第59卷第1期
2019年1月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 59, No. 1
Jan. 2019

文章编号：1000-8608(2019)01-0106-05

两类特殊图 1-因子数分类递推求法

唐保祥*[1]， 任 韩[2]

（1. 天水师范学院 数学与统计学院，甘肃 天水 741001；
2. 华东师范大学 数学系，上海 200062）

摘要： 图的 1-因子计数问题已经被证明是 NP-难的，但因该问题在量子化学、晶体物理学和计算机科学中都有重要的应用，对此问题的研究具有非常重要的理论价值和现实意义. 首先，把图的 1-因子按关联某个顶点的边进行分类，求出每一类 1-因子数的递推关系式. 其次，把各类 1-因子的递推关系式相加，得到一组有相互联系的递推关系式，再利用这些递推关系式之间的相互关联，消去那些不需要的递推关系式，从而得到这个图的 1-因子数的递推关系式. 最后解出这个递推关系式的通解，进而得到这个图的 1-因子数的显式公式.

关键词： 1-因子；递推关系式；通解；显式公式

中图分类号： O157.5 **文献标识码：** A **doi：** 10.7511/dllgxb201901014

0 引 言

理论上讲，对于存在 1-因子的图，把 1-因子按照关联某个顶点的边进行分类，求出每一类 1-因子数目，再把所有类求和就可以得到这个图的所有 1-因子数. 当这个图的顶点和边的数目较多时，这种方法就不是一个有效的方法（即计算量不是该图边数或顶点数的多项式计算量，而是指数表达式计算量）. 但是，利用这种思想，把这个图的所有 1-因子，按照饱和某个顶点的 1-因子分类，求出每一类 1-因子数的递推关系式，再把各类1-因子的递推关系式相加，就得到一组有相互联系的递推关系式；利用这些递推关系式之间的相互关联，消去那些不需要的递推关系式，从而得到这个图的 1-因子数的递推关系式；最后求出这个递推式的通解，进而得到这个图的 1-因子数的显式公式[1-12]. 利用这个方法能求出 1-因子递推关系式的图是很多的，但能由递推关系式解出其显式表达式的图就比较有限了. 原因是当递推关系式对应的特征方程是高次方程时，往往求不出其根. 但是从应用的角度来看，图的 1-因子数的递推关系式往往比其显式表达式更方便得到该图的 1-因子数. 因此，这个方法为图的 1-因子的应用提供了有力支持.

1 基本概念

定义 1 若图 G 有一个 1-正则生成子图，则称这个生成子图为图 G 的 1-因子.

定义 2 设图 G 是一个有 1-因子的图，若图 G 的两个 1-因子 M_1 和 M_2 中有一条边不同，则称 M_1 和 M_2 是图 G 的两个不同的 1-因子.

定义 3 设 $C_i = u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i5}u_{i6}u_{i1}$ 是长为 6 的圈，把顶点 v_i 与圈 C_i 上的顶点 u_{i2}、u_{i4}、u_{i6} 分别连接一条边的图记为 $W_{6,3}^{i}$（$i=1,2,\cdots,2n$）. 给 $W_{6,3}^{i}$ 与 $W_{6,3}^{i+1}$ 的添加上边 $u_{i3}u_{i+1,1}$、$u_{i4}u_{i+1,6}$（$i=1,2,\cdots,2n-1$）得到的图记为 $2-2nW_{6,3}$，如图 1 所示.

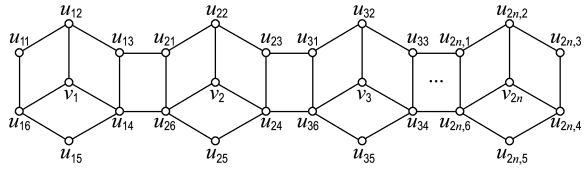

图 1 图 $2-2nW_{6,3}$

Fig. 1 Figure of $2-2nW_{6,3}$

收稿日期： 2018-08-09； **修回日期：** 2018-11-29.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11171114).
作者简介： 唐保祥*(1961-)，男，教授，E-mail：tbx0618@sina.com.

