第58卷第6期
2018年11月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 58, No. 6
Nov. 2018

文章编号：1000-8608(2018)06-0649-06

两个相同部件并联可修系统解研究

周 莉*

（齐齐哈尔大学 理学院，黑龙江 齐齐哈尔 161006）

摘要：研究了两个相同部件并联可修系统解的问题．利用半离散化逼近方法将抛物型偏微分方程组化为矩阵常微分方程组，即用初等阶梯函数对并联可修系统的修复率 $\mu(x)$ 进行逼近，使该系统转化为半离散化系统．并对该系统的动态解用 C_0 半群理论中的 Trotter 定理加以证明，得到该解的收敛性．最后假设该并联系统的修复率为常数，利用 Matlab 软件进行数值实验，从实验图形中发现该可修系统的数值解和理论证明的结论是一致的．结果表明，离散后的常微分方程组的解收敛于原抛物型偏微分方程组的解，从而为该模型的进一步数值计算打下了基础．

关键词：半离散化；逼近；C_0 半群；算子

中图分类号：O175.6　　**文献标识码**：A　　**doi**：10.7511/dllgxb201806014

0　引　言

两相同部件并联系统模型是可修系统模型的一种，是一种可靠性数学模型．可修系统模型包含串联和并联系统，允许对失效部件进行修理，修理后的部件可继续执行其使命，使其恢复功能．在实际生产生活中，为了改善系统的可靠性，经常采用维修的手段．由于引入了修理，模型的分析更加复杂．例如 Huang 等研究了多态连续 n 中取 k 可修模型[1-4]，补充和深化了可修系统理论．而并联系统是包含多个部件，且有一个能够正常工作的完好系统，是具有较强的实用价值的可修系统．王定江[5]讨论了两相同部件并联可修系统的稳定性并应用强连续算子半群理论证明了系统非负解的唯一存在性；史定华[6]在 $\partial p_1(x,t)/\partial t=0$ 条件下用 Laplace 变换给出了解的 Laplace 变换公式，即得到了解的存在性．文献[7]中用 C_0 半群理论研究了这个系统存在唯一非负的时间依赖解．郭卫华[8]用迭代法证明了该系统非负解的存在性和唯一性．本文在两相同部件并联系统中用初等阶梯函数对其修复率进行逼近，用半离散算法[9-10]将该系统转化为两个离散化数学模型，并且运用泛函分析理论证明系统模型动态解的逼近．

1　数学模型

一类两个相同部件并联可修系统的模型见图1．

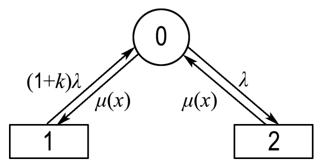


图1　两个相同部件并联可修系统的模型

Fig. 1　Two parallel repairable system model with the same components

该模型可用积分-微分方程组（系统Ⅰ）描述为

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-\lambda(k+1)p_0(t)+\int_0^{\infty}p_1(x,t)\mu(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\frac{\partial p_1(x_t,t)}{\partial t}+\frac{\partial p_1(x_t,t)}{\partial x}=-(\lambda+\mu(x))p_1(x,t) \tag{2}$$

收稿日期：2018-05-10；　**修回日期**：2018-09-20．
基金项目：国家科技支撑计划资助项目（2013BAK12B0803）；黑龙江省教育厅科学技术研究资助项目（135109229）．
作者简介：周　莉*（1976-），女，副教授，E-mail：13796881349@139.com．

$$p_1(0,t)=\lambda(k+1)p_0(t) \tag{3}$$

$$p_0(0)=1,\ p_1(x,0)=0 \tag{4}$$

式中：$p_0(t)$表示在时刻 t 两个部件完好的概率；$p_1(x,t)\mathrm{d}x$ 表示在时刻 t 一个部件完好另一个部件故障并且故障的部件在$(x,x+\mathrm{d}x]$内被修好的概率；λ 表示部件的平均寿命；$\mu(x)$表示部件的修复率，满足

$$0\leqslant\mu(x)<\infty$$

$$\forall M>0,\int_0^M\mu(x)\mathrm{d}x<\infty,\int_0^\infty\mu(x)\mathrm{d}x=\infty$$

k 表示正比失效率，$k=1$ 时表示并联，$0<k<1$ 时表示热备，$k>1$ 时表示冷备. 当两个部件都完好时一个部件工作，一个部件储备，储备的部件失效率为 $k\lambda$.

