第59卷第2期　　　　大 连 理 工 大 学 学 报　　　　Vol.59, No.2
2019年3月　　Journal of Dalian University of Technology　　Mar. 2019

文章编号：1000-8608(2019)02-0211-07

Banach 空间中不等价算子非紧性测度

沈 钦 锐*

（闽南师范大学 数学与统计学院，福建 漳州　363000）

摘要： 用新的观点研究 Banach 空间中的算子非紧性测度. Banach 空间 X 上的非空有界闭凸集构成的集族 (X)在通常的集合加法和数乘运算下可赋予范数构成赋范半群；接着利用序等距映射、格理想和抽象 M 空间等理论，在 Banach 空间上给出一个齐次算子非紧性测度的构造定理，并利用此定理证明了具有无限分解的 Banach 空间，特别地，具有无条件基的 Banach 空间上都存在着与 Hausdorff 非紧性测度不等价的齐次算子非紧性测度.

关键词： 非紧性测度；算子非紧性测度；不等价测度；Banach 空间

中图分类号： O177.92　　**文献标识码：** A　　**doi：** 10.7511/dllgxb201902014

0　引　言

非紧性测度早在 1930 年由 Kuratowski[1] 提出，后来被称为集合非紧性测度或 Kuratowski 非紧性测度（记为 α）：设 X 为度量空间，Q 为 X 中的非空有界集，则 $\alpha(Q)=\inf\{\varepsilon>0: Q\subset\bigcup_{i=1}^{n}S_i,\ \operatorname{diam}(S_i)\leqslant\varepsilon, S_i\subset X, i=1,2,\cdots,n, n\in\mathbb{N}\}$.

α 可以用来衡量度量空间 X 中的非空有界集与紧集“相距”多远，具有以下的性质（其中 A、B 表示 X 中的任意非空有界集）：

(a) $\alpha(A)=0\Leftrightarrow A$ 是相对紧集；

(b) $\alpha(\overline{A})=\alpha(A)$；

(c) $A\subset B\Rightarrow\alpha(A)\leqslant\alpha(B)$；

(d) $\alpha(A\cup B)=\max\{\alpha(A),\alpha(B)\}$；

进一步，当 X 为赋范空间时，α 还满足

(e) $\alpha(kA)=|k|\alpha(A)$，其中 $kA=\{x\,|\,x=ka, a\in A\}$，$k\in F$；

(f) $\alpha(A+B)\leqslant\alpha(A)+\alpha(B)$，其中 $A+B=\{x=a+b, a\in A, b\in B\}$；

(g) $\alpha(\operatorname{co}A)=\alpha(A)$；

(h) $\alpha(A+x_0)=\alpha(A)$，$\forall x_0\in X$.

1957 年，Gokhberg 等[2] 引入 Hausdorff 非紧性测度 β（也称为球非紧性测度）：设 X 为实值 Banach 空间，Q 为 X 中非空有界集，有

$$\beta(Q)=\inf\{\varepsilon>0: Q\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,r_i), x_i\in X, r_i<\varepsilon, i=1,2,\cdots,n, n\in\mathbb{N}\}$$

Goldenstein 等[3] 进一步研究 Hausdorff 非紧性测度，证明了 β 也满足上述的性质(a)～(h).

设 X 为 Banach 空间，记 (X)为 X 中的全体非空有界闭集族，在 (X)中定义 Hausdorff 度量，任取 $A,B\in (X)$，令

$$d_{\mathrm{H}}(A,B)=\max\{\sup_{a\in A}d(a,B),\sup_{b\in B}d(A,b)\}$$

则 (X)为一度量空间.

1980 年，Banaś[4] 给出了非紧性测度核与正则非紧性测度的定义. 2018 年，Cheng 等[5] 给出了更简洁的定义.

近年来，一个类似正则非紧性测度的概念——齐次非紧性测度，由 Mallet-Paret 等[6] 引入，Kuratowski 非紧性测度和 Hausdorff 非紧性测度都是正则的非紧性测度，也是齐次非紧性测度. 不难发现每个正则非紧性测度 μ 都具有如下重要性质：若 (A_n) 为非空递减有界闭集列且 $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$，则 $\bigcap_{n\leqslant 1}A_n$ 是一个非空的紧集.

在同一个 Banach 空间中存在着许多非紧性测度，自然有这样的问题：这些非紧性测度之间是

收稿日期： 2018-10-15；　**修回日期：** 2019-01-20.

基金项目： 国家自然科学基金青年基金资助项目(11801255)；高校博士科研启动基金资助项目(L21704)；福建省中青年教师教育科研项目(JAT170337).

作者简介： 沈钦锐*(1984-)，男，博士，E-mail：qinrui327@163.com.

否存在着某种关系？讨论各种非紧性测度之间的关系成为一个很自然的问题，而同一个Banach空间中的两个不同的非紧性测度是否等价是一个十分有趣的问题[6-7].

1972年，Daneš[8]证明了几种常用的非紧性测度α和β等价，有下列关系：$\beta(A)\leqslant\alpha(A)\leqslant 2\beta(A)$.