定义 4　设 $C_i=u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i5}u_{i6}u_{i1}$ 是长为 6 的圈，把顶点 u_{i2}、u_{i4}、u_{i6} 分别顺次连接一条边的图记为 $X_{6,3}^i(i=1,2,\cdots,n)$. 给 $X_{6,3}^i$ 与 $X_{6,3}^{i+1}$ 的添加上边 $u_{i3}u_{i+1,2}$、$u_{i4}u_{i+1,1}$、$u_{i5}u_{i+1,6}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 得到的图记为 $3-nX_{6,3}$，如图 2 所示.

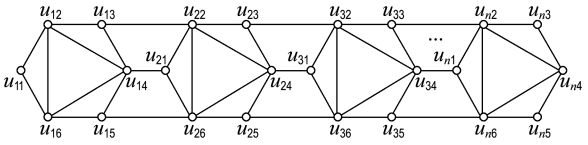

图 2　图 $3-nX_{6,3}$

Fig. 2　Figure of $3-nX_{6,3}$

2　主要结果

定理 1　设图 $2-2nW_{6,3}$ 的 1-因子数为 $f(2n)$，则 $f(2n)=9\cdot 10^{n-1}$.

证明　容易看出图 $2-2nW_{6,3}$ 有 1-因子. 为了求 $f(2n)$ 的表达式，先构造一个图 G_1，并求它的 1-因子数的递推关系式. 将 4 圈 $xyzwx$ 上的顶点 y 和 z 分别与图 $2-2nW_{6,3}$ 的顶点 u_{11} 和 u_{16} 各连接一条边，得到的图记为 G_1，如图 3 所示.

容易看出图 G_1 有 1-因子，$g(n)$ 表示图 G_1 的 1-因子数.

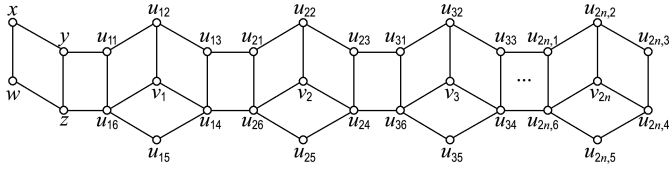

图 3　图 G_1

Fig. 3　Figure of G_1

先求 $g(n)$ 的递推关系式. 设图 G_1 的 1-因子的集合为 M，则 M 中的 1-因子按包含边 xy、xw 可划分为子集 M_1 和 M_2，按照不同 1-因子的定义有 $M_1\cap M_2=\varnothing$，$M=M_1\cup M_2$，故 $|M|=|M_1|+|M_2|$.

由 $f(2n)$ 的定义，图 G_1 的包含边 xy 和 wz 的 1-因子数等于 $f(2n)$，即 $|M_1|=f(2n)$.

M_2 中的 1-因子按照包含边的情况可以划分 3 类. M_2 中包含边 xw、yz 的 1-因子的集合记为 M_2^1；M_2 中包含边 xw、yu_{11}、zu_{16}、$u_{12}v_1$、$u_{14}u_{15}$、$u_{13}u_{21}$、$u_{22}u_{23}$、v_2u_{26}、$u_{24}u_{25}$ 的 1-因子的集合记为 M_2^2；M_2 中包含边 xw、yu_{11}、zu_{16}、$u_{12}v_1$、$u_{13}u_{21}$、$u_{14}u_{15}$、$u_{25}u_{26}$ 的 1-因子的集合记为 M_2^3.

由 $f(2n)$ 的定义知，$|M_2^1|=f(2n)$，$|M_2^2|=f(2(n-1))$.

由 $g(n)$ 的定义知，$|M_2^3|=g(2(n-1))$.