2 泛函分析处理

下面在 Banach 空间中用抽象 Cauchy 问题的形式来描述这个系统.

设算子

$$\boldsymbol{A}=\mathbf{diag}\left\{-\lambda(k+1),-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[-(\lambda+\mu(x))]\right\},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & \int_0^\infty\mu(x)\mathrm{d}x\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

取状态空间

$$\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}\times L^1[0,\infty)\mid\|\boldsymbol{p}\|=\|\boldsymbol{p}_0\|+\|\boldsymbol{p}_1\|_{L^1[0,\infty)}\}$$

显然，$\boldsymbol{X}$ 是 Banach 空间. 算子 $\boldsymbol{A}$ 的定义域为

$$D(\boldsymbol{A})=\Big\{\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}_0\quad\boldsymbol{p}_1(x))\in\boldsymbol{X}\,\Big|\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1(x)}{\mathrm{d}x},\boldsymbol{p}_1(x)\in L^1[0,\infty),\boldsymbol{p}_1(x)\text{是绝对连续函数且}\ \boldsymbol{p}_1(0)=\lambda(k+1)\boldsymbol{p}_0\Big\}$$

则式(1)～(4)可以描述成 Banach 空间 $\boldsymbol{X}$ 中一个抽象的 Cauchy 问题.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}(t)}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}(t);\ t\geqslant0 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{p}(0)=(1\quad 0)^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

3 计算模型半离散化

假设 $\mu(x)$满足在$(0,\infty)$上是连续有界的，$\int_0^\infty\mu(x)\mathrm{d}x=\infty$，对任意固定 $\alpha>0$，$\int_0^\alpha\mu(x)\mathrm{d}x<\infty$且存在 $\mu^*>0$，使得$\lim\limits_{x\to\infty}\mu(x)=\mu^*$，取

$$0=a_0<a_1<\cdots<a_n=x_0$$

令

$$\Delta_i=[a_{i-1},a_i],\ x_0\in(0,\infty)$$

下面构造阶梯函数：

$$\mu_n(x)=\begin{cases}\sup\limits_{\substack{a_{i-1}\leqslant x<a_i\\1\leqslant i\leqslant n}}\mu(x); & x\in\Delta_i\\ \mu^*; & x\in(x_0,\infty)\end{cases}$$

则由假设，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $x_0\in[0,\infty)$使得

$$|\mu(x)-\mu^*|<\varepsilon$$

与

$$|\mu_n(x)-\mu(x)|<\varepsilon$$

进而原模型经离散后化为式$(1)'$～$(4)'$(即原系统的修复率 $\mu(x)$置换为 $\mu_n(x)$)，则原偏微分方程变为常微分方程系统$(1)'$～$(4)'$，如同前面一样把式$(1)'$～$(4)'$用 Banach 空间中的抽象 Cauchy 问题来描述：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_n(t)}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{B}_n)\boldsymbol{p}_n^{\mathrm{T}}(t);\ t\geqslant0 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{p}_n(0)=(1\quad 0)^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

4 动态解逼近的证明

由线性算子半群对偏微分方程的应用及文献[11]知：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 生成一个 C_0 压缩半群，又因为生成 C_0 半群具有唯一性，所以此压缩 C_0 半群就是 $T(t)$.

