

堆垛约束下基于偏序的路径优化时间窗松弛方法

高文文, 魏晨, 胡志华*

(上海海事大学 物流研究中心, 上海 201306)

摘要: 在求解车辆路径优化问题时, 通常使用时间窗对任务之间的偏序关系进行建模, 设计带时间窗约束的路径优化模型与算法, 然而时间窗约束与偏序约束是不等价的. 在集装箱码头堆垛作业背景下, 针对时间窗约束的路径优化模型, 提出将时间窗约束转化为偏序约束的松弛方法, 并据此设计偏序约束的路径优化模型. 在分支定界算法框架下, 研究时间窗约束与偏序约束之间的关系, 对两种模型的特征进行分析. 采用 Solomon 数据集进行数值分析, 验证两个模型在寻优能力与性能之间的差异. 结果表明, 偏序模型具有更好的优化性能, 但是时间窗模型具有更好的计算时间性能, 通过时间窗紧缩的特征分析发现基于时间窗分解设计偏序模型求解算法是新的研究方向.

关键词: 车辆路径优化问题; 时间窗约束; 偏序关系; 分支定界算法; 集装箱码头

中图分类号: U691.34 **文献标识码:** A **doi:** 10.7511/dllgxb201904010

0 引言

时间窗约束的车辆路径优化问题 (vehicle routing problem constrained by time windows, VRPTW) 要求配送车辆必须在指定时间窗内开展服务. 在自动化集装箱码头等实际应用场景中, 船舶和堆场箱区的任务之间由于堆垛约束而形成一种偏序关系^[1], 但是这类约束通常用时间窗表示. 这种将偏序关系表示为时间窗的建模方法减小了解的可行域^[2], 表明偏序约束是时间窗约束的松弛表示. 因此, 采用偏序表示任务关系是在问题分析和建模方面改善最优解的一种方法.

相比于偏序约束, 路径优化问题中的时间窗约束已被广泛研究. 针对带时间窗的混合容量路径优化问题, Ciancio 等假定时间窗已知, 用 VRPTW 模型描述该问题并采用分支定价定界法求解模型^[3]; 针对同一客户不同服务需求的时间同步问题, Hojabri 等按照服务类型区分常规车辆和特殊车辆, 在 VRPTW 模型基础上增加不同车辆的时间同步约束, 根据服务类型规划路线^[4]; 针对车辆延迟交付违背任务节点的硬时间窗约束问题, Errico 等提出两种追索政策, 跳过当前任务

执行下一项任务或执行当前任务跳过下一项任务^[5]; 针对带时间窗以及多配送人员的车辆路径优化问题, Alvarez 等在 VRPTW 模型基础上增加车辆配送人员数量约束, 并结合精确算法和启发式算法求解该组合优化问题^[6]; 针对弧段具有多重属性的路径优化问题, Ticha 等提出利用多重图表示不同属性, 从而扩大可行解的搜索空间, 并提出分支定价算法求解 VRPTW 问题^[7]. 上述研究基于 VRPTW 模型, 引入新的约束或变量, 研究重点放在求解算法的创新上, 缺少对新模型合理性的解释及新模型和 VRPTW 模型的比较分析. 本文提出偏序约束作为时间窗约束的松弛以扩大可行域的搜索空间, 充分解释松弛依据, 而且对比分析偏序约束和时间窗约束之间的关系.

车辆路径优化问题广泛应用于集装箱码头作业场景. 针对船舶停留时间和停靠位置的分配问题, Liu 等考虑集装箱装卸作业的时间窗约束, 以船舶到达时间与给定时间窗之间的差额和集卡运输距离最小化为目标, 建立双目标整数规划模型^[8]; 针对带时间窗的集装箱位置重置问题, Ku 等考虑相同作业时间窗内, 任务之间的偏序关系

收稿日期: 2019-01-26; 修回日期: 2019-05-21.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71871136, 71471109); 上海市科学技术委员会重点项目(16040501800).

作者简介: 高文文(1995-), 女, 硕士生, E-mail: 1694890609@qq.com; 魏晨(1990-), 男, 博士生; 胡志华*(1977-), 男, 教授, E-mail: zhhu@shmtu.edu.cn.

