第60卷第1期
2020年1月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 60, No. 1
Jan. 2020

文章编号：1000-8608(2020)01-0107-04

# $mC_3 \vee nC_3$ 和 $mC_4 \vee nC_4$ 点可区别Ⅰ-全染色及Ⅵ-全染色

陈祥恩*， 张生桂

（西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070）

**摘要：** 设 $f$ 为简单图 $G$ 的一个一般全染色(即若干种颜色对图 $G$ 的全部顶点及边的一个分配)，如果任意两个相邻点染以不同颜色且任意两条相邻边染以不同的颜色，则称为图 $G$ 的Ⅰ-全染色；如果任意两条相邻边染以不同的颜色，则称为图 $G$ 的Ⅵ-全染色. 用 $C(x)$ 表示在 $f$ 下点 $x$ 的颜色以及与 $x$ 关联的边的色所构成的集合(非多重集). 对图 $G$ 的一个Ⅰ-全染色(分别地，Ⅵ-全染色) $f$，一旦 $\forall u,v\in V(G)$，$u\neq v$，就有 $C(u)\neq C(v)$，则 $f$ 称为图 $G$ 的点可区别Ⅰ-全染色(或点可区别Ⅵ-全染色)，简称为 VDIT 染色(分别地，VDVIT 染色). 令 $\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(G)=\min\{k \mid G$ 存在 $k$-VDIT 染色$\}$，称 $\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(G)$ 为图 $G$ 的点可区别Ⅰ-全色数. 令 $\chi_{vt}^{\mathrm{VI}}(G)=\min\{k \mid G$ 存在 $k$-VDVIT 染色$\}$，称 $\chi_{vt}^{\mathrm{VI}}(G)$ 为图 $G$ 的点可区别Ⅵ-全色数. 利用构造具体染色的方法，讨论了联图 $mC_3 \vee nC_3$ 和 $mC_4 \vee nC_4$ 的点可区别Ⅰ-全染色和点可区别Ⅵ-全染色，并给出了联图 $mC_3 \vee nC_3$ 和 $mC_4 \vee nC_4$ 的点可区别Ⅰ-全色数和点可区别Ⅵ-全色数.

**关键词：** 图的联；Ⅰ-(Ⅵ-)全染色；点可区别Ⅰ-(Ⅵ-)全染色；点可区别Ⅰ-(Ⅵ-)全色数

**中图分类号：** O157.5　　**文献标识码：** A　　**doi：** 10.7511/dllgxb202001015

## 0 引 言

关于图的点可区别未必正常边染色已进行了许多研究[1-3]. 两类点可区别未必正常全染色即点可区别Ⅰ-全染色和点可区别Ⅵ-全染色在文献[4]中被提出，并在文献[5-6]中被研究. 设 $f$ 为图 $G$ 的一个一般全染色(即若干种颜色对图 $G$ 的全部顶点及边的一个分配)，如果任意两个相邻点染以不同颜色且任意两条相邻边染以不同的颜色，则称为图 $G$ 的Ⅰ-全染色；如果任意两条相邻边染以不同的颜色，则称为图 $G$ 的Ⅵ-全染色. 用 $C(x)$ 表示在 $f$ 下点 $x$ 的颜色以及与 $x$ 关联的边的色所构成的集合(非多重集)，$C(x)$ 在全体颜色构成的集合中的补集记为 $\overline{C(x)}$. 对图 $G$ 的一个Ⅰ-全染色(分别地，Ⅵ-全染色) $f$，一旦 $\forall u,v\in V(G)$，$u\neq v$，就有 $C(u)\neq C(v)$，则 $f$ 称为图 $G$ 的点可区别的Ⅰ-全染色(或点可区别Ⅵ-全染色)，简称为 VDIT 染色(分别地，VDVIT 染色). 令 $\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(G)=\min\{k \mid G$ 存在 $k$-VDIT 染色$\}$，称 $\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(G)$ 为图 $G$ 的点可区别Ⅰ-全色数. 令 $\chi_{vt}^{\mathrm{VI}}(G)=\min\{k \mid G$ 存在 $k$-VDVIT 染色$\}$，称 $\chi_{vt}^{\mathrm{VI}}(G)$ 为图 $G$ 的点可区别Ⅵ-全色数. 在文献[4]中，得到了联图 $C_n \vee C_n$ 的点可区别Ⅰ-全染色及点可区别Ⅵ-全染色($n$ 至少是 4). 文献[5]中探讨了圈与路的联图的点可区别Ⅰ-全染色(点可区别Ⅵ-全染色)且在文献[6]中讨论了两条路的联图的点可区别Ⅰ-全染色. 本文讨论并给出 $mC_3 \vee nC_3$ 和 $mC_4 \vee nC_4$ 的点可区别Ⅰ-全色数和点可区别Ⅵ-全色数，其中 $lC_i$ 是指 $l$ 个 $i$ 阶圈 $C_i$ 的点不交的并，$mC_i \vee nC_i$ 表示 $mC_i$ 与 $nC_i$ 的联($i=3,4$).