因为 $M_2^i\cap M_2^j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant 3)$，$M_2=M_2^1\cup M_2^2\cup M_2^3$，所以 $|M_2|=|M_2^1|+|M_2^2|+|M_2^3|$. 故 $|M_2|=f(2n)+f(2(n-1))+g(2(n-1))$. 故

$$g(2n)=2f(2n)+f(2(n-1))+g(2(n-1)) \tag{1}$$

再求 $f(2n)$ 的递推关系式. 设图 $2-2nW_{6,3}$ 的 1-因子的集合为 M，按照 M 中元素饱和顶点 u_{11} 的情况可分两类：设 M 中包含边 $u_{11}u_{12}$ 的 1-因子的集合为 M_1，M 中包含边 $u_{11}u_{16}$ 的 1-因子的集合为 M_2. 则 $M_1\cap M_2=\varnothing$，$M=M_1\cup M_2$，故 $|M|=|M_1|+|M_2|$.

M_1 可分 4 类. M_1 中包含边 $u_{11}u_{12}$、v_1u_{14}、$u_{15}u_{16}$、$u_{13}u_{21}$、$u_{25}u_{26}$ 的 1-因子的集合记为 M_1^1；M_1 中包含边 $u_{11}u_{12}$、v_1u_{14}、$u_{15}u_{16}$、$u_{13}u_{21}$、$u_{22}u_{23}$、v_2u_{26}、$u_{24}u_{25}$ 的 1-因子的集合记为 M_1^2；M_1 中包含边 $u_{11}u_{12}$、v_1u_{16}、$u_{14}u_{15}$、$u_{13}u_{21}$、$u_{25}u_{26}$ 的 1-因子的集合记为 M_1^3；M_1 中包含边 $u_{11}u_{12}$、v_1u_{16}、$u_{14}u_{15}$、$u_{13}u_{21}$、v_2u_{26}、$u_{24}u_{25}$、$u_{22}u_{23}$ 的 1-因子的集合记为 M_1^4；则 $M_1^i\cap M_1^j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant 4)$，$M_1=M_1^1\cup M_1^2\cup M_1^3\cup M_1^4$，故 $|M_1|=|M_1^1|+|M_1^2|+|M_1^3|+|M_1^4|$.

由 $g(n)$ 的定义有 $|M_1^1|=g(2(n-1))$，$|M_1^3|=g(2(n-1))$；由 $f(2n)$ 的定义知，$|M_1^2|=f(2(n-1))$，$|M_1^4|=f(2(n-1))$. 故 $|M_1|=2f(2(n-1))+2g(2(n-1))$.

M_2 可分 2 类. M_2 中包含边 $u_{11}u_{16}$、$u_{12}v_1$、$u_{14}u_{15}$、$u_{13}u_{21}$、$u_{22}u_{23}$、v_2u_{26}、$u_{24}u_{25}$ 的 1-因子的集合记为 M_2^1；M_2 中包含边 $u_{11}u_{16}$、$u_{12}v_1$、$u_{14}u_{15}$、

$u_{13}u_{21}$、$u_{25}u_{26}$的 1-因子的集合记为 M_2^2.

由 $f(2n)$的定义知，$|M_2^1|=f(2(n-1))$；由 $g(n)$的定义知，$|M_2^2|=g(2(n-1))$.

因为 $M_2^1\cap M_2^2=\varnothing$，$M_2=M_2^1\cup M_2^2$，所以 $|M_2|=|M_2^1|+|M_2^2|$. 故 $|M_2|=f(2(n-1))+g(2(n-1))$. 于是，$|M|=|M_1|+|M_2|=3f(2(n-1))+3g(2(n-1))$，即

$$f(2n)=3f(2(n-1))+3g(2(n-1)) \quad (2)$$

由式(1)，得

$$g(2(n-1))=2f(2(n-1))+f(2(n-2))+g(2(n-2)) \quad (3)$$

把式(3)代入式(2)，得

$$f(2n)=9f(2(n-1))+3f(2(n-2))+3g(2(n-2)) \quad (4)$$

由式(2)，得

$$f(2(n-1))=3f(2(n-2))+3g(2(n-2)) \quad (5)$$

由式(4)和式(5)消去 $g(2(n-2))$，得

$$f(2n)=10f(2(n-1)) \quad (6)$$

由图 4 知，$f(2\times1)=9$. 由式(6)，得 $f(2n)=10^{n-1}f(2\times1)$. 故 $f(2n)=9\cdot10^{n-1}$.