在一般的Banach空间中，是否也存在着等价的非紧性测度呢？1978年Goebel提出一个这样的问题：是否所有正则非紧性测度都等价？十多年后该问题由Banaś给出否定回答，1992年Banaś等[9]证明了在空间 $_p(X)(1\leqslant p<\infty)$上存在着不等价的正则非紧性测度. 之后，关于不等价非紧性测度问题的研究一直没停止过，一些数学家致力于研究和构造与Hausdorff非紧性测度不等价的非紧性测度，如文献[10-11]等. 2011年Mallet-Paret等[6]证明了在几类Banach空间中存在不等价的齐次非紧性测度，他们提出了对Goebel问题进一步深入的“基本问题”：在哪些Banach空间中，存在着不等价的齐次非紧性测度？作者证明了以下5类Banach空间上存在着不等价的齐次非紧性测度：(1) Hilbert空间X；(2) $X=\ _p(\Omega,\Sigma,\mu)$，其中$(\Omega,\Sigma,\mu)$为测度空间；(3) $X=\ (\ )$，其中　为某一紧的Hausdorff空间；(4)具有Hölder指数$0<\lambda\leqslant 1$的Hölder连续函数构成的Banach空间$X=C^{0,\lambda}(\ )$，其中　为某一紧的Hausdorff空间；(5) Sobolev空间$X=\ ^{m,p}(\Omega)$，其中Ω为$\mathbb{R}^n$中的开子集.

之后，Cheng等[5]对不等价非紧性测度做了更进一步的研究，回答了Mallet-Paret等提出的问题，在Banach空间中给出一个齐次非紧性测度的构造定理，并证明了每个包含一个具有无限分解闭子空间的Banach空间，特别地，具有无条件基序列的Banach空间，都存在不等价的齐次非紧性测度.

对于一个非紧性测度μ，如果仅考虑这类有界集$\{TB_X\}$的测度，其中$\forall T\in B(X)$，$B(X)$表示X上的有界线性算子空间，则$\mu(T)=\mu(T(B_X))$为算子T的非紧性测度. 是否存在不等价的正则算子非紧性测度显然是比“是否存在不等价的正则非紧性测度”这一问题更加困难. 因为若存在不等价的算子非紧性测度则一定存在不等价的非紧性测度，但尚不知是否有反推关系.

1　Hausdorff算子非紧性测度的构造

先引进赋范半群的概念.

定义1　设G是一阿贝尔半群，数域$\mathbb{F}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$，如果算子$(x,y)\in(G\times G)\rightarrow x+y\in G$及算子$(\alpha,x)\in(\mathbb{F}\times G)\rightarrow\alpha x\in G$满足对$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{F}$和$g,g_1,g_2\in G$如下条件成立：

$$(\lambda\mu)g=\lambda(\mu g)$$
$$\lambda(g_1+g_2)=\lambda g_1+\lambda g_2$$
$$1g=g$$
$$0g=0$$

则称G为一个模，如果在模G上能够赋予一个范数，则称G为赋范半群.

设X为Banach空间，记　(X)(或　)表示X上所有非空有界闭凸集构成的集族，则有　$(X)\subset\ (X)$关于集合的加法和数乘构成一子模. 对$\forall A\in$　，定义

$$\|A\|=\sup_{a\in A}\|a\|$$

则$\|\cdot\|$为　上的范数. 这是因为该函数满足对$\forall A,B\in$　，$k\in\mathbb{F}$，下式成立：

(1) $\|A\|\geqslant 0$且满足$\|A\|=0\Leftrightarrow A=\varnothing$；

(2) $\|kA\|=|k|\,\|A\|$；

(3) $\|A\oplus B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$

在　上赋予Hausdorff度量d_{H}，则

$$\|A\|=d_{\mathrm{H}}(\{0\},A),\ \forall A\in$$

定义2　设Γ_1、Γ_2为两个偏序集，映射$f:\Gamma_1\rightarrow\Gamma_2$，

(i)称f为全保序映射，如果$x\geqslant y\in\Gamma_1$当且仅当$f(x)\geqslant f(y)\in\Gamma_2$；

(ii)当Γ_1、Γ_2是模时，称映射f是正线性的，如果f对$\forall a,b\geqslant 0$及$x,y\in\Gamma_1$，有$f(ax+by)=af(x)+bf(y)$

对$\forall A\subset X$，记σ_A表示A的支撑函数在对偶空间单位球B_{X^*}上的限制，即

$$\sigma_A(x^*)=\sup_{a\in A}\langle x^*,a\rangle,\ \forall x^*\in B_{X^*}$$

记$\Omega=B_{X^*}$赋予范数拓扑，　(Ω)为X^*上所有连续且w^*下半连续的次线性函数在Ω上的限制，$C_b(\Omega)$为Ω上的有界连续函数赋予上确界范数构成的Banach空间，则　(Ω)构成$C_b(\Omega)$的一个闭锥.