首先估计线性算子 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 和$(\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{B}_n)$的预解式分别为 $R(v;\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$和 $R(v;\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{B}_n)$，然后对系统动态解的逼近问题用 Trotter 定理加以证明.

考虑方程$[v\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})]\boldsymbol{p}(x)=\boldsymbol{y}(x)$，即

$$(v+\lambda(k+1))\boldsymbol{p}_0-\int_0^\infty\boldsymbol{p}_1(x)\mu(x)\mathrm{d}x=\boldsymbol{y}_0 \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{p}_1(x)+(v+\lambda+\mu(x))\boldsymbol{p}_1(x)=\boldsymbol{y}_1(x) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{p}_1(0)=\lambda(k+1)\boldsymbol{p}_0 \tag{11}$$

由式(11)可得

$$\boldsymbol{p}_1(x)=\boldsymbol{p}_1(0)\exp\left[-\int_0^x(v+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi\right]+\int_0^x\boldsymbol{y}_1(\tau)\exp\left[\int_\tau^x(v+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau \tag{12}$$

令

$$W=\exp\left[-\int_0^x(v+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi\right]$$

$$Q(\boldsymbol{y}_1)=\int_0^x\boldsymbol{y}_1(\tau)\exp\left[\int_\tau^x(v+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau$$

将式(12)代入式(9)得

$$(v+\lambda(k+1))\boldsymbol{p}_0-\int_0^\infty\Big\{\lambda(k+1)\boldsymbol{p}_0\mu(x)\cdot\exp\left[-\int_0^x(v+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi\right]+\int_0^x\boldsymbol{y}_1(\tau)\mu(x)\cdot\exp\left[-\int_\tau^x(v+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau\Big\}\mathrm{d}x=\boldsymbol{y}_0\qquad(13)$$

令

$$\omega=\int_0^\infty\mu(x)\exp\left[-\int_0^x(v+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}x$$

$$\varphi(\boldsymbol{y}_1)=\int_0^\infty\mu(x)\int_0^x\boldsymbol{y}_1(\tau)\exp\left[\int_\tau^x(v+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x$$

整理得

$$(v+\lambda(k+1)(1-\omega))\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{y}_0+\varphi(\boldsymbol{y}_1)\qquad(14)$$

令

$$|D|=v+\lambda(k+1)(1-\omega)=v\left[1+\frac{\lambda}{v}(k+1)(1-\omega)\right]$$

所以由文献[12]得出当 $v>0$ 时 $|D|\neq0$ 方程(14)的解是唯一的，因此方程组(9)～(11)的解也是唯一的，进而有 $R(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}$，$(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$ 是闭算子，且 $(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$ 也存在并且是有界的. 而 $|D|$ 能用 ω 线性表示，所以当 $v>0$ 时

$$0<|\omega|=\left|\int_0^\infty\mu(x)\exp\left[-\int_0^x(v+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^\infty\mu(x)|\exp(-vx)|\cdot\exp\left[-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}x\leqslant\int_0^\infty\mu(x)\left|\exp\left[-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\right|\mathrm{d}x$$

$(\exp(-vx)$为减函数$)=$

$$\int_0^\infty\mu(x)\left(-\frac{1}{\mu(\xi)\big|_0^x}\right)\cdot\mathrm{d}\exp\left[-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi\right]=1$$

即 $0<|\omega|<1$，那么 $|D|$ 也是有界的. 所以由式(14)得

$$\boldsymbol{p}_0=\frac{1}{|D|}[\boldsymbol{y}_0+\varphi(\boldsymbol{y}_1)]$$

将 $\boldsymbol{p}_0$ 代入 $\boldsymbol{p}_1(x)$则有

$$\boldsymbol{p}_1(x)=\frac{\lambda(k+1)\omega}{|D|}[\boldsymbol{y}_0+\varphi(\boldsymbol{y}_1)]+Q(\boldsymbol{y}_1)$$