## 1 准备工作

对于图 $G$，令 $n_i$ 表示度为 $i$ 的顶点的数目，$\delta\leqslant i\leqslant\Delta$，假设

$$\zeta(G)=\min\left\{l \,\middle|\, \binom{l}{i}+\binom{l}{i+1}+\binom{l}{i+2}+\cdots+\right.$$

**收稿日期：** 2019-09-10； **修回日期：** 2019-12-02.
**基金项目：** 国家自然科学基金资助项目(11761064,61163037)；西北师范大学研究生科研资助项目(2019KYZZ012036).
**作者简介：** 陈祥恩*(1965-)，男，教授，E-mail：chenxe@nwnu.edu.cn；张生桂(1996-)，女，硕士生，E-mail：zhangshenggui1996@163.com.

$$\binom{l}{i+s}+\binom{l}{i+s+1}\geqslant n_i+n_{i+1}+n_{i+2}+\cdots+n_{i+s},\ \delta\leqslant i\leqslant i+s\leqslant\Delta,s\geqslant 0\Big\}$$

文献[4]给出了下述引理、命题、猜想.

**引理 1** $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(G)\geqslant\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{VI}}(G)\geqslant\zeta(G)$.

**命题 1** $K_n$，$n\geqslant 3$ 是完全图，(i) 当 $n\equiv 1(\bmod 2)$ 时，$\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(K_n)=n$；$n\equiv 0(\bmod 2)$ 时，$\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(K_n)=n+1$. (ii) $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{VI}}(K_n)=\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(K_n)$.

**命题 2** 当 $n\geqslant 4$ 时，有 $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(C_n\vee C_n)=n+4$.

**猜想 1**（VDITC 猜想） $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(G)=\zeta(G)$ 或 $\zeta(G)+1$.

**猜想 2**（VDVITC 猜想） $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{VI}}(G)=\zeta(G)$ 或 $\zeta(G)+1$.

假设 $p\in\mathbf{Z}$，而 $q$ 为正整数，用 $(p)_q$ 表示 $1,2,\cdots,q$ 中的模 $q$ 同余于 $p$ 的那个数，即 $(p)_q\in\{1,2,\cdots,q\}$ 且 $(p)_q\equiv p(\bmod q)$.

## 2 主要结果及其证明

**定理 1** 设 $1\leqslant m\leqslant n$，则

(i)

$$\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(mC_3\vee nC_3)=\begin{cases}3n+4; & 1\leqslant m=n\\ 3n+3; & 1\leqslant m<n\end{cases}$$

(ii) $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{VI}}(mC_3\vee nC_3)=\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(mC_3\vee nC_3)$.