构造映射J：　$(X)\rightarrow\ (\Omega)$，

$$J(A)=\sigma_A,\ \forall A\in\ (X)\tag{1}$$

集合的包含关系在赋范半群 (X)中构成一个偏序“$\geqslant$”：$A\geqslant B$ 当且仅当 $A\supset B$. 对映射 J，有下面引理.

引理 1[5]　设 X 为 Banach 空间，则

(i) (X)关于 Hausdorff 度量是完备的；

(ii)J：$(X)\rightarrow$ (Ω)为全保序的正线性满等距映射，即对 $\forall A,B\in$ (X)，有

$$d_{\mathrm{H}}(A,B)=\|J(A)-J(B)\|\equiv \max_{x^*\in\Omega}|\sigma_A(x^*)-\sigma_B(x^*)| \quad (2)$$

除了特别说明外，本文提到 (X)的子半群 (X)(或)时，通常是指 是一个赋范子半群且相对于 Hausdorff 度量 d_{H} 是封闭的. 因 是完备的，因而子半群都是完备的.

定义 3　称一个具有偏序的实值 Banach 空间 X 为 Banach 格，若满足下列条件：

(i)$x\leqslant y\Rightarrow x+z\leqslant y+z$，$\forall x,y,z\in X$；

(ii)$ax\geqslant 0$，$\forall x\geqslant 0$，$\forall a\in\mathbb{R}^+$；

(iii)$x\vee y\in X$，$x\wedge y\in X$，$\forall x,y\in X$；

(iv)$|x|\equiv x\vee(-x)\leqslant y\vee(-y)\equiv|y|\Rightarrow\|x\|\leqslant\|y\|$

如果 X 的子空间 Y 满足对 $\forall x,y\in Y$，有 $x\vee y\in Y$，则称 Y 为 Z 的子格.

如果 X 的子格 Y 满足对 $\forall x\in X$，若存在 $y\in Y$ 使得 $|x|<|y|$，那么 $x\in Y$，则称 Y 为 X 的格理想.

由(iv)及

$$|x-y|=|x\vee z-y\vee z|+|x\wedge z-y\wedge z|,\quad \forall x,y,z\in X$$

知格算子依范数连续.

除说明外，总假定实值函数空间 ( )中的格算子定义为，对 $\forall x,y\in$ ( )和 $k\in$ ，有

$$x(k)\vee y(k)=\max\{x(k),y(k)\},$$
$$x(k)\wedge y(k)=\min\{x(k),y(k)\}$$

对于给定的子半群 $\subset$ ，记 $E=\overline{J-J}$.

引理 2[5]　设 X 为 Banach 空间， 的子半群 对 $\forall C,D\in$ ，有 $\overline{\mathrm{co}}\{C\cup D\}\in$ ，则空间 E 为 Banach 格.

由上述引理知 $E=\overline{J-J}$ 和 $E=\overline{J-J}$ 均为 Banach 格，有下面引理.

引理 3[5]　设 X 为 Banach 空间，则下列成立：

(i)E 为 E 的一个格理想；

(ii)商空间 E/E 为抽象 M 空间，从而序等距于 Banach 空间 ( )的一个子格，其中 为某一紧的 Hausdorff 空间.

(iii)(FQJ) 是一个闭锥且包含在 ( )的正锥中，其中 $Q:E\rightarrow E/E$ 为商映射，$F:E/E\rightarrow$ ( )为(ii)中的序等距映射.

定义 4　设 X 为 Banach 空间，$\forall T\in B(X)$，$=$ (X)为赋范半群 $=$ (X)的子半群. 如果非负实值函数 μ ：$(X)\rightarrow\mathbb{R}$ 满足对任意非空有界集 $B\in$ (X)，有

$$\mu(B)=\inf\{r>0:\text{存在 }K\in\ \text{使得 }B\subset K+rB_X\}<\infty$$

则称函数 μ 为 Hausdorff 非紧性测度. 称函数 $\mu(T)=\mu(T(B_X))$为 Hausdorff 算子非紧性测度，简记成 $\mu(T)$.

定理 1　设 X 为 Banach 空间，对 $\forall T\in B(X)$，$\mu(T)$为 Hausdorff 算子非紧性测度，则有

$$\mu(T)=\mu(T(B_X))=\|\widetilde{\overline{T(B_X)}}\| = \inf_{K\in}\|\sigma_{\overline{T(B_X)}}-\sigma_K\| \quad (3)$$

其中 / 的商范数 $\|\widetilde{C}\|$ 定义为 $\|\widetilde{C}\|=\inf_{D\in} d_{\mathrm{H}}(C,D)$，$\forall\widetilde{C}=C+$.

