第59卷第2期 大连理工大学学报 Vol.59, No.2
2019年3月 Journal of Dalian University of Technology Mar. 2019

文章编号：1000-8608(2019)02-0218-03

一个具退化强制的Laplace方程有界弱解存在性

李仲庆*[1,2]， 付 军[2]

（1.贵州财经大学 数统学院，贵州 贵阳 550025；
2.吉林师范大学 数学学院，吉林 四平 136000）

摘要：借助方程低阶项的正则化效应，得到了解的最大模估计.运用偏微分方程中的弱收敛方法，证明了椭圆方程有界弱解的存在性.应用此类方程解的结果和证明方法，可以进一步研究具一阶梯度项的椭圆方程、拟线性的具低阶项的 p-Laplace方程以及带有零阶项的抛物方程等弱解的存在性，也可以进一步研究方程解的局部有界性.

关键词：Laplace方程；退化强制；正则化效应

中图分类号：O175.8 **文献标识码**：A **doi**：10.7511/dllgxb201902015

0 引言

2003年，Boccardo等引入了一种新型的积分型函数[1] $H(s)=\int_0^s \frac{1}{(1+|t|)^\theta}\mathrm{d}t$，借助Stampacchia迭代技术，得到了退化强制椭圆方程的有界弱解.通过改进迭代引理和Stampacchia迭代技术，文献[2]证明了有界弱解的存在性，其主要创新点在于：借助低阶项的正则化效应，而不采用复杂的Stampacchia迭代技术，最终证明弱解是存在的，并且是 L^∞ 有界的.本文在此基础上，通过选取特殊的检验函数，得到解的最大模估计，并证明方程有界弱解的存在性.

1 问题陈述与主要结果

设 Ω 是 R^N 中的有界域，$N>2$，Ω 的光滑边界记为 $\partial\Omega$，$\theta>0$ 为常数.研究如下Laplace方程（问题1）：

$$-\mathrm{div}\left[\frac{1}{(1+|u|)^\theta}\nabla u\right]+u=f(x),\ x\in\Omega \tag{1a}$$

$$u(x)=0,\ x\in\partial\Omega \tag{1b}$$

问题1的主部项是具退化强制的.因为当 $s\to\infty$ 时，$1/(1+|s|)^\theta$ 趋于零，这使得方程类型发生了改变，进而影响解的存在性.

本文主要结果如下：

定理1 假设函数 $f(x)\in L^\infty(\Omega)$，常数 $\theta>0$，那么问题1存在有界弱解 $u\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.即对任意的 $\phi\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$，有

$$\int_\Omega \frac{1}{(1+|u|)^\theta}\nabla u\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}x+\int_\Omega u\phi\,\mathrm{d}x=\int_\Omega f\phi\,\mathrm{d}x$$

2 逼近问题

首先给出问题1对应的一个逼近方程（问题2）：

$$-\mathrm{div}\left[\frac{1}{(1+|T_n(u_n)|)^\theta}\nabla u_n\right]+u_n=f(x),\ x\in\Omega;$$
$$u_n(x)=0,\ x\in\partial\Omega \tag{2}$$

$$T_k(s)=\min\{k,\max(s,-k)\}=\begin{cases}s; & |s|\le k\\ k; & s>k\\ -k; & s<-k\end{cases}$$

这样，通过对原方程扰动，主部退化强制消失.根据Lax-Milgram定理[3]或pseudo-monotone算子理论[4]，对每一个给定的正整数 n，逼近问题2存在弱解 $u_n\in H_0^1(\Omega)$.

收稿日期：2018-05-06； 修回日期：2018-10-15.
基金项目：国家自然科学基金青年基金资助项目(11401252)；贵州财经大学引进人才科研启动项目(2018YJ26).
作者简介：李仲庆*(1984-)，男，讲师，E-mail:zqli_jlu@163.com；付 军(1963-)，女，教授，E-mail:jlfj8080@126.com.

3　低阶项的正则化效应以及能量估计

3.1　低阶项的正则化效应

首先证明：问题 2 的弱解序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是本征一致有界的，且有估计式

$$\sup_n \|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

事实上，记

$$G_k(s) = s - T_k(s),$$
$$Q = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

受文献[5]启发，选取 $G_Q(u_n)$ 作为问题 2 的一个检验函数，得到

$$\int_\Omega \frac{1}{(1+|T_n(u_n)|)^\theta} |\nabla G_Q(u_n)|^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega u_n G_Q(u_n)\mathrm{d}x = \int_\Omega f G_Q(u_n)\mathrm{d}x \tag{3}$$

注意到在集合 $\{x\in\Omega: |u_n(x)|>Q\}$ 上，u_n 和 $G_Q(u_n)$ 的符号相同，去掉第一个非负积分项，对式(3)作如下估计：

$$\int_\Omega (|u_n| - |f|)|G_Q(u_n)|\mathrm{d}x \leqslant 0$$

进一步有

$$\int_\Omega (|u_n| - \|f\|_{L^\infty(\Omega)})|G_Q(u_n)|\mathrm{d}x \leqslant 0$$

注意到 Q 的定义和 $G_k(s)$ 的另一等价表示式：

$$G_k(s) = (|s|-k)_+ \operatorname{sgn}(s)$$

则有

$$0 \leqslant \int_{\{x\in\Omega: |u_n(x)|>\|f\|_{L^\infty(\Omega)}\}} (|u_n| - \|f\|_{L^\infty(\Omega)})^2 \mathrm{d}x \leqslant 0$$