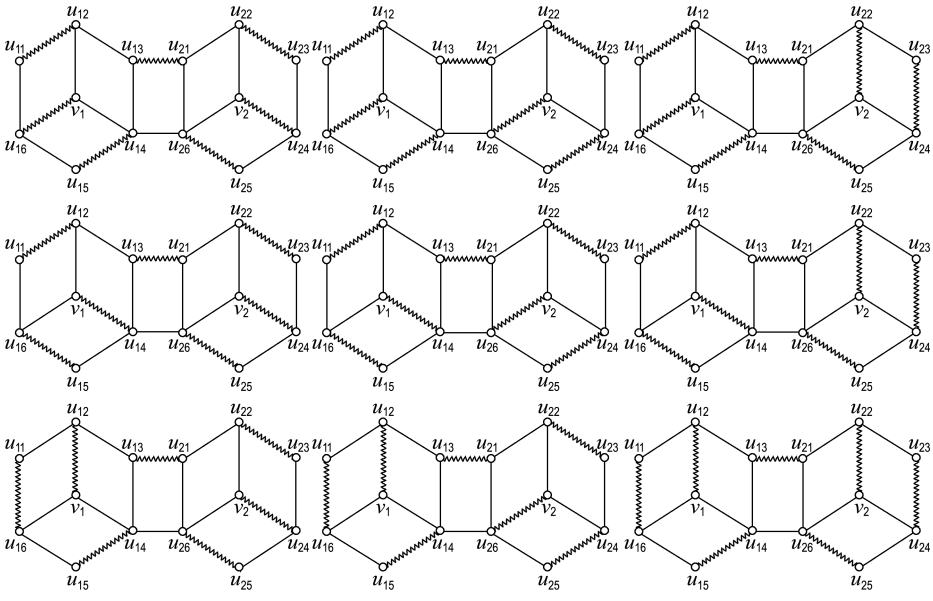

图 4 图 $2-2nW_{6,3}(n=1)$

Fig. 4 Figure of $2-2nW_{6,3}(n=1)$

定理 2 设图 $3-nX_{6,3}$的 1-因子数为 $h(n)$，则 $h(n)=2\cdot3^{n-1}$.

证明 容易看出图 $3-nX_{6,3}$有 1-因子. 为了得到 $h(n)$的表达式，构造图 G_2 并求出它的 1-因子数的递推关系式. 把路 xy 的端点 x、y 分别与图 $3-nX_{6,3}$顶点 u_{12}、u_{11}连接一条边，得到的图记为 G_2，如图 5 所示.

容易看出图 G_2 有 1-因子，$t(n)$表示图 G_2 的 1-因子数. 设图 G_2 的 1-因子的集合为 M，图 G_2 包含边 xy、xu_{12}的 1-因子的集合分别为 M_1、M_2，则 $M_1\cap M_2=\varnothing$，$M=M_1\cup M_2$，故 $t(n)=|M|=|M_1|+|M_2|$.

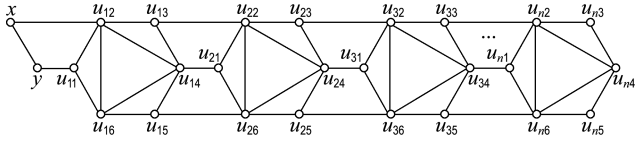

图 5 图 G_2

Fig. 5 Figure of G_2

因为 $xy \in M_1$，所以 $xu_{12}, yu_{11} \notin M_1$，故由 $h(n)$ 的定义知，$|M_1| = h(n)$.