约束,建立随机动态规划模型,并提出基于决策树思想的启发式算法搜索最优任务序列^[9];针对车辆短驳调度问题,Shiri 等综合考虑空箱调运、路径优化和集卡预约问题,在多旅行商问题基础上增加时间窗约束和集卡数量约束,提出自适应禁忌搜索算法求解该组合优化问题^[10];针对多阶段混合流水线调度问题,邢曦文等将同一贝位上相同作业类型的集装箱视为任务块,假定任务块操作顺序已知,根据任务块所处阶段的时间先后关系建立混合整数规划模型^[11];考虑堆场翻倒箱和舱口盖约束限制,胡祥培等按照作业类型将集装箱划分成任务对同时进行装卸船作业,根据列号进行排序,考虑同一列集装箱任务的时间顺序和作业优先顺序建立同贝同步装卸作业整数规划模型^[12]. 以上研究为集装箱码头的运作优化提供了新思路,但是缺少对模型的特征分析,除文献[8-9]采用数学规划算法求解小规模算例外,其余研究均采用启发式算法求解,模型缺少一般性.

基于以上研究,本文提出偏序关系建模方法,将任务之间的先后顺序关系表示为偏序约束;研究基于偏序关系的时间窗约束松弛方法,扩大解的可行域;通过模型特征分析与数值分析,比较时间窗约束和偏序约束对优化性能的影响.

1 偏序问题与偏序模型

在路径优化问题中,偏序关系指仅考虑部分任务之间的严格先后顺序. 基于偏序集理论^[13-15],给定任务集合 T ,符号“ $>$ ”代表 T 上的偏序关系,偏序关系具有以下性质:自反性,对任意 $x \in T$,均有 $x > x$;反对称性,对任意 $x, y \in T$,若满足 $x > y, y > x$,则 $x = y$;传递性,对任意 $x, y, z \in T$,若满足 $x > y, y > z$,则 $x > y > z$.

针对凸优化问题,Klein 等使用偏序关系刻画定性关系,结合信度函数扩大可行解的搜索范围^[2];针对双自动化堆垛起重机调度问题,Hu 等建立线性和非线性模型刻画任务之间的顺序约束^[1];针对机器加工过程中的自动化导引车(automated guided vehicle, AGV)运输问题,Miyamoto 等将任务开始和结束时间视作节点,用偏序关系表示各节点之间的顺序关系,根据加工步骤确定作业序列^[16].

集装箱码头作业中存在一种常见的偏序关系:在同一个贝位中,下层某行集装箱只有在其同行上层集装箱被取走之后才可进行作业,而与其

他行集装箱无关. 即一个任务的可用性仅与部分任务相关. 图 1 代表一个贝位上的集装箱卸船作业,涉及 1 座岸桥、3 台 AGV. 左上方虚线方框内是一个贝位上集装箱之间(图中数字序号仅代表集装箱编号)的任务偏序关系;左下方 AGV 的运输路线是满足偏序关系的一个可行解;右下方表示岸桥在参照 AGV 运输路线的情况下,可以采取的作业序列. 不难看出,仅参照 AGV 运输路线的一种规划情况,岸桥作业序列就有多个可行解,说明用偏序关系刻画任务关系能扩大可行域^[2].

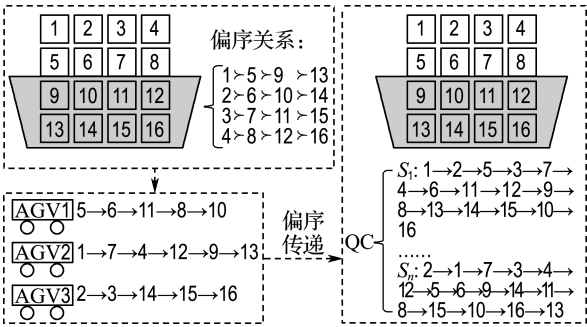


图 1 码头装卸任务偏序示例

Fig. 1 An example of partial orders in terminal operations

2 路径优化模型

2.1 时间窗约束的路径优化模型

建立模型[TW](式(1)~(9)):式(1)是目标函数,最小化总运输成本;式(2)约束一位客户只能由一辆车服务;式(3)是车辆容量约束;式(4)~(6)约束各节点的出入度数量;式(7)约束紧前紧后任务之间的时间关系;式(8)是每项任务的时间窗约束;式(9)约束变量为 0-1 变量.

