文章编号：1000-8608(2019)06-0656-07

一簇微生物间歇发酵酶催化非线性动力系统强稳定性

柳　扬[1,2]，杨　琦[1]，冯恩民[*1]，修志龙[3]

（1. 大连理工大学 数学科学学院，辽宁 大连 116024；
2. 大连大学 信息工程学院，辽宁 大连 116622；
3. 大连理工大学 生物工程学院，辽宁 大连 116024）

摘要： 针对分段线性连续函数各参量的微生物间歇发酵酶催化非线性动力系统中状态变量及其变化速率的充分光滑性以及辨识参量的分段线性等特征，应用比较原理证明此类非线性动力系统及子动力系统解对应的线性变分系统的基本矩阵解的有界性．提出没有平衡点的非线性动力系统解关于初始点及一列解点上扰动后的强稳定性定义．在适当条件下证明了一簇非线性动力系统 $NLDS(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$ 的强稳定性．

关键词： 非线性动力系统；线性变分系统；基本矩阵解；强稳定性

中图分类号： O175.14　　**文献标识码：** A　　**doi：** 10.7511/dllgxb201906015

0　引　言

1，3-丙二醇（简记 1，3-PD）是一种重要的有机化工原料，是用于合成聚酯、聚醚和聚亚氨酯的单体，也广泛应用于油墨、化妆品、制药、防冻剂等行业中[1]．近年来，由于新型聚酯 PTT（聚对苯二甲酸丙二醇酯）的发展，PTT 纤维被认为是本世纪最有发展前途的纤维，而 1，3-PD 作为 PTT 生产的主要原料，再次引起了研究者的广泛关注[2]．

早在 1994 年，Zeng 等[3]提出了描述底物和主要产物变化过程的动力学模型．2000 年修志龙等[4]根据物料平衡原理建立了甘油歧化生成 1，3-PD 的 5 维 Monod 型非线性动力系统．2008 年 Sun 等[5]在甘油歧化生成 1，3-PD 的 Monod 模型中考虑还原路径中的酶催化作用，即考虑了细胞内部分物质浓度的变化，构建了 8 维非线性动力系统．直到 2012 年，Sun 等[6]在原有 8 维数学模型的基础上，增加了基因调控对细胞内物质的作用，构造了 14 维甘油歧化生成 1，3-PD 的微生物发酵的酶催化及基因调控非线性动力系统．基于上述 3 种模型，很多学者进行了大量的研究，例如模型中的参数辨识、最优控制、灵敏度分析、稳定性研究等．2006 年，高彩霞等[7]根据微生物间歇培养过程的特征及动态行为，建立了简化的间歇发酵过程的非线性动力系统及其参数辨识模型，不仅论述了动力系统解的存在性，同时也求得最优辨识参数．宫召华等在文献[8]中对微生物间歇发酵比生长速率辨识进行了进一步的研究，同时也给出了优化算法．Li 等在文献[9]中针对微生物连续发酵研究了平衡点的稳定性，Ye 等[10]针对 5 维动力系统模型研究了平衡点的存在性并进行稳定性分析，王红丽等[11]也对跨膜运输方式下的酶催化动力系统进行了求解并分析了平衡点的稳定性．基于 8 维动力系统模型，Yuan 等[12]进行了跨膜运输方式下酶催化动力系统的鲁棒性辨识．Liu 等先后对系统进行了模型的参数辨识及控制研究[13-15]．但是，文献[4-6]所提出的 3 种微生物发酵非线性动力系统均属于半经验数学模型．由于实验数据有限，而且随机性很强，不具备重复性，必须通过参数辨识来得到更好的接近真实发酵过程的数学模型，并判定其稳定性．由于微生物间歇发酵过程中的状态变量与其变化速率都是光滑的，在其非线性动力系统中选出连续函数作为辨识参量比常数矢量更为符合实际发酵过

收稿日期： 2019-07-05；　**修回日期：** 2019-10-08.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(61712121).
作者简介： 柳　扬(1979-)，女，博士生，E-mail：liuyang@dlu.edu.cn；冯恩民*(1939-)，男，教授，博士生导师，E-mail：liuyang@dlut.edu.cn.

程. 但是，连续函数空间是无穷维，求解连续函数辨识参量是十分困难的. 注意到，分段线性连续函数集是连续函数空间的紧集，即任何连续函数均可用有限分段线性连续函数逼近. 这样可把无穷维优化问题转化为有限维优化问题.

本文主要讨论以分段线性连续函数为参量的微生物间歇发酵酶催化非线性动力系统，证明一簇微生物间歇发酵酶催化非线性动力系统的强稳定性.

