

文章编号: 1000-8608(2018)06-0641-08

优雅图猜想

赵科, 李敬文*, 魏众德

(兰州交通大学 电子与信息工程学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 对于图 $G(p, q)$, 如果存在一个单射 $f: V(G) \rightarrow [0, 1, 2, \dots, q]$, 使得 $f(E(G)) = \{f(uv) = (f(u) + f(v)) \bmod (q+1) | uv \in E(G)\} = [1, \dots, q]$, 则称图 G 为优雅图。采用剪枝与预判函数相结合的方式, 设计了递归回溯算法, 对 9 个点内的所有简单连通图进行了优雅性验证, 得到 9 个点内所有优雅图和非优雅图。根据实验结果, 验证了当 $3 \leq p \leq 9$ 时, 所有的树图、单圈图几乎都是优雅的, 证明了当 $3 \leq q \leq 9$ 且 $q \neq 1 \pmod 4$ 时, 图 $G(p, q)$ 是优雅的。最后给出猜想: 绝大多数的图是优雅的。

关键词: 优雅标号; 优雅图; 非优雅图; 优雅空间; 优雅图猜想

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

doi: 10.7511/dlgxb201806013

0 引言

图论是一个相对古老的数学分支, 起源于 1736 年, 由瑞典数学家欧拉在解决柯尼斯堡问题时首先提出。在随后的发展过程中, 产生了许多著名的猜想, 如汉密尔顿回路、四色猜想、优美树猜想等, 从而引起了学者的注意和广泛研究。随着计算机的出现, 图论在近年来得到快速发展, 图标号问题是图论的研究方向之一。优雅标号(elegant label)的概念由 Chang 等于 1981 年首次提出, 给出了明确的定义, 并证明了当 $n=0, 3 \pmod 4$ 时圈 C_n 是优雅的, $n=1 \pmod 4$ 时圈 C_n 是非优雅的; 扇图是优雅的; 当 $n \neq 0 \pmod 4$ 时路 P_n 是优雅的^[1]。Cahit 证明了 P_4 是唯一的非优雅路^[2], Balakrishnan 等证明了许多特殊图是优雅的^[3]。例如, 当且仅当 $n=0 \pmod 2$ 时, 双星图 $B_{n,n}(K_2$ 在每个端点有 n 个下垂边) 是优雅的, 每一个简单图都是一个优雅图(elegant graph)的子图以及几类图是非优雅的。Deb 等证明了当且仅当 $n \neq 3 \pmod 4$ 时, 三角蛇图是优雅的^[4]。文献[5]中证明了当 $q-p+1 \leq m \leq q-p+k$ 时, 对于每一个强 k 优雅图 G , $(G + \overline{K}_m) + \overline{K}_n$ 是强 K 优雅图。Zhou 等证明了对于任意的对虾树都有奇优雅标号^[6]。为了方便学者对各种标号的研究现状快速查找,

Gallian 在文献[7]中, 总结归纳了现有的所有标号种类及研究结果。

国内外学者主要在研究特殊图的优雅性, 例如圈、路、扇图等目前已经证明是优雅的。Rosa 提出非优美图产生的 3 个原因^[8]: (1) 图 G 的顶点过多而边数太少; (2) 图 G 边数过多而顶点太少; (3) 图 G 的边数具有错误的奇偶性。以上条件同样适用于优雅标号。本文根据文献[9]中生成非同构图的算法, 得到 9 个点之内的所有连通图, 结合设计的优雅标号算法, 得到所有优雅图和非优雅图的数量。

1 定义及基本概念

定义 1^[1] 对于任意的简单连通图 $G=(V, E)$, 如果对每一个顶点 $v \in V$, 都对应一个非负整数 $f(v)$ ($f(v)$ 为顶点 v 的标号), 且满足

(1) $\forall v_1, v_2 \in V$, 如果 $v_1 \neq v_2$, 则 $f(v_1) \neq f(v_2)$;

(2) $\{f(v) | v \in V\} \in \{0, 1, 2, \dots, |E|\}$;

(3) $\forall e_1, e_2 \in E$, 如果 $e_1 \neq e_2$, 则 $g(e_1) \neq g(e_2)$, 其中 $g(e) = (f(v_1) + f(v_2)) \bmod (q+1)$, $e=v_1v_2$;

(4) $\{g(e) | e \in E\} \in \{1, 2, \dots, |E|\}$

则称 f 为图 G 的一个优雅标号, 图 G 称为优雅图。

定义 2 对于边数为 q 的优雅图, 满足以下

条件:

- (1) $\min(f(u), f(v)) \geq 0$;
- (2) $\max(f(u), f(v)) \leq |E|$;
- (3) $(f(u) + f(v)) \bmod (q+1) = g(e)$, 且 $g(e) \neq 0$

则称为边数为 q 的优雅集合, 又称 q 优雅空间. 如表 1 所示, 对于每个 $g(e)$, 只取一个二元组 (m, n) , 这些二元组集合组成的图都是优雅的.

m 的取值范围为 $\{0, 1, \dots, q\}$; n 的取值范围可通过如下公式: $n = g(e) - m \geq 0$? $g(e) - m$: $g(e) - m + q + 1$ 判断取得.