证明　对 $B_X\in$ ，令 $C=\overline{T(B_X)}$. 不妨设 $\mu(T(B_X))=\alpha>0$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K\in$ ，使得 $C\subset K+(\alpha+\varepsilon)B_X$. 于是

$$\sigma_C(x^*)\leqslant\sigma_K(x^*)+(\alpha+\varepsilon)\|x^*\|,\quad\forall x^*\in\Omega$$

从而

$$\|\widetilde{C}\| =\inf_{K\in}\|\sigma_C-\sigma_K\|\leqslant\alpha+\varepsilon$$

由 ε 的任意性知

$$\|\widetilde{C}\| \leqslant\alpha=\mu(T(B_X))$$

另一方面，由 $\|\widetilde{C}\|$ 的定义知，对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $D\in$ 使得

$$\|\widetilde{C}\| +\varepsilon>d_{\mathrm{H}}(C,D)=\|\sigma_C-\sigma_D\|$$

因此

$$\sigma_C(x^*)\leqslant(\|\widetilde{C}\| +\varepsilon)\|x^*\|,\quad\forall x^*\in\Omega$$

等价地

$$C\subset D+(\|\widetilde{C}\| +\varepsilon)B_X$$

由 ε 的任意性知

$$\mu(T(B_X))=\mu(C)\leqslant\|\widetilde{C}\|$$

设 X 为 Banach 空间，为（X）的子半群，对任意 $T\in B(X,X)$，$\|\cdot\|$ 表示商空间 $C_b(\Omega)/E$ 的商范数，$Q:C_b(\Omega)\to C_b(\Omega)/E$ 为商映射，下面将得到非性质的算子 Hausdorff 测度 μ 的范数表达.

定理 2 设 X 为 Banach 空间，B_X 为 X 上的单位球，$\forall T\in B(X,X)$，为（X）的基本子半群，有

$$\mu(T)=\mu(T(B_X))=\|(Q\circ J)\overline{T(B_X)}\| \tag{4}$$

证明 对 $B_X\in$ ，令 $C=\overline{T(B_X)}$，有

$$\|(Q\circ J)C\| =\inf_{a\in E}\|\sigma_C-a\|\leqslant\inf_{D\in}\|\sigma_C-\sigma_D\|$$

由定理 1 知

$$\|(Q\circ J)C\| \leqslant\mu(T(B_X))$$

另一方面，$J -J$ 在 E 中稠密，所以对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $D,E\in$ 满足

$$\begin{aligned}\|(Q\circ J)C\| +\varepsilon>\|J(C)-(J(D)-J(E))\|=\\ \|\sigma_C-(\sigma_D-\sigma_E)\|=\\ \|\sigma_{\overline{C+E}}-\sigma_D\|\end{aligned}$$

由定理 1 得

$$\|\sigma_{\overline{C+E}}-\sigma_D\|=d_{\mathrm{H}}(C\oplus E,D)\geqslant\mu(C+E)$$

又 $E\in$ ，从而

$$\mu(C+E)=\mu(C)=\mu(T(B_X))$$

因此

$$\|(Q\circ J)C\| +\varepsilon>\mu(T(B_X))$$

由 ε 的任意性有

$$\|(Q\circ J)C\| \geqslant\mu(T(B_X))$$

即命题得证.

利用定理 2 和 Banach 空间中半范数的相关理论，构造出一个齐次算子非紧性测度.

引理 4[5] 设 为紧的 Hausdorff 空间，令 $Z=$（ ），取非零泛函 $\varphi\in$（ ）*，则下列等价：

(i)φ 为正泛函；

(ii)φ 在（ ）上是单调不减的；

(iii)φ 保持格算子运算；

(iv)$\tilde{\varphi}$：（ ）$/\ker\varphi\to\mathbb{R}$ 是一个序同构映射，其中对 $\forall\tilde{x}=x+\ker\varphi$，$\langle\tilde{\varphi},\tilde{x}\rangle=\langle\varphi,x\rangle$

设 X 为 Banach 空间，任意非空有界集 $A\subset X^*$，则 $\|a\|_A\equiv\sup\limits_{\varphi\in A\cup(-A)}\langle\varphi,a\rangle$ 定义了一个半范数. 特别地，当 A 分离 X 中的点时，$\|a\|_A$ 定义了一个范数. 此时，称 $\|a\|_A$ 是由 A 生成的半范数.

引理 5[5] 设 Banach 空间 X 为某一（ ）空间，非空集合 $A\subset\bigcup\limits_{\lambda>0}\lambda\{\delta_k:k\in K\}$，则（ ）上由 A 生成的半范数 $\|a\|_A$ 满足

$$\||x|\vee|y|\|_A=\|x\|_A\vee\|y\|_A,\ \forall x,y\in(\ )$$

在 Banach 空间 X 中，设 J： $\to$ 定义见式(1)，令 $E =\overline{J -J}$，$E =\overline{J -J}$，$Q:E \to E /E$ 为商映射. 设 F 为 E /E 到（ ）空间的序等距嵌入且(FQJ) 包含于（ ）的正锥中，对给定的正泛函集合 $A\subset$（ ）*，令

$$\mu(T)=\mu(T(B_X))=\|F[QJ(\overline{T(B_X)})]\|_A$$

其中 $\|u\|_A=\sup\limits_{\varphi\in A\cup(-A)}\langle\varphi,u\rangle$，$\forall u\in$（ ）.