[TW]中集合、参数和变量包括:车辆集合 $V = \{1, 2, \dots, v\}$;客户集合 $N^+ = \{1, 2, \dots, n\}$;客户和站点的集合 $N = \{0, 1, \dots, n+1\}$;严格偏序集合 $\Theta^< = \{(i, j) | B_i \leq A_j, i, j \in N\}$ 表示客户 i 在客户 j 之前被访问;重叠偏序集合 $\Theta^< = \{(i, j) | B_i > A_j, B_i - A_j \geq A_i - B_j, i, j \in N\}$ 表示 i 在 j 被访问的时间段内被访问; Q 表示车辆容量; D_i 表示 i 的需求量; $[A_i, B_i]$ 代表 i 的时间窗; C_{ij} 表示 i 到 j 的运输成本; t_{ij} 表示 i 到 j 的运输时间;若车辆 $k(k \in V)$ 服务完 i 之后立即服务 j ,0-1 变量 x_{ijk} 取值为 1,否则取 0; s_{ik} 表示车辆 k 在 i 处的开始服务时间; M 代表一个很大的数.

$$[\text{TW}] f = \min \sum_{k \in V} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} C_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{k \in V} \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1; i \in N^- \quad (2)$$

$$\sum_{i \in N^-} D_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq Q; k \in V \quad (3)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} = 1; k \in V \quad (4)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ihk} - \sum_{j \in N} x_{hjk} = 0; h \in N^-, k \in V \quad (5)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i, n+1, k} = 1; k \in V \quad (6)$$

$$s_{ik} + t_{ij} - M(1 - x_{ijk}) \leq s_{jk}; i \in N, k \in V \quad (7)$$

$$A_i \leq s_{ik} \leq B_i; i \in N, k \in V \quad (8)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}; i, j \in N, k \in V \quad (9)$$

2.2 偏序约束的路径优化模型

任务 i 的时间窗记为 $W_i = [A_i, B_i]$, $i \in N^-$. 给定任务 i 和 j 的时间窗 W_i, W_j , 不失一般性, i 和 j 之间存在两种偏序关系: 前后偏序和重叠偏序, 重叠偏序又可细分为部分重叠偏序和包含重叠偏序两种情形. 在时间窗关系(图2)中: 对任意两个任务 i 和 j , 如果 i 必须在 j 之前完成则它们之间存在严格偏序(hard partial order, HPO)关系, 见图2(a); 而当不能严格确定 i 和 j 的先后服务顺序时, 即它们的时间窗存在重叠部分时, 则它们是重叠偏序(overlapped partial order, OPO)关系, 见图2(b)、(c).

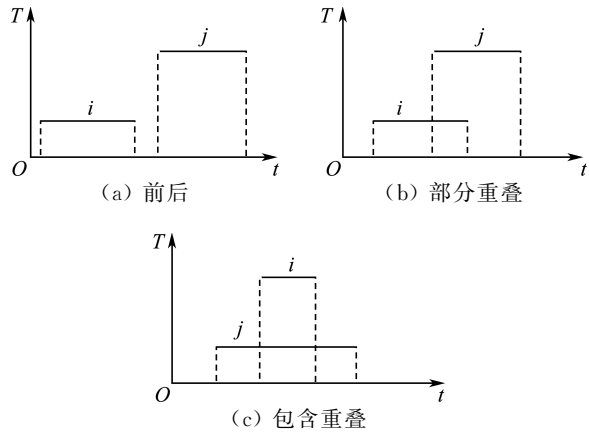


图2 偏序关系示意图

Fig. 2 Illustration of partial order relationship

根据以上描述, 分别将 HPO 和 OPO 约束表示为式(10)和(11).

$$s_{ik} \leq s_{jk}; (i, j) \in \Theta^{\leq}, k \in V \quad (10)$$

$$A_i - B_j \leq s_{ik} - s_{jk} \leq B_i - A_j; (i, j) \in \Theta^<, k \in V \quad (11)$$

从而将带偏序约束的车辆路径优化(VRPPO)模型表示为[PO], 即目标函数为式(1), 条件函数为式(2)~(7)和式(9)~(11).

3 模型特征分析

本文将从松弛关系和复杂性两个角度分析模型特征.

3.1 松弛关系分析

定理1 TW 约束可以唯一地转化为 HPO 和 OPO 约束.