1　分段线性连续参量间歇发酵酶催化系统及性质

为充分利用微生物间歇发酵过程中的状态变量与其变化速率的光滑性，选择分段线性连续函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)$ 作为辨识参量. 依文献[6,12]构造间歇发酵酶催化 8 维非线性动力系统，记为

$$NLDS(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)):\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0\end{cases};$$

$$t\in D_0:=[t_0,t_{\mathrm{f}}] \tag{1}$$

系统(1)中右端项 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))\in\boldsymbol{R}^8$ 的每个分量分别为

$$F_1(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))=\mu x_1(t) \tag{2}$$

$$F_2(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))=-q_2x_1(t) \tag{3}$$

$$F_i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))=q_ix_1(t),i\in\{3,4,5\} \tag{4}$$

$$F_6(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))=\frac{1}{u_{11}(\boldsymbol{g},t)}\left[k_1\frac{x_2(t)}{x_2(t)+k_2}+\frac{1}{u_{12}(\boldsymbol{g},t)}(x_2(t)-x_6(t))-q_2\right]-\mu x_6(t) \tag{5}$$

$$F_7(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))=\beta C_{\mathrm{prot}}\left[u_{13}(\boldsymbol{g},t)U_{\mathrm{GDHt}}\times\frac{x_6(t)}{k_m^{\mathrm{GDHt}}\left(1+\frac{x_7(t)}{k_3}\right)+x_6(t)}-k_4U_{\mathrm{PDOR}}\times\frac{x_7(t)}{k_m^{\mathrm{PDOR}}+x_7(t)\left(1+\frac{x_7(t)}{k_5}\right)}\right]-\mu x_7(t) \tag{6}$$

$$F_8(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))=\beta C_{\mathrm{prot}}k_4U_{\mathrm{PDOR}}\times\frac{x_7(t)}{k_m^{\mathrm{PDOR}}+x_7(t)\left(1+\frac{x_7(t)}{k_5}\right)}-u_{14}(\boldsymbol{g},t)(x_8(t)-x_3(t))-\mu x_8(t) \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}_+^8$ 是状态变量，$x_1(t)$、$x_2(t)$、…、$x_8(t)$分别表示菌种、细胞外底物(或称甘油)、细胞外 1,3-PD、乙酸、乙醇、细胞内甘油、细胞内 3-羟基丙醛和细胞内 1,3-PD 在 $t\in[0,t_{\mathrm{f}}]\subset R_+$ 时刻的浓度. $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}_+^8$ 是间歇发酵的初始状态. $D_0:=[t_0,t_{\mathrm{f}}]\subset R_+$ 为发酵过程经历的时间区域. 式(2)～(4)中的比细胞增长速率 μ 以及底物消耗速率和产物生长速率 $q_i(i=2,3,4,5)$可分别表示为

$$\mu=u_1(\boldsymbol{g},t)\frac{x_2(t)}{x_2(t)+k_{\mathrm{s}}}\prod_{i=2}^{5}\left(1-\frac{x_i(t)}{x_i^*(t)}\right) \tag{8}$$

$$q_2=u_2(\boldsymbol{g},t)+\frac{\mu}{u_3(\boldsymbol{g},t)}+u_4(\boldsymbol{g},t)\frac{x_2(t)}{x_2(t)+K_{\mathrm{s}}^*} \tag{9}$$

$$q_3=u_5(\boldsymbol{g},t)+\mu u_6(\boldsymbol{g},t)+u_7(\boldsymbol{g},t)\frac{x_2(t)}{x_2(t)+K_{1,3\text{-PD}}^*} \tag{10}$$

$$q_4=u_8(\boldsymbol{g},t)+\mu u_9(\boldsymbol{g},t)+u_{10}(\boldsymbol{g},t)\frac{x_2(t)}{x_2(t)+K_{\mathrm{HAc}}^*} \tag{11}$$

$$q_5=q_2\left(\frac{c_1}{d_1+\mu x_2(t)}+\frac{c_2}{d_2+\mu x_2(t)}\right) \tag{12}$$

上述式(3)到式(12)中其他参数值参见文献[6,12].

在适当条件下，状态变量 $x_i(t),i\in I_8$ 的上界(或称临界浓度)x_i^* 和下界 $x_{i*}\geqslant0,i\in I_8$，分别为

$$\boldsymbol{x}^*=(15\quad 2\,039\quad 939.5\quad 1\,026\quad 360.9\quad 2\,039\quad 300\quad 939.5)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^8$$

$$\boldsymbol{x}_*=(0.000\,1\quad 0.15\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^8$$

这样，状态变量值 $x_i(t),i\in I_8$ 的可行域 $\boldsymbol{S}_0$ 为

$$\boldsymbol{S}_0:=[\boldsymbol{x}_*,\boldsymbol{x}^*]=\prod_{i=1}^{8}[x_{i*},x_i^*]\subset\boldsymbol{R}_+^8 \tag{13}$$

参变量函数记为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t):=(u_1(\boldsymbol{g},t)\quad u_2(\boldsymbol{g},t)\quad\cdots\quad u_{14}(\boldsymbol{g},t))\in PLCF([t_0,t_{\mathrm{f}}],\boldsymbol{R}^{14}) \tag{14}$$

其中 $PLCF([t_0,t_{\mathrm{f}}],\boldsymbol{R}^{14})$为从区间$[t_0,t_{\mathrm{f}}]$到 $\boldsymbol{R}^{14}$ 的分段线性连续函数空间，它是连续函数空间 $C([t_0,t_{\mathrm{f}}],\boldsymbol{R}^{14})$的紧子集.