在优雅空间中, 当 $m=n$ 时, 因每个点的标号不同, 故去除; 为了避免重复, 当 $m>n$ 时, 去除该二元组 (m, n) . 具体如表 1 所示.

表 2 为 $(5, 10)$ 图的优雅空间, 其中粗体的二元组为它的一种优雅标号, 如图 1 所示.

表 1 q 优雅空间

Tab. 1 Elegant space of q

边标号	相邻顶点标号 $(f(u), f(v))$
1	$(0,1), (2,q), (3,q-1), \dots, (m,n)$
2	$(0,2), (3,q), (4,q-1), \dots, (m,n)$
\vdots	\vdots
q	$(0,q), (1,q-1), (2,q-2), \dots, ((q-1)/2, (q+1)/2)$

表 2 $q=10$ 优雅空间

Tab. 2 Elegant space that q is equal to 10

边标号	相邻顶点标号 $(f(u), f(v))$
1	$(0,1), (2,10), (3,9), (4,8), (5,7)$
2	$(0,2), (3,10), (4,9), (5,8), (6,7)$
3	$(0,3), (1,2), (4,10), (5,9), (6,8)$
4	$(0,4), (1,3), (5,10), (6,9), (7,8)$
5	$(0,5), (1,4), (2,3), (6,10), (7,9)$
6	$(0,6), (1,5), (2,4), (7,10), (8,9)$
7	$(0,7), (1,6), (2,5), (3,4), (8,10)$
8	$(0,8), (1,7), (2,6), (3,5), (9,10)$
9	$(0,9), (1,8), (2,7), (3,6), (4,5)$
10	$(0,10), (1,9), (2,8), (3,7), (4,6)$

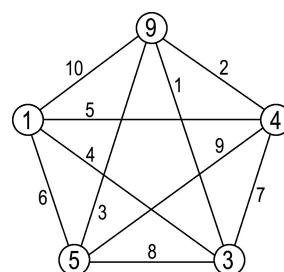


图 1 $(5, 10)$ 图优雅标号

Fig. 1 Elegant label of graph $(5, 10)$

猜想 1^[1] 所有的树都是优雅的.

2 解决思路及算法

2.1 解决思路

本文所研究的图均为简单连通图, 具有 p 个顶点和 q 条边的图称为 (p, q) 图, 其中 q 的范围为 $p-1 \leq q \leq p(p-1)/2$. 当 $p-1 > q$ 时, 该图为非连通图, 不在本文研究范围之内. 判断任意一个连通图是否为优雅图的解决思路如下:

(1) 根据 (p, q) 图的边数 q 生成图的优雅空间, 可组合成的图 G 如下:

$$G = \begin{cases} \left(\frac{q+1}{2}\right)^{\frac{q+1}{2}} \left(\frac{q-1}{2}\right)^{\frac{q-1}{2}}, & q \text{ 为奇数} \\ \left(\frac{q}{2}\right)^q, & q \text{ 为偶数} \end{cases}$$

(2) G 个图都是优雅图, 由连通图与非连通图组成;

(3) 任意一个连通图若是优雅图, 则一定在图 G 中; 若不在其中, 则该图一定为非优雅图.

2.2 设计的优雅图判定算法

算法的基本思想是: 对于给定的任意一个连通图, 可以用矩阵形式将它表示, 记为 $M_{(n,n)}$, 其中 n 表示顶点个数, 若顶点 i 与顶点 j 之间有边, 则 $M_{ij}=1(i \neq j)$, 若无边 $M_{ij}=0(i \neq j)$. 标号过程为根据该图的边 q 生成优雅空间, 先根据预判函数判断 $q=1$ 时的二元组 (i, j) 是否可用, 若可用将相邻的顶点标号, 将两个顶点对应的边标为 1, 边数以 1 递增, 直到边为 $q+1$ 时标注成功. 在选择二元组过程中, 若二元组 (i, j) 不可用, 则寻找下一个二元组.