对任意有界集 $A\subset\bigcup\limits_{\lambda>0}\lambda\{\delta_k:k\in K\}$，若 A 对任意非零元 $u\in(FQJ)$ ，都存在 $\varphi\in A$ 使得 $\langle\varphi,u\rangle>0$，根据文献[11]知 μ 是一个齐次非紧性测度，则 $\mu(T)$ 定义了一个齐次算子非紧性测度. 其中 δ_k 为 $C(K)$ 的估值泛函，即对 $\forall x\in C(K)$，$\delta_k(x)=x(k)$. 特别地，当 $A=\{\delta_k:k\in K\}$ 为 $B_{C(K)^*}$ 上所有正端点时，$\|\cdot\|_A$ 即为 $C(K)$ 上的范数，由定理 2 知球算子非紧性测度 β 可表示为

$$\beta(T)=\|F[QJ(\overline{T(B_X)})]\|$$

定理 3 设 $\mu(T)$ 为 Banach 空间 X 上任一正则算子非紧性测度，$\forall T\in B(X)$，β 为球算子非紧性测度，则存在 $0<M=\mu(B_X)<\infty$，使得

$$\mu(T)\leqslant M\beta(T)$$

证明 因为 TB_X 为 X 上的有界集，令 $\forall\varepsilon>0$，$r=\beta(T)+\varepsilon$，则存在有限个球 $x_k+rB_X(k=1,2,\cdots,n)$ 覆盖 TB_X，有

$$\begin{aligned}\mu(TB_X)\leqslant\mu(\bigcup_{k=1}^{n}\{x_k+rB_X\})=\\ \max_{1\leqslant k\leqslant n}\mu(x_k+rB_X)=\\ r\mu(B_X)=(\beta(T)+\varepsilon)\mu(B_X)\end{aligned}$$

由 ε 的任意性有

$$\mu(T)=\mu(T(B_X))\leqslant M\beta(T)$$

定理 4 设 $\mu(T)$ 为 Banach 空间 X 上任一齐次算子非紧性测度，$\forall T\in B(X)$，β 为球算子非紧性测度，则存在 $0<M<\infty$，使得

$$\mu(T)\leqslant M\beta(T)$$

证明 因为 μ 为 X 上的齐次非紧性测度，则对 $\forall x\in(FQJ)(\overline{T(B_X)})\subset(FQJ)$ ，函数 $f(x)=\mu(T)$ 定义了一个正齐次的次可加函数. 下面证明 f 是连续的. 设 $x_n\to x\in(FQJ)(\overline{T(B_X)})\subset(FQJ)$ 且存在 $(\overline{T_n(B_X)})\subset$ 使得 $x_n=$

$(FQJ)(\overline{T_n(B_X)})$. 则对 $\forall\varepsilon>0$，对于充分大的 n，令 $C=\overline{T(B_X)}$，$C_n=\overline{T_n(B_X)}$，有 $(FQJ)C+2\varepsilon(FQJ)B_X\geqslant(FQJ)(C+2\varepsilon B_X)\geqslant(FQJ)(C_n+\varepsilon B_X)\geqslant(FQJ)C$.

由 $(FQJ)C_n+\varepsilon(FQJ)B_X\geqslant(FQJ)(C_n+\varepsilon B_X)$ 知，$\liminf\limits_n(FQJ)C_n\geqslant(FQJ)C$.

另一方面，由于 $(FQJ)C+2\varepsilon(FQJ)B_X\geqslant(FQJ)C_n$，$\limsup\limits_n(FQJ)C_n\leqslant(FQJ)C$. 故有 $f(x_n)\to f(x)$. 由 f 的连续性、次可加性和正齐次性可得，存在 $M>0$ 使得

$f(x)\leqslant M\|x\|$，$\forall x\in(FQJ)(\overline{T(B_X)})\subset(FQJ)$

上式等价于

$$\mu(T)=\mu(T(B_X))=f((FQJ)(\overline{T(B_X)}))\leqslant M\|(FQJ)(\overline{T(B_X)})\|=M\beta(T)$$

2　不等价的算子非紧性测度

证明具有无限分解的 Banach 空间，特别地，任一具有无条件基的 Banach 空间上都存在与球算子非紧性测度不等价的齐次算子非紧性测度. 与范数的等价性定义一样，非紧性测度的等价性定义如下：

定义 5　设 μ、ν 为 Banach 空间 X 上的两个非紧性测度，若存在常数 $a,b>0$，对 $\forall A\subset\ (X)$，有

$$a\mu(A)\leqslant\nu(A)\leqslant b\mu(A)$$

则称非紧性测度 μ 与 ν 等价.

下面给出算子非紧性测度的定义.

定义 6　设 X 为 Banach 空间，B_X 为单位球，$B(X)$ 为 X 到 X 自身的有界线性算子全体，$T\in B(X)$，若 μ 为齐次非紧性测度，则称 $\mu(T)=\mu(T(B_X))$ 为齐次算子非紧性测度；若 μ 为正则非紧性测度，则称 $\mu(T)=\mu(T(B_X))$ 为正则算子非紧性测度.