为了便于辨识参量 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)\in PLCF([t_0,t_{\mathrm{f}}],\boldsymbol{R}^{14})$，把区间 $D_0:=[t_0,t_{\mathrm{f}}]$等分为 $m(m\geqslant100)$个子区间. 令

$$\Delta t:=\frac{t_{\mathrm{f}}-t_0}{m},\ t_j:=t_0+j\cdot\Delta t,\quad j\in I_m:=\{1,2,\cdots,m\},\quad D_j:=[t_{j-1},t_j],\ j\in I_m \tag{15}$$

定义 1　分段线性连续函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)$定义为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t):=\sum_{j=1}^{m}N_{[t_{j-1},t_j)}(t)\cdot\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t)\in$$

$$PLCF(D_0,\boldsymbol{R}^{14}) \tag{16}$$

其中

$$\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t):=\boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1},t_{j-1})+\boldsymbol{g}_j(t-t_{j-1})\in \boldsymbol{R}^{14},t\in D_j \tag{17}$$

$$\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_{j-1},t_{j-1}):=\begin{cases}\boldsymbol{u}_0; & j=1\\ \boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1},t_{j-1}); & 2\leqslant j\leqslant m\end{cases} \tag{18}$$

$$N_{[t_{j-1},t_j)}(t):=\begin{cases}1; & t\in D_j\\ 0; & t\notin D_j,\end{cases}\quad j\in I_m \tag{19}$$

矢量 $\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t)\in\boldsymbol{R}^{14},t\in D_j$ 的各分量定义为

$$\boldsymbol{u}_{j,i}(\boldsymbol{g}_{j,i},t):=\boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1,i},t_{j-1,i})+\boldsymbol{g}_{j,i}(t-t_{j-1}),\quad i\in I_{14} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{g}_j:=(\boldsymbol{g}_{j,1}\quad \boldsymbol{g}_{j,2}\quad \cdots\quad \boldsymbol{g}_{j,14})\in\boldsymbol{R}^{14},\ j\in I_m$$

$$\boldsymbol{g}:=(\boldsymbol{g}_1\quad \boldsymbol{g}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{g}_m)\in\boldsymbol{R}^{14\times m}$$

式(18)中的 $\boldsymbol{u}_0\in\boldsymbol{R}^{14}$ 取值依文献[12]为

$$\boldsymbol{u}_0:=(0.45\quad 2.8\quad 0.01\quad 36.5\quad -2.4\quad 74.6\quad 29.3\quad -0.7\quad 42.2\quad 7.3\quad 0.17\quad 0.6\quad 0.2\quad 28.2)\in\boldsymbol{R}^{14}$$

矢量 $\boldsymbol{g}_j$、$\boldsymbol{g}$ 的集合分别定义为

$$\boldsymbol{g}_j\in\boldsymbol{G}_j:=\prod_{i=1}^{14}[-4,3]\subset\boldsymbol{R}^{14},\ j\in I_m \tag{21}$$

$$\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{G}:=\prod_{j=1}^{m}\boldsymbol{G}_j\subset\boldsymbol{R}^{14\times m} \tag{22}$$

由式(16)可知

$$D_0:=\bigcup_{j=1}^{m}D_j\subset\mathbf{R} \tag{23}$$

根据非线性动力系统(1)及其状态变量 $\boldsymbol{x}(t)$ 各分量的变化速率 $F_i(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)),i\in I_8$ 的定义,可直接证明下面性质:

性质1 对于任意的 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)\in PLCF([t_0,t_f],\boldsymbol{R}^{14})$,

(1) $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$ 关于 $\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{S}_0$ 是Lipschitz连续的;

(2) $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$ 关于 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)\in PLCF([t_0,t_f],\boldsymbol{R}^{14})$ 连续;

(3) $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$ 关于 $\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{S}_0$ 满足线性增长性质,即存在 $a,b>0$,使

$$\|\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))\|\leqslant a\|\boldsymbol{x}(t)\|+b$$

其中 $\|\cdot\|$ 为 Euclidean 范数.

由常微分方程理论和性质1,可以证明:

性质2 对于任意的 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)\in PLCF([t_0,t_f],\boldsymbol{R}^{14})$,系统(1)的解记为 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$ 存在,唯一.并且解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$ 关于 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)\in PLCF([t_0,t_f],\boldsymbol{R}^{14})$ 是连续的.

为了便于求解变量 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)$,将酶催化非线性动力系统(1)分解为 m 个子动力系统,记作

$$\dot{\boldsymbol{x}}^j(t)=\boldsymbol{f}_j(t,\boldsymbol{x}^j,\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t));\quad t\in D_j$$

$$\boldsymbol{x}^j(t_{j-1})=\begin{cases}\boldsymbol{x}_0; & j=1\\ \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}); & 1<j\leqslant m\end{cases} \tag{24}$$

其中

$$\boldsymbol{f}^j(t,\boldsymbol{x}^j,\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t))=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)),\ t\in D_j \tag{25}$$

系统(1)与子系统(24)中的待定函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)$ 与 $\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t)$ 的允许集分别为

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}}:=\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)\in PLCF(D_0,\boldsymbol{R}^{14})\mid\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{G}\} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}_j}:=\{\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t)\in L(D_j,\boldsymbol{R}^{14})\mid\boldsymbol{g}_j\in\boldsymbol{G}_j\} \tag{27}$$

其中 $L(D_j,\boldsymbol{R}^{14})$ 为从 $D_j=[t_{j-1},t_j)$ 到 $\boldsymbol{R}^{14}$ 的线性函数空间,$j\in I_m$.依式(25),易证明子系统(24)同样有类似的性质1与性质2的结论成立.即

对于 $\forall\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t)\in\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}_j}$,$\forall\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{S}_0$,子系统(24)的解记为

$$\boldsymbol{x}^j(t)=\boldsymbol{x}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}))=\boldsymbol{x}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}),\boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1},t_{j-1}),\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t))$$

存在,唯一,且 $\boldsymbol{x}^j(t)$ 关于 $\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t)\in\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}_j}\subset L(D_j,\boldsymbol{R}^{14})$ 连续.