取

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&\varphi(\boldsymbol{y}_1)\\\lambda(k+1)\omega&\lambda(k+1)\omega+Q(\boldsymbol{y}_1)\end{pmatrix}$$

因此 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的预解式为

$$R(v;\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\frac{\boldsymbol{\Lambda}}{|D|}$$

将$(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$中 ω、$\varphi(\boldsymbol{y}_1)$、$W$、$Q(\boldsymbol{y}_1)$、$|D|$含有的 $\mu(x)$变为 $\mu_n(x)$得到$(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{B}_n)^{-1}$，相应的 ω、$\varphi(\boldsymbol{y}_1)$、$W$、$Q(\boldsymbol{y}_1)$、$|D|$ 记为 ω_n、$\varphi_n(\boldsymbol{y}_1)$、$W_n$、$Q_n(\boldsymbol{y}_1)$、$|D_n|$，$\boldsymbol{\Lambda}$ 记为 $\boldsymbol{\Lambda}_n$，于是得到

$$R(v;\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{B}_n)=(v\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_n-\boldsymbol{B}_n)^{-1}=\frac{\boldsymbol{\Lambda}_n}{|D_n|}$$

现在来证明系统修复率的逼近，只要证明 $R(v;\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{B}_n)\boldsymbol{y}\to R(v;\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{y}$.

只需证明

$$\frac{\boldsymbol{\Lambda}_n}{|D_n|}\to\frac{\boldsymbol{\Lambda}}{|D|}\ (n\to\infty)$$

$$\frac{\boldsymbol{\Lambda}_n}{|D_n|}\to\frac{\boldsymbol{\Lambda}}{|D|}\ (n\to\infty)\Leftrightarrow\boldsymbol{\Lambda}_n\to\boldsymbol{\Lambda},\ |D_n|\to|D|$$

且 $|D_n||D|\neq0$，$|D_n|$、$|D|$ 有界 $(n\to\infty)$. $|D|\neq0$ 同理 $|D_n|\neq0$，且 $|D_n|$ 有界，$|D|$ 为 ω 的线性表示，ω 中含有 $\mu(x)$，要证明 $|D_n|\to|D|$，只需证明 $\omega_n\to\omega(n\to\infty)$.

考虑

$$|\omega_n-\omega|=\left|\int_0^\infty\mu_n(x)\exp\left[-\int_0^x(v+\lambda+\mu_n(\xi))\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}x-\int_0^\infty\mu(x)\cdot\exp\left[-\int_0^x(v+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}x\right|=$$

$$\left|\int_0^\infty[\mu_n(x)-\mu(x)]\cdot\exp\left[-xv-\lambda-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}x-\int_0^\infty\mu_n(x)\exp\left[-xv-\lambda-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}x+\int_0^\infty\mu_n(x)\cdot\exp\left[-xv-\lambda-\int_0^x\mu_n(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}x\right|\leqslant$$

$$\int_0^\infty |\mu_n(x)-\mu(x)|\exp\left[-xv-\lambda-\int_0^x\mu(\xi)d\xi\right]dx+\int_0^\infty\mu_n(x)\cdot\left|\exp\left[-xv-\lambda-\int_0^x\mu(\xi)d\xi\right]-\exp\left[-xv-\lambda-\int_0^x\mu_n(\xi)d\xi\right]\right|dx$$

则有 $|\omega_n|\to|\omega|(n\to\infty)$，即 $|D_n|\to|D|(n\to\infty)$.