具体算法步骤如下:

Input: 一个图的邻接矩阵 $M_{(n,n)}$

Output: 该图是否为优雅图

1. Begin:

2. Calculate the number of edges, generate an Elegant space;

3. $edgeCount \in \{1, 2, \dots, q, q+1\}$ Set $edgeCount=1$;

4. DeepSearch($edgeCount$)

5. {

6. If ($edgeCount=q+1$)

7. Success and quit;

8. Select a two tuple (p_1, p_2) ;

9. For $p_1 0 \rightarrow q$

10. $p_2 = edgeCount - p_1 \geq 0$? $edgeCount - p_1 = edgeCount - p_1 + q + 1$;

$edgeCount - p_1 + q + 1$;

```

11.      edgeCount=( $p_1 + p_2$ )%(q+1)
12. Check  $p_1$  and  $p_2$  in Matrix;
13. For  $i 1 \rightarrow n$ 
14. If ( $M_{ii}$  can be used)  $M_{ii} = p_1$ ;
15. For  $j 1 \rightarrow n$  and  $i \neq j$ 
16. If ( $M_{jj}$  can be used &&  $M_{ij} == 1$ )
17. {
18.      $M_{jj} = p_2$ ;
19.      $M_{ij} = edgeCount$ ;
20.     edgeCount=edgeCount+1;
21.     DeepSearch(edgeCount);
22. }
23. End For  $j 1 \rightarrow n$  and  $i \neq j$ 
24. End For  $i 1 \rightarrow n$ 
25. }
26. If (Elegant space is Finished)
27. This Graph is UnElegant;
28. End

```

3 算法结果与分析

本文根据文献[9]提供的算法,生成9个点之内的所有非同构图,用邻接矩阵的形式将其保存到p_q.txt文件中。运用本文设计的任意图的优雅判断算法,对所有图进行验证,列表统计了9个点内所有优雅图和非优雅图的数目,并对比了各点对应的图中非优雅图所占比率。

3.1 点数为2~9的所有图优雅图个数统计

当 $q=p-1$ 时,图为树图;当 $q=p(p-1)/2$ 时,图为完全图。即对于所有的连通图,其边数 q 的取值范围为 $p-1 \leq q \leq p(p-1)/2$ 。

程序结果表明,当 $p=2$ 时,图的个数为1,且为优雅图;当 $p=3,q=2,3$ 时,图的个数为2,且都是优雅图,为简洁不再列表说明。对点数4~9的所有图列表给出,其中 $N(UG)$ 为非优雅图个数, $N(EG)$ 为优雅图个数, $N(G)$ 为图的总数,见表3~8。

由表3~8可以看出,(4,3)、(6,5)、(8,7)图为树图,其中至少有一个非优雅树图,即图G有太多的顶点且没有足够的边会导致产生非优雅

表3 点数为4的图

Tab. 3 Graph with 4 points

(p,q)	$N(UG)$	$N(EG)$	$N(G)$
(4,3)	1	1	2
(4,4)	0	2	2
(4,5)	0	1	1
(4,6)	0	1	1

表4 点数为5的图

Tab. 4 Graph with 5 points

(p,q)	$N(UG)$	$N(EG)$	$N(G)$
(5,4)	0	3	3
(5,5)	1	4	5
(5,6)	0	5	5
(5,7)	0	4	4
(5,8)	0	2	2
(5,9)	0	1	1
(5,10)	0	1	1

表5 点数为6的图

Tab. 5 Graph with 6 points

(p,q)	$N(UG)$	$N(EG)$	$N(G)$
(6,5)	1	5	6
(6,6)	0	13	13
(6,7)	0	19	19
(6,8)	0	22	22
(6,9)	1	19	20
(6,10)	0	14	14
(6,11)	0	9	9
(6,12)	0	5	5
(6,13)	0	2	2
(6,14)	1	0	1
(6,15)	1	0	1

表6 点数为7的图

Tab. 6 Graph with 7 points

(p,q)	$N(UG)$	$N(EG)$	$N(G)$
(7,6)	0	11	11
(7,7)	0	33	33
(7,8)	0	67	67
(7,9)	5	102	107
(7,10)	0	132	132
(7,11)	0	138	138
(7,12)	0	126	126
(7,13)	4	91	95
(7,14)	0	64	64
(7,15)	0	40	40
(7,16)	2	19	21
(7,17)	2	8	10
(7,18)	1	4	5
(7,19)	0	2	2
(7,20)	1	0	1
(7,21)	1	0	1

图;(6,14-15)、(7,20-21)、(8,25-28)、(9,31-36)图都是稠密图,且都是非优雅图,即图G有太多的边且没有足够多的顶点会导致产生非优雅图;(4, 4-6)、(5, 5-10)、(6, 6-13)、(7, 7-15)、(8,8-17)、(9,9-21)图中,当边 $q=1 \pmod{4}$ 时,存在非优雅图,且所占比例逐渐递增,而当 $q \neq 1 \pmod{4}$ 时,所有图都是优雅图,即图G的边数具有错误的奇偶性会产生非优雅图。