系统(1)的解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$ 只有在 $\boldsymbol{S}_0$ 内才有实际意义.为此定义

$$\boldsymbol{W}_a=\{\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))\in\boldsymbol{S}_0\mid\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))\text{ 为系统(1)对应 }\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)\in PLCF([t_0,t_f],\boldsymbol{R}^{14})\text{ 的解}\} \tag{28}$$

下面定义系统(1)与子系统(24)的解在 $\boldsymbol{W}_a$ 中的集合,分别定义为

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_w}:=\{\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))\in C(D_0,\boldsymbol{S}_0)\text{ 为系统(1)的解}\mid\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)\in\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}}\} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_{w_j}}:=\{\boldsymbol{x}^j(t)=\boldsymbol{x}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}))=\boldsymbol{x}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}),\boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1},t_{j-1}),\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t))\in C(D_j,\boldsymbol{S}_0)\mid\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t)\in\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}_j}\} \tag{30}$$

由式(21)、(22)可知 $\boldsymbol{G}_j,j\in I_m,\boldsymbol{G}$ 均为非空有界闭集,再依式(16)到式(20)可知,$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)$ 关于 $\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{G}$ 连续,$\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t)$ 关于 $\boldsymbol{g}_j\in\boldsymbol{G}_j$ 连续.最后,由式(26)与式(27)得 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}}$ 与 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}_j}$ 分别为 $PLCF(D_0,\boldsymbol{R}^{14})$ 与 $L(D_j,\boldsymbol{R}^{14})$ 中的非空紧集.根据性质2,系统(1)的解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$ 关于 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)\in\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}}$ 连续,所以 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_w}$ 是 $C(D_0,\boldsymbol{S}_0)$ 中的非空紧集.类似地,$\boldsymbol{x}^j(t)=\boldsymbol{x}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}),\boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1},t_{j-1}),\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t))$ 关于 $\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t)\in\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}_j}$ 连续,因此 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_{w_j}}$ 是

$C(D_j, \boldsymbol{S}_0)$中的非空紧集.

性质3　由式(26)与(27)定义集合 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}}$ 和 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}_j}, j\in I_m$，都是相应函数空间中的非空集合.

现在定义如下的函数与集合：

$$\boldsymbol{x}^m(t) := \boldsymbol{x}^m(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}^m(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}, t)) = \sum_{j=1}^{m} N_{D_j}(t)\boldsymbol{x}^j(t) \tag{31}$$

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}_w} := \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}, t)\in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}} \mid \boldsymbol{x}^m(t)\in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_w}\} \tag{32}$$

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}_{w_j}} := \{\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t)\in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}_j} \mid \boldsymbol{x}^j(t)\in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_{w_j}}\} \tag{33}$$

依式(24)可以证明：

定理1　若 $\boldsymbol{x}^j(t, t_{j-1}, \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}), \boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1}, t_{j-1}), \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t)), j\in I_m$，是子动力系统(24)的解，则由式(31)定义的 $\boldsymbol{x}^m(t)$就是系统(1)的解.

定理2　若 $\boldsymbol{w}_a$ 是非空的，则 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}_w}$ 与 $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}_{w_j}}$ 分别为 $PLCF(D_0, \boldsymbol{R}^{14})$与 $L(D_j, \boldsymbol{R}^{14})$中的非空紧集.

2　子系统的线性变分系统及其基本矩阵解

在子系统(24)中，状态变量 $\boldsymbol{x}^j(t), j\in I_m$，变化速率 $\boldsymbol{f}_j(t, \boldsymbol{x}^j, \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t))$关于 $\boldsymbol{x}^j\in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}_{w_j}}$ 的偏导数存在，且关于 $t\in D_j$ 连续，因此可构造子系统(24)的解

$$\boldsymbol{x}^j(t) = \boldsymbol{x}^j(t, t_{j-1}, \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}), \boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1}, t_{j-1}), \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t))$$

对应的线性变分系统：

$$\dot{\boldsymbol{y}}_1(t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}_1(t, \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1, t))}{\partial \boldsymbol{x}^1}\boldsymbol{y}_1,\ t\in D_1 \tag{34}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}_j(t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}_j(t, \boldsymbol{x}^j, \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t))}{\partial \boldsymbol{x}^j}\boldsymbol{y}_j;\ t\in D_j, 2\leqslant j\leqslant m \tag{35}$$

其中 $\boldsymbol{x}^1(t) = \boldsymbol{x}^1(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}^1(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1, t)), t\in D_1$ 是子系统(24)在 $j=1$ 时的解. $\boldsymbol{x}^j(t) = \boldsymbol{x}^j(t, t_{j-1}, \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})) = \boldsymbol{x}^j(t, t_{j-1}, \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}), \boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1}, t_{j-1}), \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t))\in \boldsymbol{R}^8, t\in D_j$ 是子系统(24)在 $j=\{2, 3, \cdots, m\}$时的解.