证明 参照图2, 任务 i 和 j 的 TW 关系可转化为两种偏序关系: 前后和重叠. 前后关系指 W_i 的结束时间先于 W_j 的开始时间, 前后关系的数学表示为 $B_i \leq A_j$. 引入 s_i 和 s_j , 根据模型[TW]中的约束(8), 有 $A_i \leq s_i \leq B_i$ 和 $A_j \leq s_j \leq B_j$, 其中 $B_i \leq A_j$, 则对 s_i 和 s_j 可唯一地构造 HPO, $s_i \leq s_j$, 即转化为 HPO 约束. 重叠关系分为两种情形: (1) W_i 的开始时间早于 W_j 的开始时间, 结束时间晚于 W_j 的开始时间且早于 W_j 的结束时间, 即满足 $A_i \leq A_j \leq B_i \leq B_j$; (2) W_i 的开始时间晚于 W_j 的开始时间, 结束时间早于 W_j 的结束时间, 即满足 $A_j \leq A_i, B_i \leq B_j$. 对 s_i 和 s_j , $A_i \leq s_i \leq B_i, -B_j \leq -s_j \leq -A_j$, 将两式相加即可构造 $A_i - B_j \leq s_i - s_j \leq B_i - A_j$ 的 OPO 约束. 因此, TW 约束可以唯一地转化为 HPO 和 OPO 约束.

定理2 [PO]是[TW]的松弛模型.

证明 首先证明[TW]的解都是[PO]的解. 对满足[TW]任意路径上的先后两点 i 和 j , s_i 和 s_j 满足约束: $A_i \leq s_i \leq B_i, A_j \leq s_j \leq B_j, s_i \leq s_j$. 由定理1, TW 约束可以唯一地转化为 HPO 和 OPO 约束, 即 $A_i - B_j \leq s_i - s_j \leq B_i - A_j$, 则 s_i 和 s_j 能满足 PO 约束, 是[PO]的解. 由此可知[TW]的解都是[PO]的解. 然后证明[PO]的解不一定是[TW]的解. 对满足[PO]任意路径上的先后两点 i 和 j , s_i 和 s_j 满足 PO 约束: $s_i \leq s_j$ 和 $A_i - B_j \leq s_i - s_j \leq B_i - A_j$. 构造 $A_i \leq s_i \leq B_i, B_i < s_j < A_j$, 则 s_i 和 s_j 满足 $s_i \leq s_j$, 但 s_j 不满足 TW 约束 $A_j \leq s_j \leq B_j$, 即存在满足 HPO 约束的[PO]的解不满足 TW 约束. 同理, 构造 $A_i - A_i \leq s_i \leq B_i - A_i, A_j - A_i \leq s_j \leq B_j - A_i$, 则 s_i 和 s_j 满足它们之间的 PO 约束 $A_i - B_j \leq s_i - s_j \leq B_i - A_j$, 但 s_i 不满足 TW 约束 $A_i \leq s_i \leq B_i$. 即存在满足 OPO 约束的[PO]的解不满足 TW 约束. 由此可知, [PO]的解不一定是[TW]的解. 综上所述, [PO]是[TW]的松弛模型.

3.2 模型复杂性分析

定理 3 [PO]与[TW]变量数量相同,[PO]约束数量更多.

证明 [PO]和[TW]使用相同变量集合和下标,因此[TW]的变量数量 N_{TWV} 与[PO]的变量数量 N_{POV} 相等,即 $N_{TWV} = N_{POV}$. [TW]约束每个节点时间窗的上下限,TW 约束数量 $N_{TWC} = 2N$;[PO]约束每个节点到任意节点的相对时间关系,PO 约束最大数量 $\max N_{POC} = N(N-1)$. 由定理 1,TW 约束可唯一转化为 PO 约束,针对存在严格偏序关系的 N 个节点,每个节点与任意节点仅存在一个严格偏序约束,可知[PO]的严格约束数量最多为 $N_{HPO} = (N-1) + (N-2) + \cdots + 1 = N(N-1)/2$;针对存在重叠偏序关系的 N 个节点,[PO]的重叠约束数量 $N_{OPO} = N(N-1)$. 因此[PO]的约束数量 N_{POC} 满足 $N_{HPO} \leq N_{POC} \leq N_{OPO}$. 模型约束数量 $N_{TWC} < N_{POC}$.

分支定界算法是一类求解整数规划的精确算法,依据分支策略遍历可行解^[17-18].

定理 4 分支定界算法框架下,[TW]的分支数量少于[PO].

证明 对于[TW],分支总数取决于 TW 约束(8),其上界为 $|V| \sum_i (B_i - A_i + 1)$. 求解[TW]时,在界 $[A_i, B_i]$ 范围内对 s_{ik} 分支,分支数量 $\phi_{ik} = B_i - A_i + 1$. 依据定理 2,[PO]松弛了 $[A_i, B_i]$,则分支范围不小于 $[A_i, B_i]$,记增加的分支数量 $\gamma_{ik} \geq 0$. 总体上,相比于[TW],求解[PO]的分支数量增量为 $\sum_{ik} \gamma_{ik} \geq 0$. 根据定理 2,存在满足[PO]而不满足[TW]的 s_{ik} ,因此 $\sum_{ik} \gamma_{ik} > 0$,即[TW]的分支数量少于[PO].