表 7 点数为 8 的图

Tab. 7 Graph with 8 points

(p,q)	N(UG)	N(EG)	N(G)
(8,7)	3	20	23
(8,8)	0	89	89
(8,9)	2	234	236
(8,10)	0	486	486
(8,11)	0	814	814
(8,12)	0	1 169	1 169
(8,13)	19	1 435	1 454
(8,14)	0	1 579	1 579
(8,15)	0	1 515	1 515
(8,16)	0	1 290	1 290
(8,17)	18	952	970
(8,18)	1	657	658
(8,19)	1	399	400
(8,20)	3	217	220
(8,21)	6	108	114
(8,22)	15	41	56
(8,23)	2	22	24
(8,24)	7	4	11
(8,25)	5	0	5
(8,26)	2	0	2
(8,27)	1	0	1
(8,28)	1	0	1

表 8 点数为 9 的图

Tab. 8 Graph with 9 points

(p,q)	N(UG)	N(EG)	N(G)
(9,8)	0	47	47
(9,9)	1	239	240
(9,10)	0	797	797
(9,11)	0	2 075	2 075
(9,12)	0	4 495	4 495
(9,13)	58	8 346	8 404
(9,14)	0	13 855	13 855
(9,15)	0	20 303	20 303
(9,16)	0	26 631	26 631
(9,17)	197	31 203	31 400
(9,18)	0	33 366	33 366
(9,19)	0	31 996	31 996
(9,20)	0	27 764	27 764
(9,21)	153	21 664	21 817
(9,22)	7	15 551	15 558
(9,23)	8	10 088	10 096
(9,24)	43	5 941	5 984
(9,25)	60	3 187	3 247
(9,26)	44	1 591	1 635
(9,27)	53	717	770
(9,28)	116	228	344
(9,29)	36	112	148
(9,30)	58	5	63
(9,31)	25	0	25
(9,32)	11	0	11
(9,33)	5	0	5
(9,34)	2	0	2
(9,35)	1	0	1
(9,36)	1	0	1

3.2 定理和猜想

根据上述实验结果,得到以下结论:

定理 1 当 $3 \leq p \leq 9$ 时,树 $T(p,q)$ 几乎都是优雅的,其中

$$T = \begin{cases} \text{elegant; } & p \equiv 1 \pmod{2} \\ \text{almost elegant; } & p \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

证明 (1)当 p 为奇数时,所有的树 $T(p,q)$ 的优雅性如表 9 所示.由表可知,所有的奇树 $T(p,q)$ 都是优雅的.

(2)当 p 为偶数时,树 $T(p,q)$ 的优雅性如表 10 所示.由表可知,随着点数的增加,非优雅树的比率递减.

表 9 3~9 个点内所有奇树的非优雅数对比

Tab. 9 Non-elegant number comparison of all odd trees in 3-9 points

点数(p)	树总数	非优雅树总数	优雅树总数	非优雅树比率/%
3	1	0	1	0
5	3	0	3	0
7	11	0	11	0
9	47	0	47	0

表 10 3~9 个点内所有偶树的非优雅数对比

Tab. 10 Non-elegant number comparison of all even trees in 3-9 points

点数(p)	树总数	非优雅树总数	优雅树总数	非优雅树比率/%
4	2	1	1	50
6	6	1	5	16.667
8	23	3	20	13.043

综合(1)、(2)可知,当 $3 \leq p \leq 9$ 时,树 $T(p,q)$ 几乎都是优雅的.

定理 2 当 $3 \leq p \leq 9$ 时,除了图 C_5, C_9 外,所有的单圈图都是优雅的.

证明 9 个点以内的单圈图由表 3~8 得出.

猜想 2 当 $q \not\equiv 1 \pmod{4}$ 时,所有的单圈图是优雅的.

定理 3 当 $2 \leq p \leq 9, p \leq q \leq 2p$ 且 $q \not\equiv 1 \pmod{4}$ 时,所有 (p,q) 图都是优雅的.

证明 由表 3~8 可知,当 $q = p - 1$ 时,所有的图都是树图,满足定理 1.当 $p \leq q \leq 2p$ 且 $q \not\equiv 1 \pmod{4}$ 时,所有 (p,q) 图都是优雅图.而 $q = 1 \pmod{4}$ 时,其中部分图是非优雅的.由此可知,图的优雅性与图的边数存在一定的相关性.

猜想 3 当 $p - 1 \leq q \leq 2p$ 且 $q \not\equiv 1 \pmod{4}$ 时,所有图都是优雅的.

虽然非优雅图较多,但在图的总数中占比极小,

如表 11 所示,除顶点 $p=2,3$ 之外,随着顶点数的增加,非优雅图占比越来越小,从而提出猜想 4.

