2)=\overline{C}(v_2')=\varnothing$;

$C(v_3)=\{1,3,4\}$;$C(v_1')=\{1,2,4\}$;

$C(v_3')=\{2,3\}$;$C(w)=\{2,3,4\}$

可见 f 是 $M(P_3)$ 的一个4-Ⅰ-AVDTC,并且显然有 $|T_i|=4,i=1,2,3,4$.

由定义知 f 是 $M(P_3)$ 的一个4-Ⅰ-AVDETC.

情形 2 当 $n=4$ 时,由于 $M(P_4)$ 有两个相邻的最大度点,且 $\Delta(M(P_4))=4$.由引理2知,$\chi_{\mathrm{aet}}^{i}(M(P_4))\geqslant\Delta(M(P_4))+1=5$,为证 $\chi_{\mathrm{aet}}^{i}(M(P_4))=5$,只需给出 $M(P_4)$ 的一个5-Ⅰ-AVDETC.为此构造映射 f:$V(M(P_4))\cup E(M(P_4))\to\{1,2,3,4,5\}$,$f(v_i)=f(v_i')=i$,$i=1,2,3,4$;$f(v_iv_{i+1})=i$,$i=1,2,3$;$f(v_i'w)=i-1$,$i=2,3,4$;$f(v_1v_2')=f(v_3v_4')=f(v_4v_3')=f(w)=5$;$f(v_2v_3')=f(v_3v_2')=f(v_1'w)=4$;$f(v_2v_1')=3$.

此时需验证

$C(v_1)=\{1,5\}$;$\overline{C}(v_2)=\{5\}$;$\overline{C}(v_3)=\{1\}$;

$C(v_4)=\{3,4,5\}$;$C(v_1')=\{1,3,4\}$;

$\overline{C}(v_2')=\{3\}$;$\overline{C}(v_3')=\{1\}$;

$C(v_4')=\{3,4,5\}$;$\overline{C}(w)=\varnothing$

从而 f 是 $M(P_4)$ 的一个5-Ⅰ-AVDTC,且有

$$|T_i|=\begin{cases}4, & i=1,2,5;\\ 5, & i=3,4.\end{cases}$$

由定义知 f 是 $M(P_4)$ 的一个5-Ⅰ-AVDETC.

情形 3 当 $n\geqslant 5$ 时,$M(P_n)$ 只有一个最大度点 w,由引理1知,$\chi_{\mathrm{aet}}^{i}(G)\geqslant\Delta(G)=n$.为证定理为真,只需给出 $M(P_n)$ 的一个 n-Ⅰ-AVDETC,为此构造映射 f:$V(M(P_n))\cup E(M(P_n))\to\{0,1,2,\cdots,n-1\}$,$f(v_i)=f(v_i')=f(v_iv_{i+1})=(i+1)\bmod n$,$i=1,2,\cdots,n-1$;$f(v_n)=1$;$f(v_n')=0$;$f(w)=1$;$f(v_iv_{i+1}')=(i+2)\bmod n$,$i=1,2,\cdots,n-1$;$f(v_iv_{i-1}')=(i+3)\bmod n$,$i=2,3,\cdots,n$;$f(v'w)=i\bmod n$,$i=1,2,\cdots,n$.

此时需检验

$C(v_1)=\{2,3\}$;

$C(v_i)=\{i,(i+1)\bmod n,(i+2)\bmod n,(i+3)\bmod n\}$,$i=2,3,\cdots,n-1$;

$C(v_n)=\{0,1,3\}$;$C(v_1')=\{1,2,5\bmod n\}$;

$C(v_i')=\{i,(i+1)\bmod n,(i+4)\bmod n\}$,$i=2,3,\cdots,n-1$;

$C(v_n')=\{0,1\}$;$\overline{C}(w)=\varnothing$

从而 f 是 $M(P_n)(n\geqslant 5)$ 的一个 n-Ⅰ-AVDTC,且有

$$|T_i|=\begin{cases}5, & i=2,4;\\ 6, & i=0,1,3,5,6,7,\cdots,n-1.\end{cases}$$

由定义知 f 是 $M(P_n)(n\geqslant 5)$ 的一个 n-Ⅰ-AVDETC.

综合以上情形,定理得证.