定理 5 分支定界算法框架下,时间窗越紧,[TW]的分支数量越少.

证明 定义 TW 约束的紧缩算子 $[A_i, B_i] \otimes \alpha$,见式(12). 其中 $\alpha (\alpha > 0)$ 代表时间窗的紧缩程度. 紧缩后时间窗的宽度 $|[A_i, B_i] \otimes \alpha| = L_i (1 - \alpha)$,其中 $L_i = B_i - A_i$. 参照定理 4 的证明,[TW]的总分支数量为 $\sum_{ik} \phi_{ik} = \sum_{ik} L_i (1 - \alpha)$. 则当算子严格紧缩,即 $0 < \alpha < 1$ 时, $\sum_{ik} \phi_{ik}$ 减少至原来的 $(1 - \alpha)$,即 α 越大,分支数量越少.

$$[A_i, B_i] \otimes \alpha = [A_i + (B_i - A_i)\alpha/2,$$

$$A_i + (B_i - A_i)(1 - \alpha/2)] \quad (12)$$

4 数值仿真分析

在模型特征分析的基础上,下面采用分支定界算法求解[TW]和[PO],通过算例对比两个模型的寻优能力,同时也对上述提出的定理进行验证.

4.1 实验环境与数据集

算法采用 Python 实现,实验环境配置为 Intel Pentium P6200(2.13 GHz) CPU,6 GB 内存,64 位 Windows 7 SP1 操作系统;数据集采用 Solomon 数据集 (<http://w.cba.neu.edu/~msolomon/problems.htm>).

4.2 实验设计

设计 3 组实验(表 1):TW 约束和 PO 约束的数量对比;[TW]和[PO]的计算结果和求解时间对比;时间窗紧缩程度对两个模型求解结果的影响对比.

表 1 实验目的、过程与结果

Tab.1 Experimental objective, progress and results

序号	实验目的	实验过程	实验结果
1	TW 与 PO 约束的对应关系	依据约束(10)和(11)将 TW 约束转化为 HPO 和 OPO 约束	TW、HPO、OPO 约束数量对比关系见图 3
2	[TW]与[PO]的对比分析	求解[TW]与[PO]并记录最优解与求解时间	目标值与求解时间见图 3 和图 4
3	时间窗紧缩程度的影响分析	将时间窗分别紧缩 20%、50% 和 80%,求解[TW]与[PO]并记录最优解与求解时间	目标值与求解时间对比见图 5

4.3 实验结果与分析

(1)根据图 3(a)、(b)、(c)可知,[TW]的约束数量远小于[PO]的约束数量,即验证了定理 3;在[PO]中,重叠偏序约束(OPO)数量相比[TW]更多.

(2)采用目标值和求解时间作为模型寻优能力的两个度量指标. 根据图 3(d)、(e)、(f)和图 4 可知,[TW]求解时间上均优于[PO],而[PO]则能够获得更好的解. 参照定理 4 的证明,由于[TW]分支数量少于[PO],[TW]占用计算资源更少,求解速度更快;[PO]放松了时间约束,从而扩大了可行域,能找到不劣于[TW]的最优解.