当 $j=1$ 时，子系统(24)为

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}}^1(t) = \boldsymbol{f}_1(t, \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1, t)),\ t\in D_1 \\ &\boldsymbol{x}^1(t) = \boldsymbol{x}_0 \end{aligned} \tag{36}$$

根据文献[10]中定理3.3，矩阵$\partial \boldsymbol{x}^1(t, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1, t))/\partial \boldsymbol{x}_0\in \boldsymbol{R}^{8\times 8}$是以

$$\partial \boldsymbol{x}^1(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1, t))/\partial \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{I} \tag{37}$$

为初始矩阵线性变分系统(34)的基本矩阵解，其中 $\boldsymbol{I}$ 为 8×8 阶单位阵.

当 $j\in\{2, 3, \cdots, m\}$时，子系统(24)为

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}}^j(t) = \boldsymbol{f}_j(t, \boldsymbol{x}^j, \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t)),\ t\in D_j = [t_{j-1}, t_j) \\ &\boldsymbol{x}^j(t_{j-1}) = \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}) \end{aligned} \tag{38}$$

矩阵

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^j(t, t_{j-1}, \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}), \boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1}, t_{j-1}), \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t))}{\partial \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})}\in \boldsymbol{R}^{8\times 8}$$

是以

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^j(t_{j-1}, \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}), \boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1}, t_{j-1}), \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t))}{\partial \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})} = \boldsymbol{I} \tag{39}$$

为初始矩阵的线性变分系统(35)的基本矩阵解.

设 $\boldsymbol{\Phi}_1(t, t_0, \boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{\Phi}_2(t, t_1, \boldsymbol{x}_1(t_1)), \cdots, \boldsymbol{\Phi}_m(t, t_{m-1}, \boldsymbol{x}_{m-1}(t_{m-1}))$是线性变分系统(34)、(35)具有初始矩阵(37)、(39)的基本矩阵解. 为证明强稳定性，根据文献[12]中定理2.6.4即需要如下引理：

引理1　若 $\boldsymbol{x}^1(t) = \boldsymbol{x}^1(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1, t))$与 $\boldsymbol{y}^1(t) = \boldsymbol{y}^1(t, t_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1, t))$分别为子系统(24)在 $j=1$ 时具有初始状态 $\boldsymbol{x}^1(t_0) = \boldsymbol{x}_0\in \boldsymbol{S}_0$ 与 $\boldsymbol{y}^1(t_0) = \boldsymbol{y}_0\in \boldsymbol{S}_0$ 的解，则

$$\boldsymbol{y}^1(t, t_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{u}_0, u_1(\boldsymbol{g}_1, t)) - \boldsymbol{x}^1(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1, t)) = \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}_1(t, t_0, \boldsymbol{x}_0 + \tau(\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0))\mathrm{d}\tau\cdot(\boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_0), t\in D_1 \tag{40}$$

对于 $j\in\{2, 3, \cdots, m\}$，若 $\boldsymbol{x}^j(t) = \boldsymbol{x}^j(t, t_{j-1}, \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}), \boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1}, t_{j-1}), \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t))$与 $\boldsymbol{y}^j(t) = \boldsymbol{y}^j(t, t_{j-1}, \boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1}), \boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1}, t_{j-1}), \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t))$分别为子系统(24)在 $j\in\{2, 3, \cdots, m\}$具有初始状态 $\boldsymbol{x}^j(t_{j-1}) = \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})\in \boldsymbol{S}_0$ 与 $\boldsymbol{y}^j(t_{j-1}) = \boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1})\in \boldsymbol{S}_0$ 的解，则

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}^j(t, t_{j-1}, \boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1}), \boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1}, t_{j-1}), \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t)) - \boldsymbol{x}^j(t, t_{j-1}, \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}), \\ &\boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1}, t_{j-1}), \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j, t)) = \\ &\int_0^1 \boldsymbol{\Phi}_j(t, t_{j-1}, \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}) + \tau(\boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1}) - \\ &\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}))\mathrm{d}\tau\cdot(\boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1}) - \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})),\ t\in D_j \end{aligned} \tag{41}$$

3　一簇间歇发酵酶催化系统的强稳定性

考虑一簇间歇发酵酶催化非线性动力系统 $NLDS(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}, t)), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}, t)\in \boldsymbol{S}_{uw}$ 的强稳定性.

定义2　对于任意的 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}, t)\in \boldsymbol{S}_{uw}$，设 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^m(t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{g}, t))\in \boldsymbol{R}^8$ 是非线性动力系统

$NLDS(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$的解.若对于任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使任一满足下述条件的$NLDS(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$的解$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{y}^m(t,t_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))\in\boldsymbol{R}^8$,$t\in D_0$,只要$\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0\in\boldsymbol{S}_0$,$|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|<\delta(\varepsilon)$,$|\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})-\boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1})|<\delta(\varepsilon)$,$j\in\{2,3,\cdots,m\}$,都有$|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{y}(t)|<\varepsilon$,$\forall t\in D_0$.

即(由式(31)得)

$$|\boldsymbol{x}^1(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))-\boldsymbol{y}^1(t,t_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))|<\varepsilon,\quad\forall t\in D_1$$

$$|\boldsymbol{x}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}),\boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1},t_{j-1}),\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t))-\boldsymbol{y}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1}),\boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1},t_{j-1}),\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t))|<\varepsilon;\quad t\in D_j,j\in\{2,3,\cdots,m\}$$

则称非线性动力系统$NLDS(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$的解$\boldsymbol{x}^m(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$关于初始状态$\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{S}_0$及一列解点$\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})$,$j\in\{2,3,\cdots,m\}$扰动是强稳定的,并称一簇非线性动力系统$NLDS(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$,$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)\in\boldsymbol{S}_{uw}$的解是强稳定的.