称一个 Banach 空间 X 具有（特别地，无条件）无限分解，如果存在无限维闭子空间 $X_n\subset X$ 使得

$$X=\oplus_n X_n=\left\{x=\sum_n x(n)\in X:x(n)\in X_n,\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

且沿 $\oplus_{j>n}X_j$ 的投影映射 $P_n:X\to\oplus_{j=1}^n X_j$ 满足 $\lim\sup\limits_n\|P_n\|=M<\infty$（特别地，$\sup\limits_{A\subset\mathbb{N}}\|P_A\|<\infty$，其中对任意集合 $A\subset\mathbb{N}$，$P_A:X\to\oplus_{n\in A}X_n$ 为投影映射）. 例如具有无条件基的 Banach 空间和空间 $_p(X)$（$1\leqslant p\leqslant\infty$，$X$ 为具有无限分解的 Banach 空间）具有无限无条件分解.

定理 5　设 X 为具有无限分解的 Banach 空间，则 X 上存在与球算子非紧性测度不等价的齐次算子非紧性测度，映射 $J:\ (X)\to\ (\Omega)$ 定义如定义 1，映射 $Q:E\ \to E\ /E\ $ 为商映射.

证明　先证 X 为具有（特别地，无条件）无限分解时，$E\ (X)$ 中存在（特别地，无条件）标准基序列. 设 X_n 为无限维闭子空间满足 $X=\oplus_n X_n$ 且 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|P_n\|\equiv M<\infty$. 注意到

$$X^*=\oplus_n X_n^*=\oplus_n\{x^*\circ P_n:x^*\in X^*\}$$

其中 P_n 为从 X 沿着 $\oplus_{j>n}X_j$ 到 $\oplus_{j=1}^n X_j$ 的投影映射. 对 $\forall A\subset X$，用 σ_A 表示 A 的支撑函数定义在 X^* 上，即 $\sigma_A(x^*)=\sup\limits_{a\in A}\langle x^*,a\rangle$，$\forall x^*\in X^*$.

令 B_X 表示空间 X 的闭单位球，σ_n 表示 P_nB_X 的支撑函数，即对任意 $x^*\in X^*$，$\sigma_n(x^*)=\sigma_{P_nB_X}(x^*)\equiv\sup\limits_{x\in P_nB_X}\langle x^*,x\rangle$. 下证 (σ_n) 为 $E\ $ 中的基序列. 由于对任意 $x^*\in X^*$，$\sigma_n(x^*)=\|x^*|_{P_nB_X}\|$，故

$$\begin{aligned}a=\|\sigma_n\|&=\sup_{x^*\in B_{X^*}}\langle\sigma_n,x^*\rangle=\\&\sup_{x^*\in B_{X^*}}\sup_{x\in B_X}\langle P_nx,x^*\rangle=\\&\sup_{x^*\in B_{X^*}}\sup_{x\in B_X}\langle x,P_n^*x^*\rangle=\\&\sup_{x^*\in B_{X^*}}\|P_n^*x^*\|=\|P_n^*\|=\|P_n\|\leqslant M\end{aligned}\tag{5}$$

对任意不相交的有限集 $I,J\subset\mathbb{N}$，令 $E=I\cup J$，$a^E=(a_k)_{k\in E}\subset\mathbb{R}$. 对任意集合 $T\subset E$，令

$$\nu_T=\sum_{t\in T}a_t\sigma_t;$$

$$T_{a^+}=\{t\in T:a_t\geqslant0\},\ T_{a^-}=I\backslash T_{a^+}$$

则对 $\forall x^*\in X^*$

$$\sum_{i\in I_{a^-}}a_i\sigma_i(x^*)\leqslant\sum_{i\in I_{a^+}}a_i\sigma_i(x^*)+\sum_{i\in I_{a^-}}a_i\sigma_i(x^*)=\nu_I(x^*)\leqslant\sum_{i\in I_{a^+}}a_i\sigma_i(x^*)$$

因此

$$|\nu_I(x^*)|\leqslant\left[\sum_{i\in I_{a^+}}a_i\sigma_i(x^*)\right]\vee\left[-\sum_{i\in I_{a^-}}a_i\sigma_i(x^*)\right]$$

从而

$$\|\nu_I\|\leqslant\left\|\sum_{i\in I_{a^+}}a_i\sigma_i\right\|\vee\left\|\sum_{i\in I_{a^-}}a_i\sigma_i\right\|\tag{6}$$

另一方面，对 $\forall x^*\in X^*$，

$$\nu_E(x^*)=\nu_I(x^*)+\nu_J(x^*)$$

则

$$\nu_E(x^*\circ P_{E_a+})=\sum_{i\in I_a+}a_i\sigma_i(x^*)+\sum_{i\in J_a+}a_i\sigma_i(x^*)\tag{7}$$

且

$$\nu_E(x^*\circ P_{E_a-})=\sum_{i\in I_a-}a_i\sigma_i(x^*)+\sum_{i\in J_a-}a_i\sigma_i(x^*)\tag{8}$$