表 11 2~9 个点内所有图的优雅数对比

Tab. 11 Elegant number comparison of all graphs in 2~9 points

点数(p)	图总数	非优雅图总数	优雅图总数	非优雅图比率/%
2	1	0	1	0
3	2	0	2	0
4	6	1	5	16.667
5	21	1	20	4.762
6	112	4	108	3.571
7	853	16	837	1.876
8	11 117	86	11 031	0.774
9	261 080	879	260 201	0.337

猜想 4 所有图几乎都是优雅图.

3.3 9 个点之内的部分非优雅图

虽然 9 个点以内的所有非优雅图数量占总图数的比例较低,但数量依然较大,只选取其中比较特殊及常见的部分非优雅图,命名方式为 p_q_n

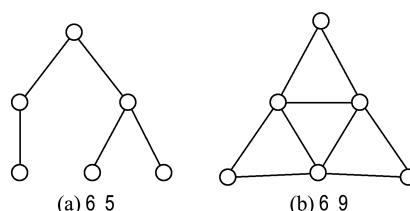


图 3 $p=6$ 的非优雅图

Fig. 3 Non-elegant graphs when p is equal to 6

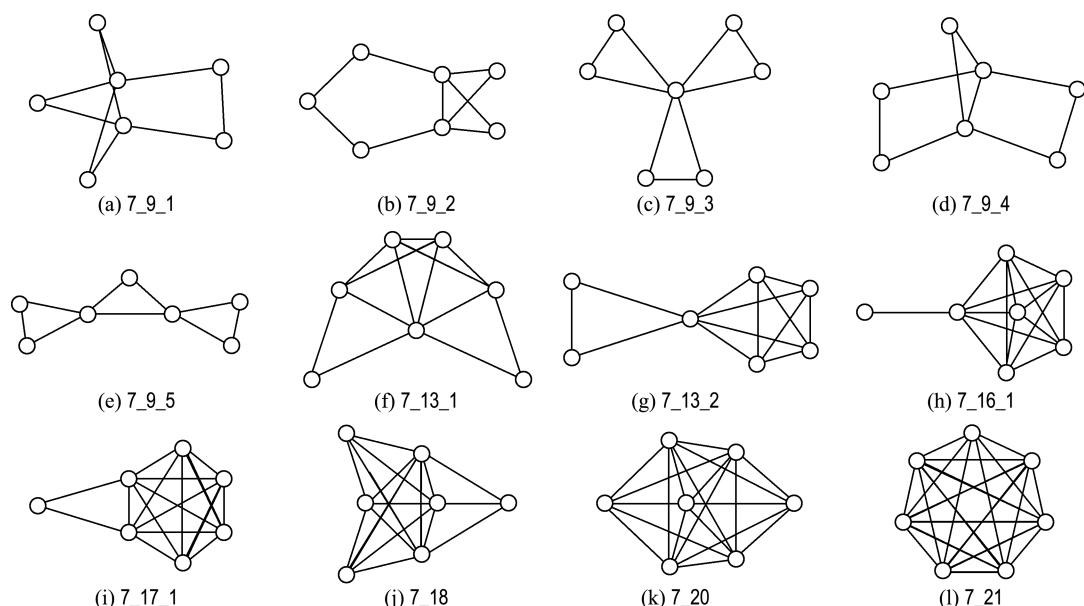
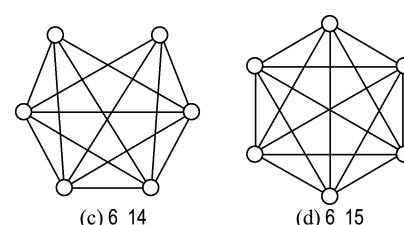


图 4 $p=7$ 的部分非优雅图

Fig. 4 Partial non-elegant graphs when p is equal to 7

number, 其中 number 表示为 (p, q) 图中列举的非优雅图顺序, 若只有一个非优雅图, 则 number 予以省略.

点数为 4 的非优雅图已经由文献[2]给出, 共有 1 个, 如图 2(a)所示.

点数为 5 的非优雅图有 1 个, 由文献[1]给出, 并证明了圈图 C_n 的优雅性, 如图 2(b)所示.

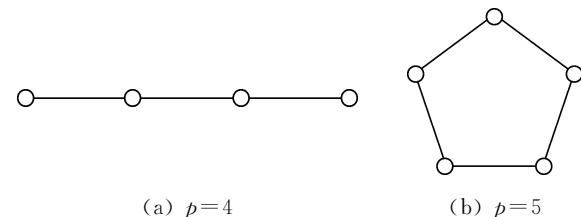


图 2 $p=4,5$ 的非优雅图

Fig. 2 Non-elegant graph when p is equal to 4, 5

点数为 6 的非优雅图共 4 个, 如图 3 所示. 点数为 7 的非优雅图共 16 个, 部分如图 4 所示.

点数为 8 的非优雅图共 86 个,部分如图 5 所示. 点数为 9 的部分非优雅图如图 6 所示.