(3)根据图 5(a),相同数据集中,时间窗越紧,[TW]的目标值越大,同定理 4 和 5 的论证,原因是可行域缩小了;时间窗越紧,分支数量越

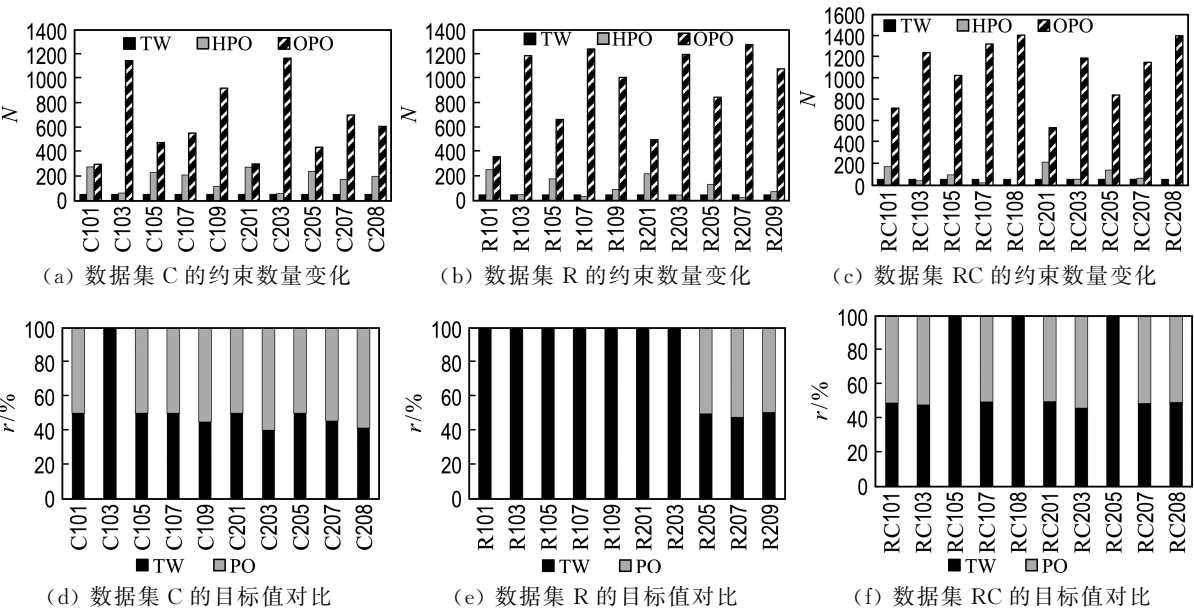


图 3 [TW]和[PO]的约束数量和目标值对比

Fig. 3 Constraint numbers and objectives of solving [TW] and [PO]