**证明** (i) 令 $V(mC_3\vee nC_3)=\{u_1,u_2,\cdots,u_{3m},v_1,v_2,\cdots,v_{3n}\}$，$E(mC_3\vee nC_3)=\{u_iu_{i+1}\mid i\not\equiv 0(\bmod 3)\}\cup\{u_iu_{i-2}\mid i\equiv 0(\bmod 3)\}\cup\{v_jv_{j+1}\mid j\not\equiv 0(\bmod 3)\}\cup\{v_jv_{j-2}\mid j\equiv 0(\bmod 3)\}\cup\{u_iv_j\mid i=1,2,\cdots,3m;j=1,2,\cdots,3n\}$.

**情形 1** $1\leqslant m=n$.

当 $m=n=1$ 时，$C_3\vee C_3=K_6$，由命题 1 可知，$\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(K_6)=\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{VI}}(K_6)=7$.

当 $2\leqslant m=n$ 时，图 $nC_3\vee nC_3$ 有 $6n$ 个度为 $3n+2$ 的点. 先计算 $\zeta(nC_3\vee nC_3)=\min\Big\{l\,\Big|\,\binom{l}{3n+2}+\binom{l}{3n+3}\geqslant 6n\Big\}=3n+4$. 由引理 1 可知 $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(nC_3\vee nC_3)\geqslant 3n+4$. 现在只需证明 $nC_3\vee nC_3$ 存在一个 $(3n+4)$-VDIT 染色 $f$. 设染色所需用的色为 $1,2,\cdots,3n+1,\alpha,\beta,\gamma$.

**步骤 1** 给连 $u_i$ 与 $v_j$ 的边进行染色. 令

$f(u_iv_j)=(i+j-1)_{3n+1}\in\{1,2,\cdots,3n+1\}$；$1\leqslant i\leqslant 3n,1\leqslant j\leqslant 3n$

**步骤 2** 给 3 圈的边进行染色. 边 $u_iu_{i+1}$、$u_{i+1}u_{i+2}$、$u_iu_{i+2}$ 分别染以颜色 $\gamma$、$\alpha$、$\beta$，边 $v_iv_{i+1}$、$v_{i+1}v_{i+2}$、$v_iv_{i+2}$ 分别染以颜色 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$，这里 $i\equiv 1(\bmod 3)$，$i\in\{1,2,\cdots,3n\}$.

**步骤 3** 给点染色. 点 $u_i$、$u_{i+1}$、$u_{i+2}$ 分别染以颜色 $\gamma$、$\alpha$、$\beta$，点 $v_i$、$v_{i+1}$、$v_{i+2}$ 分别染以颜色 2、3、1，这里 $i\equiv 1(\bmod 3)$，$i\in\{1,2,\cdots,3n\}$.

上述染色是 I-全染色，并且在此染色下有

$\overline{C(u_i)}=\{(i-1)_{3n+1},\alpha\}$，$i\equiv 1(\bmod 3)$；

$\overline{C(u_i)}=\{(i-1)_{3n+1},\beta\}$，$i\equiv 2(\bmod 3)$；

$\overline{C(u_i)}=\{(i-1)_{3n+1},\gamma\}$，$i\equiv 0(\bmod 3)$

其中 $i=1,2,\cdots,3n$.

$\overline{C(v_j)}=\{(j-1)_{3n+1},\beta\}$，$j\equiv 1(\bmod 3)$；

$\overline{C(v_j)}=\{(j-1)_{3n+1},\gamma\}$，$j\equiv 2(\bmod 3)$；

$\overline{C(v_j)}=\{(j-1)_{3n+1},\alpha\}$，$j\equiv 0(\bmod 3)$

其中 $j=1,2,\cdots,3n$. 可见 $6n$ 个点的色集合彼此互异，故上述 I-全染色是点可区别的. 所以 $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(nC_3\vee nC_3)=3n+4$.