3.4 9 个点内部分优雅图

为了证明本文提出算法的可行性及有效性,

随机选取了部分优雅图,其顶点数及边数都较大,在不借助计算机程序的条件下,传统人力标注较难完成.(8,19)、(8,23)、(9,14)、(9,18)、(9,20)、(9,29)图部分优雅图如图 7、8 所示.

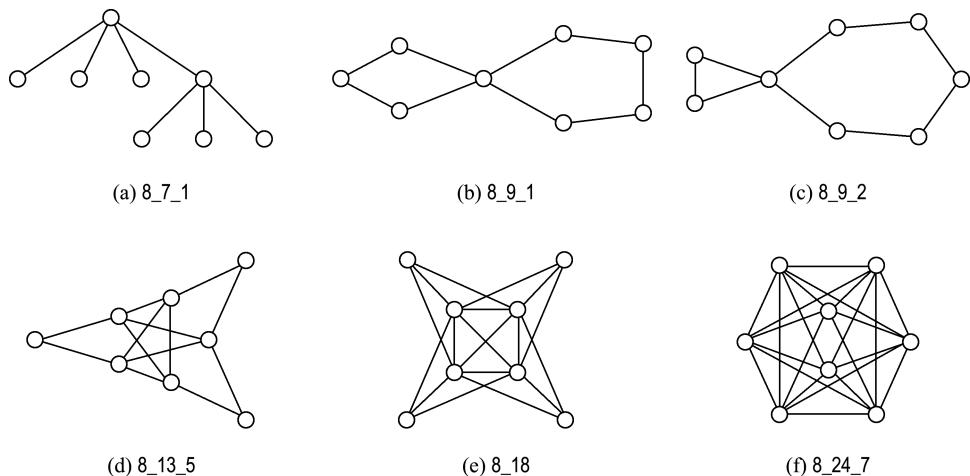