证明 $\boldsymbol{\Lambda}_n\to\boldsymbol{\Lambda}(n\to\infty)$，只需证明相应元素逼近，即

$$\varphi(\boldsymbol{y}_n)\to\varphi(\boldsymbol{y}_1),\ W_n\to W,\ \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}_n)\to\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}_1)(n\to\infty)$$

$$|W_n-W|=\left|\exp\left[-\int_0^x(v+\lambda+\mu_n(\xi))d\xi\right]-\exp\left[-\int_0^x(v+\lambda+\mu(\xi))d\xi\right]\right|\leqslant\exp(-vx-\lambda)\int_0^x|\mu_n(\xi)-\mu(\xi)|d\xi\to0\ (n\to\infty)$$

$$|\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}_n)-\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}_1)|=\left|\int_0^x\exp\left[-\int_\tau^x(v+\lambda+\mu_n(\xi))d\xi\right]d\tau-\int_0^x\exp\left[-\int_\tau^x(v+\lambda+\mu(\xi))d\xi\right]d\tau\right|\leqslant\int_0^x\exp[-(v+\lambda)(x-\tau)]\cdot\int_0^x|\mu_n(\xi)-\mu(\xi)|d\xi d\tau\to0\ (n\to\infty)$$

$$|\varphi(\boldsymbol{y}_n)-\varphi(\boldsymbol{y}_1)|=\left|\int_0^\infty\int_0^x\mu_n(\xi)\exp\left[-\int_\tau^x(v+\lambda+\mu_n(\xi))d\xi\right]d\tau dx-\int_0^\infty\int_0^x\mu(\xi)\exp\left[-\int_\tau^x(v+\lambda+\mu(\xi))d\xi\right]d\tau dx\right|\leqslant$$

$$\int_0^\infty\int_0^x\exp[-(v+\lambda)(x-\tau)]\cdot\left|\mu_n(x)\exp\left[-\int_\tau^x\mu_n(\xi)d\xi\right]-\mu(x)\exp\left[-\int_\tau^x\mu(\xi)d\xi\right]\right|d\tau dx\leqslant$$

$$\int_0^\infty\int_0^x\exp[-(v+\lambda)(x-\tau)]\cdot|\mu_n(x)-\mu(x)|\cdot\exp\left[-\int_\tau^x\mu(\xi)d\xi\right]d\tau dx+\int_0^\infty\int_0^x\exp[-(v+\lambda)(x-\tau)]\cdot\mu(x)\int_0^x|\mu_n(x)-\mu(x)|d\xi d\tau dx\to0\ (n\to\infty)$$

综上所述

$$|\boldsymbol{\Lambda}_n|\to|\boldsymbol{\Lambda}|\ (n\to\infty)$$

亦即

$$\frac{|\boldsymbol{\Lambda}_n|}{|D_n|}\to\frac{|\boldsymbol{\Lambda}|}{|D|}\ (n\to\infty)$$

即

$$R(v;\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{B}_n)\boldsymbol{y}\to R(v;\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{y}\ (n\to\infty)$$

因为 $\boldsymbol{T}(t)$是由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 生成的收缩 C_0 半群，且 $\|\boldsymbol{T}(t)\|\leqslant1$，即得出 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{G}(1,0)$. 因此同理可得出 $\boldsymbol{T}_n(t)$就是由 $\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{B}_n$ 生成的收缩 C_0 半群，即得出 $\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{B}_n\in\boldsymbol{G}(1,0)$. 最后由 Trotter 逼近定理可知对任意的 $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{X}$ 和 $t\geqslant0$，当 $n\to\infty$ 时 $\boldsymbol{T}_n(t)\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{T}(t)\boldsymbol{y}$.

这样就证明了系统动态解的逼近.

5 数值计算模型

为了验证以上离散后的常微分方程组解的收敛性，用实践证明理论的正确性. 下面利用数值计算方法[13]，对上述结果进行数值模拟.