为证明强稳定性,只需证明子系统(24)解对应的线性变分系统基本矩阵解的有界性.

定理3 设$\boldsymbol{x}^1(t)=\boldsymbol{x}^1(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))$是子系统(24)在$j=1$时动力系统(36)的解,$\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$,$t\in D_1$是解$\boldsymbol{x}^1(t)$对应的线性变分系统

$$\dot{\boldsymbol{y}}_1(t)=\frac{\partial\boldsymbol{f}^1(t,\boldsymbol{x}^1(t),\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))}{\partial\boldsymbol{x}^1(t)}\boldsymbol{y}_1(t),\ t\in D_1$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{x}^1(t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))}{\partial\boldsymbol{x}_0}=\boldsymbol{I}$$

的基本矩阵解,则$\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$在$D_1\subset R_+$上有界,即存在$M_1>0$,使

$$|\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)|\leqslant M_1,\ \forall t\in D_1$$

证明 设$\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)=(y_{11}(t,t_0,\boldsymbol{e}_1)\quad y_{12}(t,t_0,\boldsymbol{e}_2)\quad\cdots\quad y_{18}(t,t_0,\boldsymbol{e}_8))\in\boldsymbol{R}^{8\times8}$.依基本矩阵解的定义有

$$\begin{aligned}&\dot{y}_{1i}(t,t_0,\boldsymbol{e}_i)=\frac{\partial f_{1i}(t,\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))}{\partial\boldsymbol{x}_1}y_{1i}(t,t_0,\boldsymbol{e}_i)\\&y_{1i}(t,t_0,\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{e}_i;\ t\in D_1,i\in I_8\end{aligned}\tag{42}$$

其中$\boldsymbol{e}_i\in\boldsymbol{R}^8$是$8\times8$阶单位阵的第$i$列.$\boldsymbol{y}_1(t):=(y_{11}(t)\quad y_{12}(t)\quad\cdots\quad y_{18}(t))$是线性变分系统(42)的解.

由性质1知,$f_{1i}(t,\boldsymbol{x}^1(t),\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))$关于$\boldsymbol{x}^1(t)$的偏导数存在,且关于$t\in D_1$连续,$\boldsymbol{W}_a$为非空紧集,所以对任意$t\in D_1$,$\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{S}_0$,$\partial f_{1i}(t,\boldsymbol{x}^1(t),\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))/\partial\boldsymbol{x}^1$关于$t\in D_1$有界,即存在$M_0>0$,使

$$\left|\frac{\partial f_{1i}(t,\boldsymbol{x}^1(t),\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))}{\partial\boldsymbol{x}^1}\right|\leqslant M_0;\ \forall t\in D_1,i\in I_8\tag{43}$$

令

$$v_i:=\arg\min\{|v_i(t)|\,|\,v_i(t)\in C^1(D_1,R_+),\ v_i(t)\geqslant\max_{l\in I_8}|y_{1l}(t,t_0,\boldsymbol{e}_l)|,t\in D_1\}\tag{44}$$

$$w_i(t,v_i(t)):=8M_0v_i(t),\ i\in I_8\tag{45}$$

由式(44)与式(45)可知:

$$w_i(t,v(t))\in C^1(D_1\times R_+,R_+),\ i\in I_8$$

定义关于$v_i(t)$的一维动力系统:

$$\begin{aligned}&\dot{v}_i(t)=w_i(t,v_i(t));\ t\in D_1,i\in I_8\\&v_i(t_0)=1\end{aligned}\tag{46}$$

显然系统(46)有唯一解$v_i(t)$,且满足$v_i(t)\geqslant1$,$\forall t\in D_1$.

在系统(42)与(46)中,对于初始值有$|y_{1i}(t,t_0,\boldsymbol{e}_i)|=|\boldsymbol{e}_i|=1$,$v_i(t_0)=1$.

$\forall t\in D_1$,$i\in I_8$,比较系统(42)与(46)中的右端项,有下列不等式成立:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial f_{1i}(t,\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))}{\partial\boldsymbol{x}_1}y_{1i}(t,t_0,\boldsymbol{e}_i)\right|\leqslant\\&\left|\frac{\partial f_{1i}(t,\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))}{\partial\boldsymbol{x}_1}\right||y_{1i}(t,t_0,\boldsymbol{e}_i)|\leqslant\\&8M_0|y_{1i}(t,t_0,\boldsymbol{e}_i)|\leqslant\\&8M_0\max_{l\in I_8}|y_{1l}(t,t_0,\boldsymbol{e}_i)|\leqslant\\&8M_0v_i(t)=w_i(t,v_i(t))\end{aligned}$$

比较系统(42)与(46)的右端项及初值可得,系统(42)的解$y_{1i}(t,t_0,\boldsymbol{e}_i)$,$i\in I_8$满足

$$|y_{1i}(t,t_0,\boldsymbol{e}_i)|\leqslant|v_i(t)|=\max_{t\in D_1}|v_i(t)|,i\in I_8\tag{47}$$

由于$v_i(t)\in C^1(D_1,R_+)$,得$v_i(t)$在D_1上有界,即存在$m_i>0$,使

$$|v_i(t)|\leqslant m_i;\ \forall t\in D_1,i\in I_8$$

依式(47)有

$$|y_{1i}(t,t_0,\boldsymbol{e}_i)|\leqslant m_i;\ \forall t\in D_1,i\in I_8$$

令$M_1:=\sum_{i=1}^{8}m_i$,可得

$$|\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)|=\sum_{i=1}^{8}|y_{1i}(t,t_0,\boldsymbol{e}_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{8}m_i=M_1,\ \forall t\in D_1\tag{48}$$

即证得$|\boldsymbol{\Phi}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)|$在$D_1$上有界.