**情形 2** $1\leqslant m<n$.

图 $mC_3\vee nC_3$ 有 $3m$ 个度为 $3n+2$，有 $3n$ 个度为 $3m+2$ 的点. 先计算 $\zeta(mC_3\vee nC_3)=\min\Big\{l\,\Big|\,\binom{l}{3n+2}+\binom{l}{3n+3}\geqslant 3m,\binom{l}{3m+2}+\binom{l}{3m+3}\geqslant 3n\Big\}=3n+3$. 由引理 1 可知 $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(mC_3\vee nC_3)\geqslant 3n+3$. 现在只需证明 $mC_3\vee nC_3$ 存在一个 $(3n+3)$-VDIT 染色 $f$. 设染色所需用的色为 $1,2,\cdots,3n+3$.

**步骤 1** 给连 $u_i$ 与 $v_j$ 的边进行染色. 令

$f(u_iv_j)=(i+j-1)_{3n+3}\in\{1,2,\cdots,3n+3\}$；$1\leqslant i\leqslant 3m,1\leqslant j\leqslant 3n$

**步骤 2** 给 3 圈的边进行染色. 边 $u_iu_{i+1}$、$u_{i+1}u_{i+2}$、$u_iu_{i+2}$ 分别染以颜色 $(i-2)_{3n+3}$、$(i)_{3n+3}$、$(i-1)_{3n+3}$，这里 $i\equiv 1(\bmod 3)$，$i\in\{1,2,\cdots,3m\}$；边 $v_jv_{j+1}$、$v_{j+1}v_{j+2}$、$v_jv_{j+2}$ 分别染以颜色 $(j-2)_{3n+3}$、$(j)_{3n+3}$、$(j-1)_{3n+3}$，这里 $j\equiv 1(\bmod 3)$，$j\in\{1,2,\cdots,3n\}$.

**步骤 3** 给点染色. 点 $u_i$、$u_{i+1}$、$u_{i+2}$ 分别染以颜色 $3n+2$、$3n+1$、$3n+3$，这里 $i\equiv 1(\bmod 3)$，$i\in\{1,2,\cdots,3m\}$. 点 $v_j$ 染以颜色 $j$，这里 $j\in\{1,2,$

$\cdots,3n\}$.

上述染色是Ⅰ-全染色，并且在此染色下有

$\overline{C(u_i)}=\{(i-3)_{3n+3}\},i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$；

$\overline{C(u_i)}=\{(i-2)_{3n+3}\},i\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$；

$\overline{C(u_i)}=\{(i-1)_{3n+3}\},i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$

其中 $i=1,2,\cdots,3m$.

$C(v_j)=\{j,j+1,j+2,j+3,\cdots,(j+3m-1)_{3n+3},(j-2)_{3n+3},(j-3)_{3n+3}\},j\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$；

$C(v_j)=\{j,j+1,j+2,j+3,\cdots,(j+3m-1)_{3n+3},(j-2)_{3n+3},(j-1)_{3n+3}\},j\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$；

$C(v_j)=\{j,j+1,j+2,j+3,\cdots,(j+3m-1)_{3n+3},(j-1)_{3n+3},(j-3)_{3n+3}\},j\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$

其中 $j=1,2,\cdots,3n$. 可见 $3m+3n$ 个点的色集合彼此互异，故上述Ⅰ-全染色是点可区别的. 所以 $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(mC_3 \vee nC_3)=3n+3$.

(ii) 由引理 1 可知，$\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{VI}}(mC_3 \vee nC_3)=\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(mC_3 \vee nC_3)$.

**定理 2**　设 $1\leqslant m\leqslant n$，则

(i)

$$\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(mC_4 \vee nC_4)=\begin{cases}4n+4; & 1\leqslant m=n\\ 4n+3; & 1\leqslant m<n\end{cases}$$

(ii) $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{VI}}(mC_4 \vee nC_4)=\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(mC_4 \vee nC_4)$.