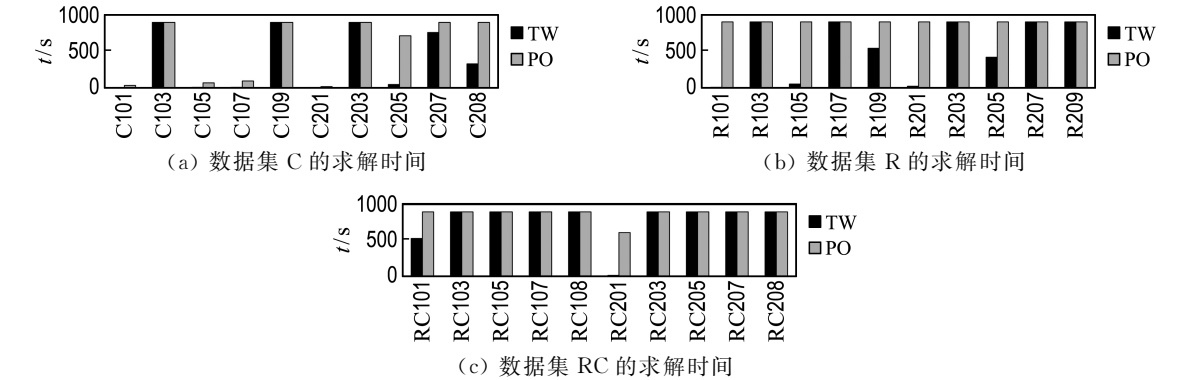


图 4 使用数据集 C/R/RC 对[TW]和[PO]的求解时间

Fig. 4 Computing times of solving [TW] and [PO] with data sets C/R/RC

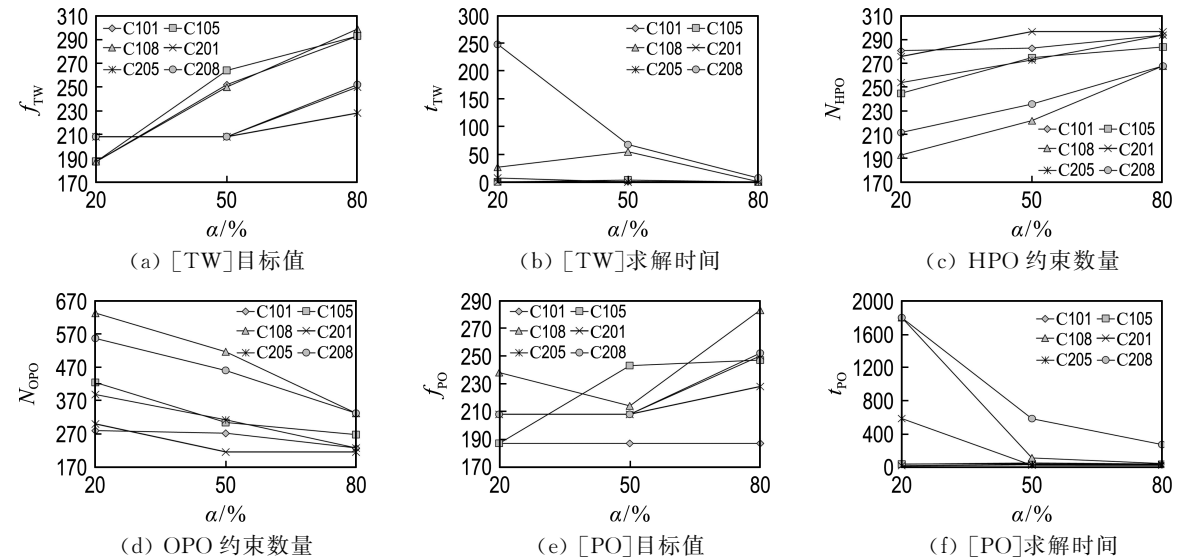


图 5 时间窗紧缩程度对求解[TW]和[PO]的影响

Fig. 5 Effects of shrinking time windows on solutions of [TW] and [PO]

少,可行解的搜索空间就越小.如图5(b)所示,时间窗越紧,分支数量越少,计算越快.另外,随着紧缩程度提高,HPO和OPO约束数量是朝相关方向变化,HPO约束数量增加,而OPO约束数量减少,如图5(c)和(d)所示.随着时间窗收紧,分支数量减少,[PO]求解时间和[TW]一样也会降低,如图5(f)所示,同时目标值也会增大,如图5(e)所示.

以上结果和分析具有以下的管理内涵,在求解实际问题时,若在解的求解质量上做出适当让步,可考虑将偏序约束转化为时间窗约束以在更短的时间内找到较优解;而在设置任务时间窗时,考虑时间窗的宽度和组合可以调整可行域空间从而获得更好的解.

5 结 语

本研究受集装箱码头带堆垛约束问题的启发,参照带时间窗的车辆路径优化问题,提出任务偏序约束及其建模方法.针对时间窗之间的严格偏序(HPO)和重叠偏序(OPO)两种情形,提出将时间窗约束转化为偏序约束的松弛方法,扩展了VRPTW并且建立了考虑偏序关系的路径优化模型,对已有的路径优化模型进行了补充.通过定理证明和算例实验阐述了时间窗约束和偏序约束之间的关系,结果表明:时间窗约束可以唯一地转化为偏序约束;考虑任务之间的偏序关系可以在更广泛的解空间进行搜索;由于偏序约束松弛了时间窗约束,扩大了可行域,从而能够获得更优的目标值,然而由于(在分支定界算法框架下)分支数量增加,求解时间更长;时间窗越紧,虽然求解速度加快了,但是由于可行域缩小,目标值增大.

在实际应用中,通常会将偏序关系直接表述为相对简单的时间窗约束,从而可能由于可行域的缩小而不能发现更好的解.以上发现也同时说明,采用时间窗约束的分支定界算法相比于直接求解偏序模型,求解时间上更占优势.因此,研制基于时间窗分解的偏序模型求解算法是新的研究方向.同时,通过企业实际算例和采用各种不同算法(如大邻域或可变邻域搜索^[4])进行比较分析,能够进一步揭示偏序约束建模的意义与新的求解策略.

参考文献:

[1] HU Z H, SHEU J B, LUO J X. Sequencing twin

automated stacking cranes in a block at automated container terminal [J]. **Transportation Research Part C: Emerging Technologies**, 2016, **69**(1):208-227.

[2] KLEIN J, DESTERCKE S, COLOT O. Interpreting evidential distances by connecting them to partial orders: Application to belief function approximation [J]. **International Journal of Approximate Reasoning**, 2016, **71**(1):15-33.

[3] CIANCIO C, LAGANA D, VOCATURO F. Branch-price-and-cut for the mixed capacitated general routing problem with time windows [J]. **European Journal of Operational Research**, 2018, **267**(1):187-199.

[4] HOJABRI H, GENDREAU M, POTVIN J Y, *et al.* Large neighborhood search with constraint programming for a vehicle routing problem with synchronization constraints [J]. **Computers & Operations Research**, 2018, **92**(1):87-97.