为此假设修复率为常数，即 $\mu(x)=\mu$，并令 $\int_0^\infty p_1(x,t)dx=p_1(t)$，则系统(Ⅰ)转化为一个常微分方程组(Ⅱ)：

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda(k+1)p_0(t)+\mu p_1(t)\tag{15}$$

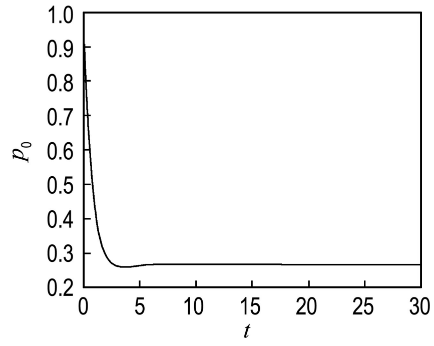
$$\frac{\partial p_1(t)}{\partial t}=-\lambda p_1(t)+\mu p_1(t)\tag{16}$$

$$p_0(0)=1,\ p_1(0)=0\tag{17}$$

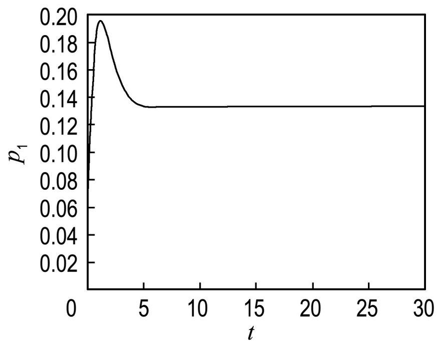
下面用 Matlab 数学软件求常微分方程组的数值解，此时令 $\lambda=0.5$，$\mu=0.5$，其结果如图 2 所示.

对图 2 进行分析表明本文建立的离散化模型具有系统动态解. 这个结论与理论证明的结论是

一致的，进而说明半离散算法对于该可修系统模型是可行的.



（a）p_0



（b）p_1

图 2　系统（Ⅱ）的数值解（$\mu(x)=\mu$，为常数）

Fig. 2　Numerical solution of system（Ⅱ）（$\mu(x)=\mu$, is constant）

6　结　语

理论分析表明半离散化逼近方程能够保持许多原来重要问题的物理意义，所以该逼近方程就可以作为原物理问题的常微分方程模型[14-15]. 本文利用半离散化方法将两相同部件并联可修系统模型转化为矩阵常微分方程组，证明了该方程组解是收敛的. 当假设修复率为常数时对模型解进行数值分析与计算，得到该模型的拟合图.

参考文献：

[1] HUANG Jinsheng, ZUO Ming J, FANG Zhide. Multi-state consecutive K-out-of-n systems [J]. **IIE Transactions (Institute of Industrial Engineers)**, 2003, **35**(6): 527-534.

[2] ZUO Ming J, LIN Daming, WU Yanhong. Reliability evaluation of combined k-out-of-n: F, consecutive-k-out-of-n: F, and linear connected-(r, s)-out-of-(m, n): F system structures [J]. **IEEE Transactions on Reliability**, 2000, **49**(1): 99-104.

[3] 王旭艳，师义民，任丽梅，等. 环形相邻 2/n(F)可修系统的可靠性分析[J]. 系统工程与电子技术，2004，**26**(6)：854-858.
WANG Xuyan, SHI Yimin, REN Limei, *et al*. Reliability analysis for circular consecutive-2-out-of-n: F repairable system [J]. **Systems Engineering and Electronics**, 2004, **26**(6): 854-858. (in Chinese)

[4] WU Yueqin, GUAN Jiancheng. Repairable consecutive-k-out-of-n: G systems with r repairmen [J]. **IEEE Transactions on Reliability**, 2005, **54**(2): 328-337.

[5] 王定江. 一类两相同部件并联可修系统的稳定性[J]. 浙江工业大学学报，2006，**34**(2)：228-236.
WANG Dingjiang. Stability of a class of repairable system consisting of two identical units [J]. **Journal of Zhejiang University of Technology**, 2006, **34**(2): 228-236. (in Chinese)

[6] 史定华. 随机模型的密度演化方法[M]. 北京：科学出版社，1999.
SHI Dinghua. **The Density Evolution Method of the Stochastic Model** [M]. Beijing: Science Press, 1999. (in Chinese)