采用定理2相似的方法,可以证明:

定理4 设$\boldsymbol{x}^j(t)=\boldsymbol{x}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}),\boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1},t_{j-1}),\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t))$是子系统(25)在$j\in\{2,3,\cdots,m\}$时的动力系统(38)的解,$\boldsymbol{\Phi}_j(t,t_{j-1},$

$\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})$)是子系统(38)的解 $\boldsymbol{x}^j(t)$ 对应的线性变分系统：

$$\dot{\boldsymbol{y}}_j(t)=\frac{\partial \boldsymbol{f}_j(t,\boldsymbol{x}^j(t),\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t))}{\partial \boldsymbol{x}^j}\boldsymbol{y}_j(t),t\in D_j$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}),\boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1},t_{j-1}),\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t))}{\partial \boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})}=\boldsymbol{I}$$

的基本矩阵解，则 $\boldsymbol{\Phi}_j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}))$ 在 $D_j\subset R_+$ 上有界，即存在 $M_j>0$，使

$$|\boldsymbol{\Phi}_j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}))|\leqslant M_j;\quad \forall t\in D_j,j\in\{2,3,\cdots,m\} \tag{49}$$

定理 5　对于任意的 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)\in \boldsymbol{S}_{uw}$，设 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}^m(t,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))\in \boldsymbol{S}_{xw}$ 是非线性系统 $NLDS(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$ 的解，则解 $\boldsymbol{x}^m(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 关于初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 一列解点 $\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}),j\in\{2,3,\cdots,m\}$ 扰动是强稳定的.

证明　$\forall \varepsilon>0$，设 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{y}_m(t,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))\in \boldsymbol{S}_{xw}$ 是满足下述条件的系统 $NLDS(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$ 任一解：$\boldsymbol{y}_0\in \boldsymbol{S}_0$，$|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{y}_0|<\dfrac{\varepsilon}{M}=\delta(\varepsilon)$，$|\boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1})-\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{M}=\delta(\varepsilon)$，$j\in\{2,3,\cdots,m\}$. 其中 $M=\max\{M_j\,|\,j\in I_m\}$.

根据解 $\boldsymbol{x}_m(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 与 $\boldsymbol{y}_m(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)$，式(31)给出的定义，依子区域 $D_j,j\in I_m$，分别应用引理 1 有

$$\boldsymbol{y}^1(t,t_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))-\boldsymbol{x}^1(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))=\int_0^1\boldsymbol{\Phi}_1(t,t_0,\boldsymbol{x}_0+\tau(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0))\mathrm{d}\tau\cdot(\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0),\ t\in D_1$$

$$\boldsymbol{y}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1}),\boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1},t_{j-1}),\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t))-\boldsymbol{x}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}),\boldsymbol{u}_{j-1}(\boldsymbol{g}_{j-1},t_{j-1}),\boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{g}_j,t))=\int_0^1\boldsymbol{\Phi}_j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})+\tau(\boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1})-\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})))\mathrm{d}\tau\cdot(\boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1})-\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}));\quad \forall t\in D_j,j\in\{2,3,\cdots,m\}$$

依基本矩阵的有界性，对上述二式两边取绝对值，可得

$$|\boldsymbol{y}^1(t,t_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))-\boldsymbol{x}^1(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{g}_1,t))|\leqslant M|\boldsymbol{y}_0-\boldsymbol{x}_0|\leqslant\varepsilon,\ \forall t\in D_1$$

$$|\boldsymbol{y}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1}))-\boldsymbol{x}^j(t,t_{j-1},\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1}))|\leqslant M|\boldsymbol{y}^{j-1}(t_{j-1})-\boldsymbol{x}^{j-1}(t_{j-1})|\leqslant\varepsilon;\quad \forall t\in D_j,j\in\{2,3,\cdots,m\}$$

根据式(31)有

$$|\boldsymbol{y}^m(t,t_0,\boldsymbol{y}_0)-\boldsymbol{x}^m(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)|\leqslant M\leqslant\varepsilon,\ \forall t\in D_0$$

从强稳定性的定义可知，系统 $NLDS(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t)\in \boldsymbol{S}_{uw}$ 的解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_m(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 关于初值 $\boldsymbol{x}_0\in \boldsymbol{S}_0$ 是强稳定的.

4　结　语

本文构建了以分段线性连续函数为参量的微生物间歇发酵酶催化非线性动力系统及其分解子动力系统，并论述了其性质. 给出了此间歇发酵酶催化非线性系统解对应的线性变分系统及其基本矩阵解，证明一簇微生物间歇发酵酶催化非线性动力系统的解的强稳定性.

参考文献：

[1] WITT U, MULLER R J, AUGUSTA J, *et al*. Synthesis, properties and biodegradability of polyesters based on 1,3- propanediol [J]. **Macromolecular Chemistry and Physics**, 1994, **195**(2): 793-802.