定理 2 设 C_n 表示阶为 $n(n\geqslant 3)$ 的圈,则有

$$\chi_{\mathrm{aet}}^{i}(M(C_n))=\begin{cases}5, & n=3,4;\\ n, & n\geqslant 5.\end{cases}$$

证明 以下分3种情形证明本定理.

情形 1 当 $n=3$ 时,$M(C_3)$ 有相邻的最大度点,且 $\Delta(M(C_3))=4$,由引理2有 $\chi_{\mathrm{aet}}^{i}(M(C_3))\geqslant\Delta(M(C_3))+1=5$.为证 $\chi_{\mathrm{aet}}^{i}(M(C_3))=5$,只需给出 $M(C_3)$ 的一个5-Ⅰ-AVDETC.为此构造映射 f:$V(M(C_3))\cup E(M(C_3))\to\{1,2,3,4,5\}$,$f(v_1)=f(v_1v_2')=f(v_2v_1')=f(w)=1$;$f(v_2v_3')=f(v_3v_2')=f(v_1')=2$;$f(v_1v_3')=f(v_2v_3)=f(v_2')=f(v_1'w)=3$;$f(v_3v_1)=f(v_2)=f(v_3')=f(v_2'w)=4$;$f(v_3)=f(v_1v_2)=f(v_3v_1')=f(v_3'w)=5$.

此时需要检验

$\overline{C}(v_1)=\{2\}$;$\overline{C}(v_2)=\varnothing$;$\overline{C}(v_3)=\{1\}$;

$\overline{C}(v_1')=\{4\}$;$\overline{C}(v_2')=\{5\}$;$\overline{C}(v_3')=\{1\}$;

$\overline{C}(w)=\{2\}$

从而 f 是 $M(C_3)$ 的一个 5-Ⅰ-AVDTC，且有 $|T_i|=\begin{cases}3, & i=2;\\ 4, & i=1,3,4,5.\end{cases}$

由定义知 f 是 $M(C_3)$ 的一个 5-Ⅰ-AVDETC.

情形 2　当 $n=4$ 时，$M(C_4)$ 有相邻的最大度点，且 $\Delta(M(C_4))=4$，由引理 2 知，$\chi_{aet}^{i}(M(C_4))\geqslant\Delta(M(C_4))+1=5$. 为证 $\chi_{aet}^{i}(M(C_4))=5$，只需给出 $M(C_4)$ 的一个 5-Ⅰ-AVDETC. 为此构造映射 $f:V(M(C_4))\cup E(M(C_4))\to\{1,2,3,4,5\}$，$f(v_i)=i,i=1,2,3,4$；$f(v_i')=5,i=1,3,4$；$f(v_2')=2$；$f(w)=4$；$f(v_iv_{i+1})=i,i=1,3$；$f(v_2v_3)=f(v_4v_5)=5$；$f(v_1v_2')=f(v_2v_1')=3$；$f(v_2v_3')=f(v_3v_2')=4$；$f(v_3v_4')=f(v_4v_3')=1$；$f(v_4v_1')=f(v_1v_4')=2$；$f(v_i'w)=i,i=1,2,3,4$.

此时需检验

$\overline{C}(v_1)=\{4\}$；$\overline{C}(v_2)=\varnothing$；$\overline{C}(v_3)=\{2\}$；

$\overline{C}(v_4)=\varnothing$；$\overline{C}(v_i')=\{4\}$；$\overline{C}(v_2')=\{1,5\}$；

$\overline{C}(v_3')=\{2\}$；$\overline{C}(v_4')=\{3\}$；$\overline{C}(w)=\{5\}$

从而 f 是 $M(C_4)$ 的一个 5-Ⅰ-AVDTC，且有 $|T_i|=5,i=1,2,3,4,5$.

由定义知 f 是 $M(C_4)$ 的一个 5-Ⅰ-AVDETC.

情形 3　当 $n\geqslant5$ 时，$M(C_n)$ 只有一个最大度点 w，由引理 1 知，$\chi_{aet}^{i}(M(C_n))\geqslant\Delta(M(C_n))=n$，为证定理为真，只需给出 $M(C_n)$ 的一个 n-Ⅰ-AVDETC. 由于 $V(M(C_n))=V(M(P_n))$，$E(M(C_n))=E(M(P_n))\cup\{v_nv_1\}\cup\{v_1v_n'\}\cup\{v_nv_1'\}$.