从而有

$$\operatorname{meas}\{x\in\Omega: |u_n(x)| > \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\} = 0$$

这样，对所有的正整数 n 和几乎所有的 $x\in\Omega$，有

$$|u_n(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

3.2　能量估计

选择 u_n 作为问题 2 的一个检验函数，得到

$$\int_\Omega \frac{1}{(1+|T_n(u_n)|)^\theta}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |u_n|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |f||u_n|\mathrm{d}x \tag{4}$$

对右端项应用 Hölder 不等式、Sobolev 不等式以及带 ε 的 Cauchy 不等式(参看文献[6])，有

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f||u_n|\mathrm{d}x &\leqslant \|f\|_{L^{(2^*)'}(\Omega)} \|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leqslant \\ &\|f\|_{L^{(2^*)'}(\Omega)} S_N \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega;R^N)} \leqslant \\ &2\varepsilon \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega;R^N)} + \\ &\frac{1}{2\varepsilon} S_N^2 \|f\|^2_{L^{(2^*)'}(\Omega)}\end{aligned} \tag{5}$$

其中 S_N 为 Sobolev 嵌入常数，$2^* = \dfrac{2N}{N-2}$，$p' = \dfrac{p}{p-1}$.

运用 u_n 的 L^∞ 界，式(4)左端第一项估计如下：

$$\int_\Omega \frac{1}{(1+|T_n(u_n)|)^\theta}|\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{[1+\|f\|_{L^\infty(\Omega)}]^\theta}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \mathrm{d}x \tag{6}$$

去掉式(4)左端第二个非负积分项，在式(5)中选取

$$\varepsilon = \frac{1}{4[1+\|f\|_{L^\infty(\Omega)}]^\theta}$$

结合式(6)可得

$$\frac{1}{2[1+\|f\|_{L^\infty(\Omega)}]^\theta}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\mathrm{d}x \leqslant 2[1+\|f\|_{L^\infty(\Omega)}]^\theta S_N^2 \|f\|^2_{L^{(2^*)'}(\Omega)}$$

这说明了 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界.

4　取极限

由 u_n 的一致 L^∞ 估计、一致能量估计可知：可以在 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 中抽取一个子列，不妨仍然记作 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 本身，以及存在 $H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ 中的一个 u，使得

$$u_n \xrightarrow{\text{弱}} u, \quad \text{在 } H_0^1(\Omega) \text{ 中} \tag{7}$$

$$\nabla u_n \xrightarrow{\text{弱}} \nabla u, \quad \text{在 } L^2(\Omega;R^N) \text{ 中} \tag{8}$$

$$u_n \xrightarrow{\text{弱}^*} u, \quad \text{在 } L^\infty(\Omega) \text{ 中} \tag{9}$$

根据紧嵌入定理可以得到

$$u_n \xrightarrow{强} u，在 L^2(\Omega)中；\text{a.e. 于} \Omega \tag{10}$$

选取 $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 作为式(2)的一个检验函数,有

$$\int_\Omega \frac{1}{(1+|T_n(u_n)|)^\theta} \nabla u_n \cdot \nabla \phi \mathrm{d}x + \int_\Omega u_n \phi \mathrm{d}x = \int_\Omega f \phi \mathrm{d}x \tag{11}$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理以及弱收敛的定义,式(7)、(8)、(9)和(10)使得式(11)中的极限过程可以顺利进行,从而确保了 u 就是问题1的弱解.

5 结　语

本文通过选取特殊的检验函数,利用低阶项的正则化效应,快速得到了一致最大模估计.借助偏微分方程中的弱收敛方法,得到了有界弱解的存在性.

参考文献:

[1] BOCCARDO L, BREZIS H. Some remarks on a class of elliptic equations with degenerate coercivity [J]. **Bollettino dell′ Unione Matematica Italiana**, 2003, **6-B**(3):521-530.

[2] BOCCARDO L, DALL′AGLIO A, ORSINA L. Existence and regularity results for some elliptic equations with degenerate coercivity [J]. **Atti del Seminario Matematico e Fisico dell′ Università di Modena**, 1998, **46**(s):51-81.

[3] EVANS L C. **Partial Differential Equations** [M]. 2nd ed. Providence: American Mathematical Society, 2010.

[4] ZEIDLER E. **Nonlinear Functional Analysis and Its Applications II/B** [M]. New York: Springer-Verlag, 1990.

[5] ARCOYA D, BOCCARDO L. Regularizing effect of the interplay between coefficients in some elliptic equations [J]. **Journal of Functional Analysis**, 2015, **268**(5):1153-1166.

[6] WU Zhuoqun, YIN Jingxue, WANG Chunpeng. **Elliptic & Parabolic Equations** [M]. New Jersey: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006.

Existence of bounded weak solutions to a Laplace equation with degenerate coercivity

LI Zhongqing*[1,2], FU Jun[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China;
2. College of Mathematics, Jilin Normal University, Siping 136000, China)

Abstract: With the help of the regularizing effect of the lower order term, the maximal norm estimate to the solutions is obtained. Based upon the weak convergence methods for partial differential equations, the existence of bounded weak solutions to an elliptic equation is testified. Employing the results and the methods used in this class of equations, the further investigation for the bounded weak solutions to other type of equations can be done. For instance, the elliptic equations with the first order gradient term, the quasi-linear p-Laplace equations with lower order term, the parabolic equations with zero order term and so on. Moreover, it is applied to the study of the local boundedness of the solutions.

Key words: Laplace equations; degenerate coercivity; regularizing effect