又因为对 $\forall A\subset\mathbb{N}$，$\forall x^*\in X^*$，满足

$$\|x^*\circ P_A\|\leqslant M\|x^*\|$$

结合式(6)～(8)可得

$$\|\nu_E\|\geqslant\frac{1}{M}\Big[\Big\|\sum_{k\in E_a+}a_k\sigma_k\Big\|\vee\Big\|\sum_{k\in E_a-}a_k\sigma_k\Big\|\Big]=$$

$$\frac{1}{M}\Big[\Big\|\sum_{i\in I_a+}a_i\sigma_i+\sum_{j\in J_a+}a_j\sigma_j\Big\|\vee$$

$$\Big\|\sum_{i\in I_a-}a_i\sigma_i+\sum_{j\in J_a-}a_j\sigma_j\Big\|\Big]\geqslant$$

$$\frac{1}{M}\Big(\Big[\Big\|\sum_{i\in I_a+}a_i\sigma_i\Big\|\vee\Big\|\sum_{i\in I_a-}a_i\sigma_i\Big\|\Big]\vee$$

$$\Big[\Big\|\sum_{j\in J_a+}a_j\sigma_j\Big\|\vee\Big\|\sum_{j\in J_a-}a_j\sigma_j\Big\|\Big]\Big)\geqslant$$

$$\frac{1}{M}[\|\nu_I\|\vee\|\nu_J\|]$$

由 I、J 的任意性知 (σ_n) 为一基序列，(σ_n/a) 为一标准基序列，基常数为 M.

由 (σ_n) 为 $E\ =E\ (X)$ 中的基序列，且基常数为 M，又 X_n 为无限维，根据定理 2 知 X_n 中单位球 B_{X_n} 的球非紧性测度值为 1，从而商映射 $Q:E\ (X)\to E\ (X)/E\ (X)$ 将标准基序列 (σ_n/a) 映射成空间 $QJ\,\overline{P_nB_X}$ 中的基序列 $(Q(\sigma_n/a))$，且基常数为 M. 由于 $\dim X=\infty$，商空间的维数 $\dim(E\ /E\ )=\infty$，由定理 2 可知，存在一连续函数空间 ( )(其中 为某一紧的 Hausdorff 空间)及一序等距映射 $F:E\ /E\ \to$ ( )使得 $F(E\ /E\ )$ 成为 ( )的一个子格，且 (FQJ) 包含在 ( )的正锥中.

令 $t_n=QJ\,\overline{P_nB_X}$ 为 $E\ /E$ 中的一个基序列，令 $k=\|t_n\|$，$y_n=t_n/k$，则 y_n 为 $E\ /E$ 中的一个标准基序列. 令 $z_n=Fy_n$，则由 F 是序等距知 $(z_n)\subset(FQJ)$ 为 ( )中的标准基序列. 令 $(\varphi_n)\subset$ ( )* 为一有界序列满足

(a) 对 $\forall i,j\in\mathbb{N}$，$\langle\varphi_i,z_j\rangle=\delta_{ij}$；

(b) 存在 $M>0$，使得对 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\|\varphi_n\|\leqslant M$.

令

$$D=\overline{\mathrm{co}}[B_{C(K)}\cup\{\pm nz_n:n\in\mathbb{N}\}],$$

$$D^0=\{\varphi\in\ (\ )^*:|\langle\varphi,d\rangle|\leqslant 1,d\in D\}$$

下证 D 和 D^0 具有如下性质：

(i) D 不包含非平凡的子空间；

(ii) D^0 分离 ( )中的点

(i) 假设 $\exists x\in D$ 满足对 $\forall n\in\mathbb{N}$，有 $nx\in D$. 存在

$$x_n=b_n+\sum_{j=1}^{m_n}\alpha_{n,j}jz_j\in\mathrm{co}[B_{C(K)}\cup\{mz_m:m\in\mathbb{N}\}]$$

满足 $\|nx-x_n\|\to 0$；其中 $b_n\in B_{C(K)}$，$m_n\in\mathbb{N}$，$\alpha_{n,j}\in\mathbb{R}$ 且 $\sum_{j=1}^{m_n}|\alpha_{n,j}|<1$. 则 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m_n}\alpha_{n,j}jz_j\to x$ 且有

$$0\leftarrow\|x-x_n/n\|\geqslant\frac{1}{M}|\langle\varphi_i,x-x_n/n\rangle|=$$

$$\frac{1}{M}|\langle\varphi_i,x-b_n/n\rangle-(1/n)\alpha_{n,i}i|\tag{9}$$

因此 $x\in Z\equiv\overline{\mathrm{span}}(z_n)$ 且对 $\forall i\in\mathbb{N}$，有 $\langle\varphi_i,x\rangle=0$. 又由 (z_n) 为 Z 的基可得 $x=0$.