故若可能，可思考在定理 1 情形 3 的基础上对 $M(P_n)$ 再添加 3 条边 v_nv_1、v_1v_n'、v_nv_1'，并对其着以适当的颜色，得到 $M(C_n)$ 的一个 n-Ⅰ-AVDETC即可. 为此，在定理 1 情形 3 的基础上，令 $f(v_nv_1)=1,f(v_1v_n')=4,f(v_nv_1')=2$. 再检验 $C(v_1)=\{1,2,3,4\}$，$C(v_n)=\{0,1,2,3\}$，$C(v_1')=\{1,2,5\bmod n\}$，$C(v_n')=\{0,1,4\}$. 而其他所有点的色集合未变，显然，对任意的 $uv\in E(M(C_n))$，有 $C(u)\neq C(v)$.

从而 f 为 $M(C_n)$ 的一个 n-Ⅰ-AVDTC. 又由于 $|T_i|=\begin{cases}6, & i\neq1;\\ 7, & i=1.\end{cases}$

由定义知 f 是 $M(C_n)$ 的一个 n-Ⅰ-AVDETC.

综合以上情形，定理得证.

定理 3　设 S_n 表示阶为 $n+1(n\geqslant3)$ 的星，则有 $\chi_{aet}^{i}(M(S_n))=2n$.

证明　由图 $M(S_n)$ 的结构知 $\Delta(M(S_n))=2n$，由引理 1 知 $\chi_{aet}^{i}(M(S_n))\geqslant2n$. 为证 $\chi_{aet}^{i}(M(S_n))=2n$，只需给出 $M(S_n)$ 的一个 $2n$-Ⅰ-AVDETC. 为此构造映射 $f:V(M(S_n))\cup E(M(S_n))\to\{1,2,\cdots,2n\}$，$f(v_i)=f(v_i')=i+1$，$i=0,1,2,\cdots,n$；$f(w)=2n$；$f(v_0v_i)=i,i=1,2,\cdots,n$；$f(v_0v_i')=f(v_0'v_i)=n+i,i=1,2,\cdots,n$；$f(v_i'w)=i+1,i=0,1,2$；$f(v_i'w)=n+i-1,i=3,4,\cdots,n$.

此时需检验

$\overline{C}(v_0)=\varnothing$；$\overline{C}(v_0')=\{2,3,\cdots,n\}$；

$C(v_i)=\{i,i+1,n+i\},i=1,2,\cdots,n$；

$C(v_1')=\{2,n+1\}$；$C(v_2')=\{3,n+2\}$；

$C(v_i')=\{i+1,n+i-1,n+i\},i=3,4,\cdots,n$；

$C(w)=\{1,2,3,n+2,n+3,\cdots,2n\}$

从而 f 是 $M(S_n)(n\geqslant3)$ 的一个 $2n$-Ⅰ-AVDTC，且有 $|T_i|=\begin{cases}4, & i=1,2,3,n+1;\\ 3, & \text{其他}.\end{cases}$.

由定义知 f 是 $M(S_n)(n\geqslant3)$ 的一个 $2n$-Ⅰ-AVDETC，可以看出猜想 1 对上述定理中的图是成立的.

3　结　语

图的邻点可区别Ⅰ-均匀全染色是一个较新的概念，目前对于图的邻点可区别Ⅰ-均匀全色数的研究甚少，本文利用函数构造法，研究并确立了图 $M(P_n)$、$M(C_n)$ 和 $M(S_n)$ 的邻点可区别Ⅰ-均匀全色数，验证了邻点可区别Ⅰ-均匀全色数对于这些特殊图成立，具有一定的理论意义和实际意义.

参考文献：

[1] MEYER W. Equitable coloring [J]. **American Mathematical Monthly**, 1973, **80**(8):920-922.

[2] FU H L. Some results on equalized total coloring [J]. **Congressus Numerantium**, 1994, **102**: 111-119.

[3] GONG Kun, ZHANG Zhongfu, WANG Jianfang. Equitable total coloring of some join graphs [J]. **Journal of Mathematical Research & Exposition**, 2008, **28**(4):823-828.

[4] WANG Weifan. Equitable total coloring of graphs with maximum degree 3 [J]. **Graphs and Combinatorics**, 2002, **18**(3):677-685.