[5] ERRICO F, DESAULNIERS G, GENDREAU M, *et al.* A priori optimization with recourse for the vehicle routing problem with hard time windows and stochastic service times [J]. **European Journal of Operational Research**, 2016, **249**(1):55-66.

[6] ALVAREZ A, MUNARI P. An exact hybrid method for the vehicle routing problem with time windows and multiple deliverymen [J]. **Computers & Operations Research**, 2017, **83**(1):1-12.

[7] TICHA H B, ABSI N, FEILLET D, *et al.* Empirical analysis for the VRPTW with a multigraph representation for the road network [J]. **Computers & Operations Research**, 2017, **88**(1):103-116.

[8] LIU Ming, LEE C Y, ZHANG Zizhen, *et al.* Bi-objective optimization for the container terminal integrated planning [J]. **Transportation Research Part B: Methodological**, 2016, **93**:720-749.

[9] KU D, ARTHANARI T S. Container relocation problem with time windows for container departure [J]. **European Journal of Operational Research**, 2016, **252**(3):1031-1039.

[10] SHIRI S, HUYNH N. Optimization of drayage operations with time-window constraints [J]. **International Journal of Production Economics**, 2016, **176**(1):7-20.

[11] 邢曦文,毛 钧,张 睿,等. 基于混合流水作业组织的集装箱码头装卸作业集成调度优化 [J]. **中国管理科学**, 2014, **22**(10):97-105.

XING Xiwen, MAO Jun, ZHANG Rui, *et al.* Optimization of container loading/unloading integrated scheduling in a container terminal based on hybrid flowshop [J]. **Chinese Journal of Management Science**, 2014, **22**(10): 97-105. (in Chinese)

[12] 胡祥培, 孙玉姣, 曾庆成. 集装箱码头同贝同步装卸作业的序列优化模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2016, **36**(3): 623-634.

HU Xiangpei, SUN Yujiao, ZENG Qingcheng. A sequence optimization model of dual-cycling operations in container terminals [J]. **System Engineering — Theory & Practice**, 2016, **36**(3): 623-634. (in Chinese)

[13] JANICKI R. Approximations of arbitrary relations by partial orders [J]. **International Journal of Approximate Reasoning**, 2018, **98**(1): 177-195.

[14] ANSARI A H, JACOB G K, SAMET B. An optimization problem under partial order constraints on a metric space [J]. **Journal of Fixed Point Theory and Applications**, 2018, **20**(1): 26-36.

[15] JANSEN C, SCHOLLMMEYER G, AUGUSTIN T. Concepts for decision making under severe uncertainty with partial ordinal and partial cardinal preferences [J]. **International Journal of Approximate Reasoning**, 2018, **98**(1): 112-131.

[16] MIYAMOTO T, INOUE K. Local and random searches for dispatch and conflict-free routing problem of capacitated AGV systems [J]. **Computers & Industrial Engineering**, 2016, **91**(1): 1-9.

[17] PRZYBYLSKI A, GANDIBLEUX X. Multi-objective branch and bound [J]. **European Journal of Operational Research**, 2017, **260**(3): 856-872.

[18] TÜRKOĞULLARI Y B, TAŞKIN Z C, ARAS N, *et al.* Optimal berth allocation, time-variant quay crane assignment and scheduling with crane setups in container terminals [J]. **European Journal of Operational Research**, 2016, **254**(3): 985-1001.

Partial-order-based relaxation of time windows
in routing optimization with stacking constraints

GAO Wenwen, WEI Chen, HU Zhihua*

(Logistics Research Center, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China)

Abstract: In solving vehicle routing problems, time windows are often used to formulate the partial order relationships between tasks, and the routing optimization model and related algorithm with time window constraints are designed. However, time window constraint and partial order constraint are not equivalent. In the context of stacking operations in container terminals, a relaxation method is proposed to translate time window constraints into partial order constraints and a routing optimization model with partial order constraints is built based on the routing optimization model with time window constraints. Under the framework of branch and bound algorithm, the relationship between time window constraints and partial order constraints is studied and the features of two models are analyzed. Solomon datasets are used to do numerical analysis and the difference in the optimization ability of two models is examined. The results show that the partial-order-based model can be solved with better optimality, while the time-window-based model can be solved in a shorter time. Moreover, after analyzing the effects of narrowing the time windows, a new research direction is found to develop improved algorithms for partial-order-based model based on time-window-based decomposition method.

Key words: vehicle routing problem; time window constraints; partial order relationship; branch and bound algorithm; container terminal