因为 $xu_{12} \in M_2$，所以 $yu_{11}, u_{16}u_{15} \in M_2$，$xy$，$u_{11}u_{12}, u_{11}u_{16}, u_{12}u_{13}, u_{14}u_{15}, u_{15}u_{26} \notin M_2$，故由 $t(n)$ 的定义知，$|M_2| = t(n-1)$. 因此

$$t(n) = h(n) + t(n-1) \tag{7}$$

再求 $h(n)$ 的递推关系式. 设图 $3-nX_{6,3}$ 的 1-因子的集合为 M，图 $3-nX_{6,3}$ 包含边 $u_{11}u_{12}$、$u_{11}u_{16}$ 的 1-因子的集合分别为 M_1、M_2，则 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$，$M = M_1 \cup M_2$，故 $h(n) = |M| = |M_1| + |M_2|$. 由于图 $3-nX_{6,3}$ 具有对称性，$|M_1| = |M_2|$.

因为 $u_{11}u_{12} \in M_1$，所以 $u_{15}u_{16} \in M_1$，且 $u_{11}u_{16}$，$u_{12}u_{13}, u_{12}u_{14}, u_{12}u_{16}, u_{14}u_{15}, u_{14}u_{16}, u_{15}u_{26} \notin M_1$，故由 $t(n)$ 的定义知，$|M_1| = t(n-1)$，故 $|M_2| = t(n-1)$. 因此

$$h(n) = 2t(n-1) \tag{8}$$

由式(7)，得

$$t(n-1) = h(n-1) + t(n-2) \tag{9}$$

把式(9)代入式(8)，得

$$h(n) = 2h(n-1) + 2t(n-2) \tag{10}$$

因此

$$h(n) = 3h(n-1) = \cdots = 3^{n-1}h(1)$$

由图 6 知，$h(1) = 2$，故 $h(n) = 2 \cdot 3^{n-1}$.

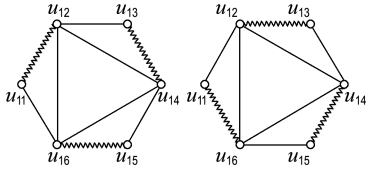

图 6　图 $3-nX_{6,3}(n=1)$

Fig. 6　Figure of $3-nX_{6,3}(n=1)$

3　结　语

图的 1-因子计数理论是图论研究的重要内容之一，而且是一个有生机和活力的研究领域. 它不仅有很强的应用背景，而且在过去的几十年中，它是快速发展的组合论中许多重要思想的源泉. 本文给出的方法，不仅能求出很多类图的 1-因子数的递推关系式，而且，对于顶点和边的数目不太多的图，还能够得到它的所有不同的 1-因子. 这些结果丰富了 1-因子的计数理论，同时给 1-因子的应用提供了支持.

参考文献：

[1] VALIANT L G. The complexity of computing the permanent [J]. **Theoretical Compute Science**, 1979, **8**(2): 189-201.

[2] 林　泓，林晓霞. 若干四角系统完美匹配数的计算[J]. 福州大学学报(自然科学版)，2005，**33**(6): 704-710.
LIN Hong, LIN Xiaoxia. Enumeration of perfect matchings in some type polyminoes [J]. **Journal of Fuzhou University (Natural Sciences)**, 2005, **33**(6): 704-710. (in Chinese)

[3] 唐保祥，李　刚，任　韩. 3 类图完美匹配的数目[J]. 浙江大学学报(理学版)，2011，**38**(4): 16-19.
TANG Baoxiang, LI Gang, REN Han. The number of perfect matching for three specific types of graphs [J]. **Journal of Zhejiang University (Science Edition)**, 2011, **38**(4): 16-19. (in Chinese)