图 5 $p=8$ 的部分非优雅图

Fig. 5 Partial non-elegant graphs when p is equal to 8

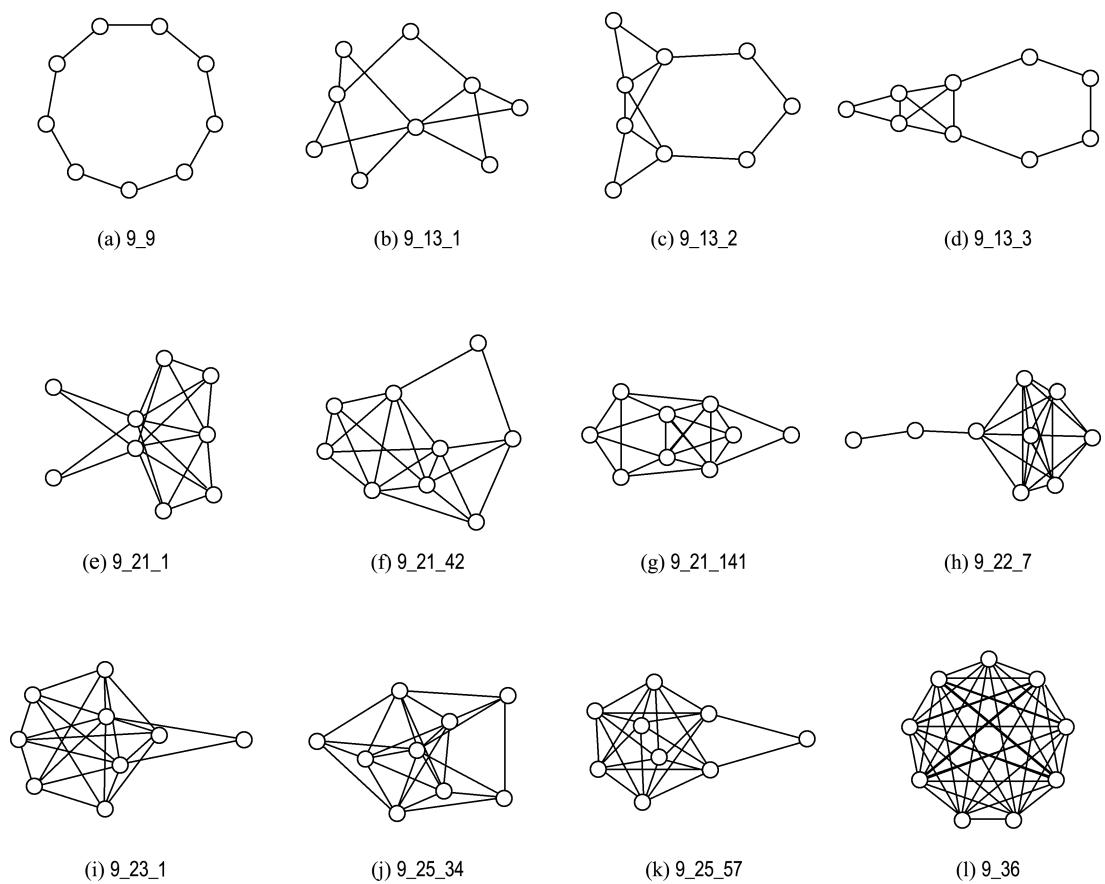
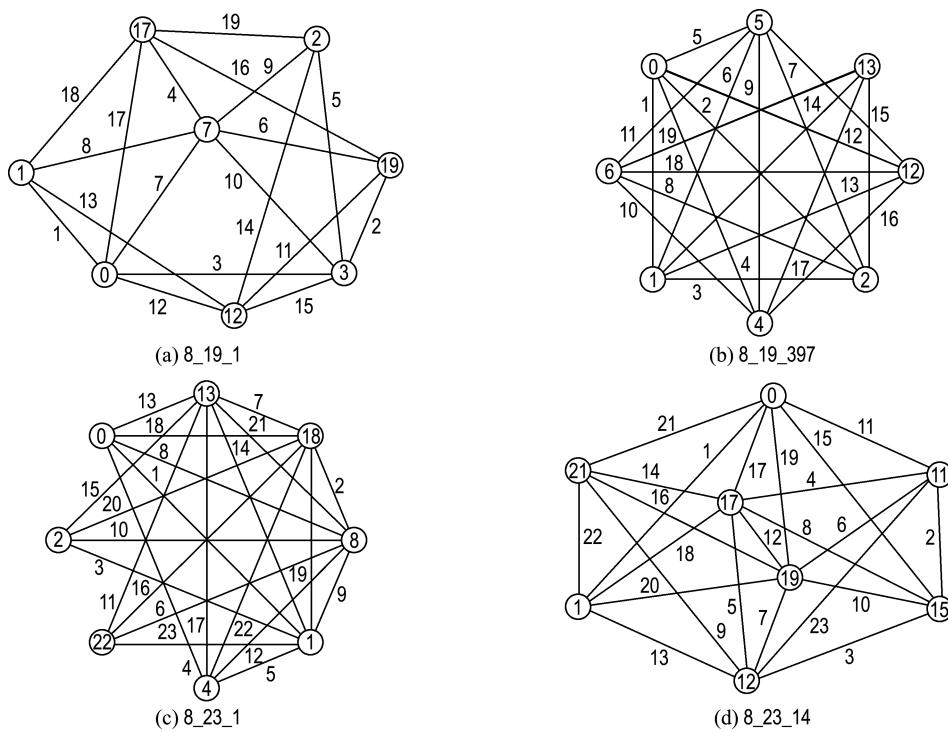
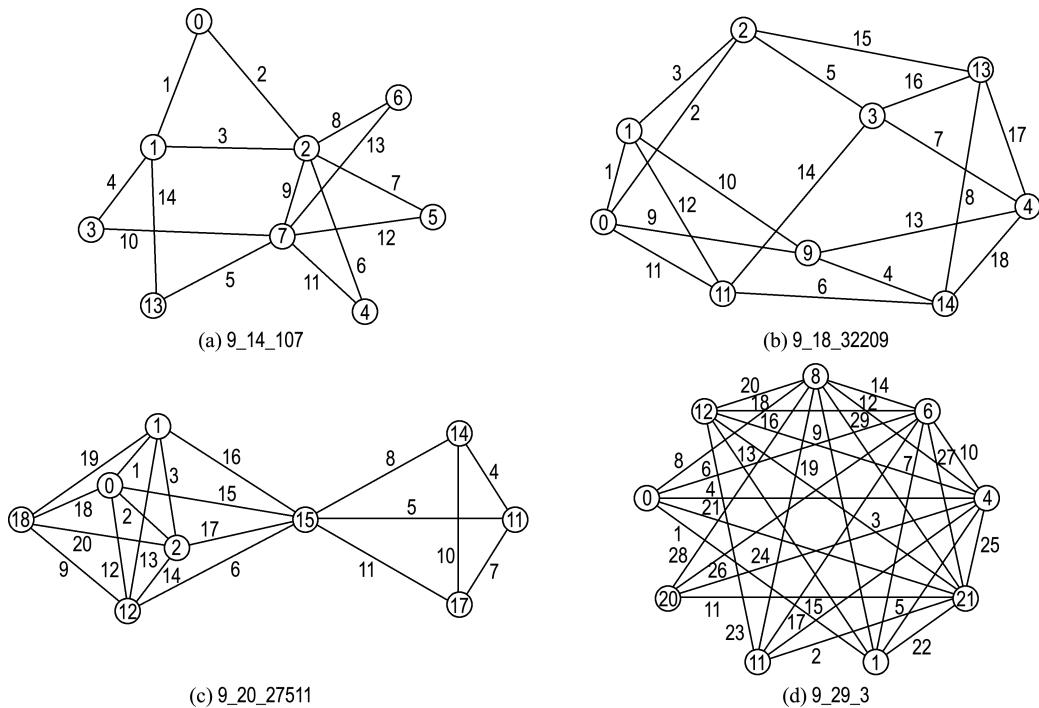