[5] 马　刚，张忠辅. 若干倍图的邻点可区别均匀全染

色[J]. 吉林大学学报(理学版), 2009, **47**(6): 1160-1164.
MA Gang, ZHANG Zhongfu. On adjacent vertex-distinguishing-equitable total coloring of double graphs [J]. **Journal of Jilin University (Science Edition)**, 2009, **47**(6): 1160-1164. (in Chinese)

[6] 陈祥恩,苗婷婷,王治文. 两条路的联图的点可区别I-全染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2017, **52**(4): 6-9.
CHEN Xiang′en, MIAO Tingting, WANG Zhiwen. Vertex-distinguishing I-total colorings of the join of two paths [J]. **Journal of Shandong University (Natural Science)**, 2017, **52**(4): 6-9. (in Chinese)

[7] 苗婷婷,王治文,陈祥恩. 圈与路联图点可区别Ⅰ-全染色和点可区别Ⅵ-全染色[J]. 大连理工大学学报, 2017, **54**(4): 430-435.
MIAO Tingting, WANG Zhiwen, CHEN Xiang′en. Vertex-distinguishing Ⅰ-total colorings and vertex-distinguishing Ⅵ-total colorings of join-graph of cycle and path [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2017, **54**(4): 430-435. (in Chinese)

[8] 张 婷,朱恩强,刘晓娜,等. 若干联图的邻点可区别I-全染色[J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, **55**(2): 267-272.
ZHANG Ting, ZHU Enqiang, LIU Xiaona, *et al*. Adjacent vertex-distinguishing I-total coloring of some join graphs [J]. **Journal of Jilin University (Science Edition)**, 2017, **55**(2): 267-272. (in Chinese)

[9] 王继顺,李步军. 图的邻点可区别I-均匀全染色[J]. 应用数学学报, 2015, **38**(1): 125-136.
WANG Jishun, LI Bujun. Incidence-adjacent vertex distinguishing equitable total coloring of graphs [J]. **Acta Mathematicae Applicatae Sinica**, 2015, **38**(1): 125-136. (in Chinese)

[10] 王笑妍,刘焕平. 几类图的均匀邻点可区别I-全染色[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2016, **32**(1): 37-40.
WANG Xiaoyan, LIU Huanping. On the equitable incidence adjacent vertex-distinguishing total coloring of graphs of some classes [J]. **Natural Science Journal of Harbin Normal University**, 2016, **32**(1): 37-40. (in Chinese)

[11] ZHANG Z F, WOODALL D R, LI J W, *et al*. Incidence adjacent vertex-distinguishing total coloring of graphs [EB/OL]. [2013-03-26] (2008-06-12). http://202.201.18.40:080/mas5/.

[12] 刘秀丽. 路、扇及星的Mycielski图的邻点可区别I-全染色[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2015, **36**(4): 408-411.
LIU Xiuli. Adjacent vertex-distinguishing I-total coloring of some Mycielski graphs of path, fan and star [J]. **Journal of North University of China (Natural Science Edition)**, 2015, **36**(4): 408-411. (in Chinese)

[13] BONDY J A, MURTY U S R. **Graph Theory with Applications** [M]. New York: Springer, 2008.

Incidence-adjacent vertex distinguishing equitable total coloring of some Mycielski graphs

ZHANG Ting*[1], ZHU Enqiang[2], ZHAO Shuangzhu[3], DU Jia[3]

(1. Normal School, Lanzhou University of Arts and Science, Lanzhou 730000, China;
2. School of Electronics Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing 100871, China;
3. School of Digital Media, Lanzhou University of Arts and Science, Lanzhou 730000, China)

Abstract: The incidence-adjacent vertex distinguishing equitable total coloring of graph G is that to the incidence-adjacent vertex distinguishing total coloring f of graph G, if f satisfies $||T_i|-|T_j||\leqslant 1$ $(i\neq j)$, where $T_i=V_i\cup E_i=\{v|v\in V(G), f(v)=i\}\cup\{e|e\in E(G), f(e)=i\}$, then f is called the incidence-adjacent vertex distinguishing equitable total coloring of graph G. The minimum number of colors required in incidence-adjacent vertex distinguishing equitable total coloring is called incidence-adjacent vertex distinguishing equitable total chromatic number of graph G. The incidence-adjacent vertex distinguishing equitable total chromatic numbers of $M(P_n)$, $M(C_n)$, $M(S_n)$ are obtained by function construction methods, which meet the suspect.

Key words: Mycielski graph; incidence-adjacent vertex distinguishing equitable total coloring; incidence-adjacent vertex distinguishing equitable total chromatic number