[4] 唐保祥，任　韩. 4 类图完美匹配数目的递推求法[J]. 数学杂志，2015，**353**(3): 626-634.
TANG Baoxiang, REN Han. Recursive method for finding the number of perfect matchings of the four types of graphs [J]. **Journal of Mathematics**, 2015, **353**(3): 626-634. (in Chinese)

[5] 唐保祥，任　韩. 3 类特殊图完美对集数的计算[J]. 南开大学学报(自然科学版)，2014，**47**(5): 11-16.
TANG Baoxiang, REN Han. The enumeration of perfect matchings in three types of special graphs [J]. **Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis**, 2014, **47**(5): 11-16. (in Chinese)

[6] 唐保祥，任　韩. 4 类图完美匹配的计数[J]. 武汉大学学报(理学版)，2012，**58**(5): 441-446.
TANG Baoxiang, REN Han. The number of the perfect matchings for four types of graphs [J]. **Journal of Wuhan University (Natural Science Edition)**, 2012, **58**(5): 441-446. (in Chinese)

[7] 唐保祥，任　韩. 两类图完美匹配的计数公式[J]. 吉林大学学报(理学版)，2016，**54**(4): 790-792.

TANG Baoxiang, REN Han. Counting formulas of perfect matchings of the two types of graphs [J]. **Journal of Jilin University (Science Edition)**, 2016, **54**(4):790-792. (in Chinese)

[8] 唐保祥,任 韩. 2 类图完美匹配数目的解析式[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, **55**(4):15-17.
TANG Baoxiang, REN Han. The analytic formula of the number of perfect matchings of two types of graphs [J]. **Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni**, 2016, **55**(4):15-17. (in Chinese)

[9] 唐保祥,任 韩. 2 类特殊图中的完美匹配数[J]. 浙江大学学报(理学版), 2017, **44**(3):266-269.
TANG Baoxiang, REN Han. The number of perfect matchings in two types of particular graphs [J]. **Journal of Zhejiang University (Science Edition)**, 2017, **44**(3):266-269. (in Chinese)

[10] 唐保祥,任 韩. 两类图及其冠的优美标号[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2017, **49**(3):158-160.
TANG Baoxiang, REN Han. The graceful labeling of two kinds graphs and its corona [J]. **Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition)**, 2017, **49**(3):158-160. (in Chinese)

[11] 唐保祥,任 韩. 2 类偶图完美匹配的数目[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2012, **34**(10):91-95.
TANG Baoxiang, REN Han. The number of perfect matching for two types of bipartite graphs [J]. **Journal of Southwest University (Natural Science Edition)**, 2012, **34**(10):91-95. (in Chinese)

[12] 唐保祥,任 韩. 几类图完美匹配的数目[J]. 南京师范大学学报(自然科学版), 2010, **33**(3):1-6.
TANG Baoxiang, REN Han. The number of perfect matching in several types of graphs [J]. **Journal of Nanjing Normal University (Natural Science Edition)**, 2010, **33**(3):1-6. (in Chinese)

Classification and recursive method for 1-factor number of two kinds of special graphs

TANG Baoxiang[*1], REN Han[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China;
2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: The 1-factor counting problem of the graph has been proven to be NP-hard. Because this problem has important applications in quantum chemistry, crystal physics and computer science, the research on this problem has very important theoretical and practical significance. Firstly, the 1-factors of the graph are classified according to the edge associated with a certain vertex, and the recursive relation of the 1-factor number of each class is obtained. Secondly, the recursive relations of the various 1-factor are added, then a set of recursive relations with interrelation is obtained, and the reciprocal correlation between these recursive relations is used to eliminate the recursive relations that are not needed, and obtain the recursive relation of the 1-factor number of the graph. Finally, the general solution of this recursive relation is solved, and then the explicit formula of the 1-factor number of this graph is got.

Key words: 1-factor; recursive relation; general solution; explicit formula