图 6 $p=9$ 的部分非优雅图

Fig. 6 Partial non-elegant graphs when p is equal to 9

图 7 $p=8$ 的部分优雅图Fig. 7 Partial elegant graphs when p is equal to 8图 8 $p=9$ 的部分优雅图Fig. 8 Partial elegant graphs when p is equal to 9

4 结语

图的标号问题由来已久,传统的研究方式往

往局限于小点数图形及某类特殊图,通过对小点数的图形进行标号,观察其中的规律,然后拓展去

验证大点数的该类型图,但这种方式具有局限性,且效率低下,无法完成对 9 个点内的所有图进行标号,因而无法发现优雅标号的普遍规律。本文通过程序设计,提出了深度遍历搜索优雅空间的思想,可以搜索出该图的所有优雅标号。本文完成了 9 个点之内所有图的优雅性判断,提出了定理和猜想并给出相关数据及部分非优雅图,为图标号领域内进一步证明相关猜想提供了基础数据支持。

通过对程序的结果进行分析,对一个图 G 是否优雅做如下判断:(1)所有的奇树都是优雅的;所有的偶树中至少有一棵非优雅树,但大多数偶树都是优雅的。(2)当 $p-1 \leq q \leq 2p$ 且 $q \neq 1 \pmod{4}$ 时,所有图都是优雅的。

研究可知,2~9 个点内图的总数为 273 192,优雅图为 272 205,优雅比率达到 99.638 7%;针对研究中的发现,本文提出一个公开问题如下:当 $q \geq 2p$ 时,这类 (p, q) 图全部是优雅的,如 $(9, 19)$ 图中 31 996 个图、 $(9, 20)$ 图中 27 764 个图全部是优雅的,这类图具有怎样的特性?该如何刻画?

参考文献:

- [1] CHANG G J, HSU D F, ROGERS D G. Additive variations on a graceful theme: Some results on harmonious and other related graphs [J]. *Congressus Numerantium*, 1981, **32**:181-197.
- [2] CAHIT I. Elegant valuation of the paths [J]. *Ars Combinatoria*, 1983, **16**:223-227.
- [3] BALAKRISHNAN R, SELVAM A, YEGNANARAYANAN V. Some results on elegant graphs [J]. *Indian Journal of Pure & Applied Mathematics*, 1997, **28**(7):905-916.
- [4] DEB P, LIMAYE N B. On elegant labelings of triangular snakes [J]. *Journal of Combinatorial Information System Science*, 2000, **25**:163-172.
- [5] ZHOU Sanming. Unifying approaches for constructing labeled graphs from known ones [J]. *Journal of Combinatorial Information System Science*, 1995, **20**(1/2/3/4):305-319.
- [6] ZHOU Xiangqian, YAO Bing, CHEN Xiang'en. Every lobster is odd-elegant [J]. *Information Processing Letters*, 2013, **113**(1/2):30-33.
- [7] GALLIAN J A. A dynamic survey of graph labeling [J]. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2002, **5**:#DS6.
- [8] ROSA A. On certain valuations of the vertices of a graph [M] // ROSENSTIEHL P. *Theory of Graphs*. New York: Gordon and Breach, 1966:349-355.
- [9] MCKAY B D, PIPERNO A. Practical graph isomorphism II [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2014, **60**:94-112.

Conjecture of elegant graph

ZHAO Ke, LI Jingwen*, WEI Zhongde

(School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: For graph $G(p, q)$, if there exists an injective function $f: V(G) \rightarrow [0, 1, 2, \dots, q]$, such that $f(E(G)) = \{f(uv) = (f(u) + f(v)) \bmod (q+1) | uv \in E(G)\} = [1, \dots, q]$, the graph G is called an elegant graph. A combination of pruning and predictive function is used to design a recursive backtracking algorithm. The elegance of all the simple connected graphs in 9 points is verified, and all elegant and non-elegant graphs are obtained. According to the experimental results, it is verified that when $3 \leq p \leq 9$, all tree graphs and unicyclic graphs are almost elegant, which proves that when $3 \leq q \leq 9$ and $q \neq 1 \pmod{4}$, the graph $G(p, q)$ is elegant. Finally, the conjecture that the majority of the graphs are elegant is given.

Key words: elegant labeling; elegant graphs; non-elegant graphs; elegant spaces; elegant graphs conjectures