[7] 艾尼·吾甫尔. 一类两个相同部件并联的可修系统的适定性[J]. 应用泛函分析学报，2001，**3**(2)：188-192.
GUPUR Geni. The well-posedness of a system consisting of two repairable unit [J]. **Acta Analysis Functionalis Applicata**, 2001, **3**(2): 188-192. (in Chinese)

[8] 郭卫华. 一类两个相同部件并联可修系统解的存在性和唯一性[J]. 数学的实践与认识，2002，**32**(4)：632-634.
GUO Weihua. The existence and uniqueness of a parallel repairable system with two some parts [J]. **Mathematics in Practice and Theory**, 2002, **32**(4): 632-634. (in Chinese)

[9] 许　晖，李　东. 具有易损坏储备部件复杂可修系统解的半离散化[J]. 数学的实践与认识，2005，**35**(12)：149-156.
XU Hui, LI Dong. The semi-discretization of a complex system with a deteriorating standby

unit [J]. **Mathematics in Practice and Theory**, 2005, **35**(12):149-156. (in Chinese)

[10] 周 莉,吴险峰,韩 旸. 两相同部件温贮备可修人机系统解的半离散化[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2016, **33**(6):759-765.
ZHOU Li, WU Xianfeng, HAN Yang. The semi-discretization of repairable, warm standby, man-machine system with two identical units [J]. **Journal of Natural Science of Heilongjiang University**, 2016, **33**(6):759-765. (in Chinese)

[11] DAZY A. 线性算子半群及对偏微分方程的应用[M]. 黄发伦,郑 权,译. 成都:四川大学出版社, 1988.
DAZY A. **Semigroups of Linear Operators and Their Applications to Partial Differential Equations** [M]. HUANG Falun, ZHENG Quan, trans. Chengdu: Sichuan University Press, 1988. (in Chinese)

[12] 徐厚宝,郭卫华,于景元,等. 一类串联可修复系统的稳态解[J]. 应用数学学报, 2006, **29**(1):46-52.
XU Houbao, GUO Weihua, YU Jingyuan, *et al*. The asymptotic stability of a series repairable system [J]. **Acta Mathematicae Applicatae Sinica**, 2006, **29**(1):46-52. (in Chinese)

[13] 陶有德,路振国,范琳琳,等. 一类可修复计算机系统的数值计算[J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2013, **26**(4):493-495.
TAO Youde, LU Zhenguo, FAN Linlin, *et al*. The numerical calculation of a repairable computer system [J]. **Journal of Xinyang Normal University (Natural Science Edition)**, 2013, **26**(4):493-495. (in Chinese)

[14] HUANG Jicai, XIAO Dongmei. Analyses of bifurcations and stability in a predator-prey system with holling type Ⅳ functional response [J]. **Acta Mathematicae Applicatae Sinica: English Series**, 2004, **20**(1):167-178.

[15] FEENEY G. Population dynamics based on birth intervals and parity progression [J]. **Population Studies**, 1983, **37**(1):75-89.

Study of solutions of two parallel repairable systems with same components

ZHOU Li*

(College of Science, Qiqihar University, Qiqihar 161006, China)

Abstract: The problem of solving two parallel repairable systems with the same components is studied. Parabolic partial differential equations are transformed into matrix ordinary differential equations by using semi-discrete approximation method, that is, the repairability rate $\mu(x)$ of parallel repairable systems is approximated by elementary step functions. The system is transformed into a semi-discrete system. The dynamic solution of the system is proved by the Trotter theorem of semi-group theory C_0, and the convergence of the solution is obtained. Finally, assuming that the repairability rate of the parallel system is constant, the numerical solution of the repairable system is found to be consistent with the theoretical proof from experimental graph by using the Matlab software to carry out numerical experiments. The results show that the solution of the discrete ordinary differential equations converges to the solution of the original parabolic partial differential equation, thus lay foundation for further numerical calculation of the model

Key words: semi-discretization; approximation; semi-group of class C_0; arithmetic