[2] MENZEL K, ZENG A P, DECKWER W D. High concentration and productivity of 1, 3-propanediol from continuous fermentation of glycerol by *Klebsiella pneumoniae* [J]. **Enzyme and Microbial Technology**, 1997, **20**(2): 82-86.

[3] ZENG A P, ROSS A, BIEBL H, *et al*. Multiple product inhibition and growth modeling of *Clostridium butyricum* and *Klebsiella pneumoniae* in glycerol fermentation [J]. **Biotechnology and Bioengineering**, 1994, **44**(8): 902-911.

[4] 修志龙，曾安平，安利佳，等. 甘油生物歧化过程动力学数学模拟和多稳态研究 [J]. 大连理工大学学报，2000，**40**(4)：428-433.
XIU Zhilong, ZENG Anping, AN Lijia, *et al*. Mathematical modeling of kinetics and research on multiplicity of glycerol bioconversion to 1,3-propanediol [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2000, **40**(4): 428-433. (in Chinese)

[5] SUN Yaqin, QI Wentao, TENG Hu, *et al*. Mathematical modeling of glycerol fermentation by *Klebsiella pneumoniae*: Concerning enzyme-catalytic reductive pathway and transport of glycerol and 1, 3-propanediol across cell membrane [J]. **Biochemical Engineering Journal**, 2008, **38**(1): 22-32.

[6] SUN Yaqin, YE Jianxiong, MU Xiaojia, *et al*. Nonlinear mathematical simulation and analysis of Dha regulon for glycerol metabolism in *Klebsiella pneumoniae* [J]. **Chinese Journal of Chemical

Engineering, 2012, **20**(5): 958-970.

[7] 高彩霞,王宗涛,冯恩民,等. 微生物间歇发酵生产1,3-丙二醇过程辨识与优化[J]. 大连理工大学学报, 2006, **46**(5): 771-774.
GAO Caixia, WANG Zongtao, FENG Enmin, *et al*. Parameter identification and optimization of process for bio-dissimilation of glycerol to 1,3-propanediol in batch culture [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2006, **46**(5): 771-774. (in Chinese)

[8] 宫召华,冯恩民,修志龙. 微生物间歇发酵比生长速率辨识及优化算法[J]. 大连理工大学学报, 2009, **49**(4): 611-616.
GONG Zhaohua, FENG Enmin, XIU Zhilong. Identification of specific growth rate and optimization algorithm in microbial batch culture [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2009, **49**(4): 611-616. (in Chinese)

[9] LI Xiaohong, FENG Enmin, XIU Zhilong. Stability analysis of equilibrium for microorganisms in continuous culture [J]. **Applied Mathematics Journal of Chinese Universities**, 2005, **20**(4): 377-383.

[10] YE Jianxiong, FENG Enmin, LIAN Hansheng, *et al*. Existence of equilibrium points and stability of the nonlinear dynamical system in microbial continuous cultures [J]. **Applied Mathematics and Computation**, 2009, **207**(2): 307-318.

[11] 王红丽,叶剑雄,冯恩民. 甘油生物歧化非线性动力系统的平衡点及其稳定性分析[J]. 生物数学学报, 2011, **26**(2): 339-346.
WANG Hongli, YE Jianxiong, FENG Enmin. Analysis of the equilibrium point and stability of the nonlinear dynamical system of glycerol fermentation in continuous culture [J]. **Journal of Biomathematics**, 2011, **26**(2): 339-346. (in Chinese)

[12] YUAN J L, ZHU X, YIN H C, *et al*. Robust identification of enzymatic nonlinear dynamical systems for 1,3-propanediol transport mechanisms in microbial batch culture [J]. **Applied Mathematics and Computation**, 2014, **232**: 150-163.

[13] LIU Chongyang. Modelling and parameter identification for a nonlinear time-delay system in microbial batch fermentation [J]. **Applied Mathematical Modelling**, 2013, **37**(10/11): 6899-6908.

[14] WANG Juan, YE Jianxiong, FENG Enmin, *et al*. Modeling and identification of a nonlinear hybrid dynamical system in batch fermentation of glycerol [J]. **Mathematical and Computer Modelling**, 2011, **54**(1/2): 618-624.

[15] WANG Lei, XIU Zhilong, ZHANG Yuduo, *et al*. Optimal control for multistage nonlinear dynamic system of microbial bioconversion in batch culture [J]. **Journal of Applied Mathematics**, 2011: 624516.

Strong stability of a family enzyme-catalyzed nonlinear dynamic system in microbial batch fermentation

LIU Yang[1,2], YANG Qi[1], FENG Enmin*[1], XIU Zhilong[3]

(1. School of Mathematical Science, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;
2. College of Information Engineering, Dalian University, Dalian 116622, China;
3. School of Bioengineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: In a microbial batch fermentation enzyme-catalyzed nonlinear dynamic system, due to the sufficient smoothness of state variables and rates in a piecewise linear continuous function and the piecewise linearity of identification parameters, the comparison principle is used to prove the boundedness of the fundamental matrix solutions of the linear variational systems corresponded by the nonlinear dynamic system and sub dynamic system solution. The definition of the strong stability of solutions of nonlinear dynamic systems without equilibrium points disturbed on initial point and a serial solution points is proposed. In perfect condition, the strong stability of a family nonlinear dynamic system $NLDS(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{g},t))$ is proved.

Key words: nonlinear dynamic system; linear variational system; fundamental matrix solution; strong stability

(第59卷卷终)