(ii) 对于给定的 $0\neq x\in$ ( )，由(i)中证明可知存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $z\equiv nx\notin D$，根据凸集的分离定理知，$\exists\varphi\in$ ( )* 使得 $1\geqslant\langle\varphi,z\rangle>\sup_{d\in D}\langle\varphi,d\rangle\geqslant\|\varphi\|>0$.

记 ( )$^+$ 为 ( )中的正泛函，令 $A=D^0\cap$ ( )$^+$，对 $x\in$ ( )，定义 $\|x\|_A=\sup_{\varphi\in A\cup(-A)}|\langle\varphi,x\rangle|$. 因为

$$\mu(T)=\mu(T(B_X))\equiv\|(FQJ)(\overline{T(B_X)})\|_A$$

定义了一个齐次的算子非紧性测度 $\mu(T)$. 由 $z_n=Fy_n=(FQJ)\left(\overline{\frac{1}{k}P_nB_X}\right)$，知

$$\beta\left(\frac{1}{k}P_n\right)=\left\|(FQJ)\left(\overline{\frac{1}{k}P_nB_X}\right)\right\|=\|z_n\|=1$$

所以对 $\forall n\in\mathbb{N}$，有

$$\mu\left(\frac{1}{k}P_n\right)=\left\|(FQJ)\left(\overline{\frac{1}{k}P_nB_X}\right)\right\|_A=\|z_n\|_A=$$

$$\frac{1}{n}\|nz_n\|_A\leqslant\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\beta\left(\frac{1}{k}P_n\right)$$

因而 $\mu\left(\frac{1}{k}P_n\right)$ 不等价于 $\beta\left(\frac{1}{k}P_n\right)$.

□

推论 1 每个具有无条件基的 Banach 空间(例如，c_0 或 $_p$，$1\leqslant p<\infty$)都存在与球算子非紧性测度不等价的齐次算子非紧性测度.

3　结　语

本文接续 Cheng 等[5]的问题进行研究，证明了一个具有无限分解的 Banach 空间，特别地，具有无条件基的 Banach 空间，都存在着与球算子非紧性测度不等价的齐次算子非紧性测度. 但是否每个无穷维 Banach 空间都存在不等价的算子非紧性测度，至今是一个悬而未决的问题，需进一步探讨.

参考文献：

[1] KURATOWSKI C. Sur les espaces complets [J]. **Fundamenta Mathematicae**, 1930, **1**(15): 301-309.

[2] GOKHBERG I T, GOLDENSTEIN L S, MARKUS A S. Investigation of some propertied of bounded linear operators in connection with their *q*-norms [J]. **Uch zap Kishinevsk In a**, 1957, **29**: 29-36. (in Russian)

[3] GOLDENSTEIN L S, MARKUS A S. On a measure of noncompactness of bounded sets and linear operators [J]. **Studies in Algebra and Mathematical Analysis**, 1965: 45-54.

[4] BANAŚ J. On measures of noncompactness in Banach spaces [J]. **Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae**, 1980, **21**(1): 131-143.

[5] CHENG Lixin, CHENG Qingjin, SHEN Qinrui, *et al*. A new approach to measures of noncompactness of Banach spaces [J]. **Studia Mathematica**, 2018, **240**: 21-45.

[6] MALLET-PARET J, NUSSBAUM R D. Inequivalent measures of noncompactness [J]. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, 2011, **190**(3): 453-488.

[7] MALLET-PARET J, NUSSBAUM R D, KALTON N J. Inequivalent measures of noncompactness and the radius of the essential spectrum [J]. **Proceedings of the American Mathematical Society**, 2011, **139**(3): 917-930.

[8] DANEŠ J. On the Istrătescu' s measure of noncompactness [J]. **Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la République Socialiste de Roumanie**, 1972, **16**(4): 403-406.

[9] BANAŚ J, MARTINON A. Measures of noncompactness in Banach sequence spaces [J]. **Mathematica Slovaca**, 1992, **42**(4): 497-503.

[10] DA SILVA E B, FERNANDEZ D L. Generalized measures of noncompactness of sets and operators in Banach spaces [J]. **Acta Mathematica Hungarica**, 2010, **129**(3): 227-244.

[11] DA SILVA E B, FERNANDEZ D L, NIKOLOVA L. Generalized quasi-Banach sequence spaces and measures of noncompactness [J]. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, 2013, **85**(2): 443-456.

Inequivalent measure of noncompactness of operators in Banach spaces

SHEN Qinrui*

(School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: A new point of view is used to study the measure of noncompactness of operators in Banach space. The family (X) of nonempty bounded closed convex sets on Banach space X can assign norms to form normed semigroups under normal set addition and multiplication operations. Then the theories of ordered equidistant mapping, lattice ideal and abstract M-space are used to give a construction theorem of measure of noncompactness of homogeneous operators in Banach space. Finally this theorem is used to prove that every Banach space with infinite decomposition, in particular, admitting an unconditional basis has a measure of noncompactness of homogeneous operators which is not equivalent to the Hausdorff measure of noncompactness of operators.

Key words: measure of noncompactness; measure of noncompactness of operators; inequivalent measure; Banach space