**证明**　(i) 令 $V(mC_4 \vee nC_4)=\{u_1,u_2,\cdots,u_{4m},v_1,v_2,\cdots,v_{4n}\}$，$E(mC_4 \vee nC_4)=\{u_iu_{i+1}\mid i\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{u_iu_{i-3}\mid i\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{v_jv_{j+1}\mid j\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{v_jv_{j-3}\mid j\equiv 0(\mathrm{mod}\ 4)\}\cup\{u_iv_j\mid i=1,2,\cdots,4m;j=1,2,\cdots,4n\}$.

**情形 1**　$1\leqslant m=n$.

当 $m=n=1$ 时，图 $C_4 \vee C_4$，由命题 2 可知，$\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(C_4 \vee C_4)=8$.

当 $2\leqslant m=n$ 时，图 $nC_4 \vee nC_4$ 有 $8n$ 个度为 $4n+2$ 的点. 先计算 $\zeta(nC_4 \vee nC_4)=\min\left\{l \,\middle|\, \binom{l}{4n+2}+\binom{l}{4n+3}\geqslant 8n\right\}=4n+4$. 由引理 1 可知 $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(nC_4 \vee nC_4)\geqslant 4n+4$. 现在只需证明 $nC_4 \vee nC_4$ 存在一个 $(4n+4)$-VDIT 染色 $f$. 设染色所需用的色为 $1,2,\cdots,4n+1,\alpha,\beta,\gamma$.

**步骤 1**　给连 $u_i$ 与 $v_j$ 的边进行染色. 令

$f(u_iv_j)=(i+j-1)_{4n+1}\in\{1,2,\cdots,4n+1\}$；

$1\leqslant i\leqslant 4n,1\leqslant j\leqslant 4n$

**步骤 2**　给 4 圈的边进行染色. 边 $u_iu_{i+1}$、$u_{i+1}u_{i+2}$、$u_{i+2}u_{i+3}$、$u_{i+3}u_i$ 分别染以颜色 $\beta$、$\gamma$、$\beta$、$\gamma$，边 $v_iv_{i+1}$、$v_{i+1}v_{i+2}$、$v_{i+2}v_{i+3}$、$v_{i+3}v_i$ 分别染以颜色 $\alpha$、$\gamma$、$\alpha$、$\gamma$，这里 $i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$，$i\in\{1,2,\cdots,4n\}$.

**步骤 3**　给点染色. 点 $u_i$、$u_{i+1}$ 分别染以颜色 $1$、$\beta$，点 $v_i$、$v_{i+1}$ 分别染以颜色 $\alpha$、$2$，这里 $i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$，$i\in\{1,2,\cdots,4n\}$.

上述染色是Ⅰ-全染色，并且在此染色下有

$\overline{C(u_i)}=\{(i-1)_{4n+1},\alpha\},i=1,2,\cdots,4n$；

$\overline{C(v_j)}=\{(j-1)_{4n+1},\beta\},j=1,2,\cdots,4n$

可见 $8n$ 个点的色集合彼此互异，故上述Ⅰ-全染色是点可区别的. 所以 $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(nC_4 \vee nC_4)=4n+4$.

**情形 2**　$1\leqslant m<n$.

图 $mC_4 \vee nC_4$ 有 $4m$ 个度为 $4n+2$，有 $4n$ 个度为 $4m+2$ 的点. 先计算 $\zeta(mC_4 \vee nC_4)=\min\left\{l \,\middle|\, \binom{l}{4n+2}+\binom{l}{4n+3}\geqslant 4m,\binom{l}{4m+2}+\binom{l}{4m+3}\geqslant 4n\right\}=4n+3$. 由引理 1 可知 $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(mC_4 \vee nC_4)\geqslant 4n+3$. 现在只需证明 $mC_4 \vee nC_4$ 存在一个 $(4n+3)$-VDIT 染色 $f$. 设染色所需用的色为 $1,2,\cdots,4n+1,\alpha,\beta$.

**步骤 1**　给连 $u_i$ 与 $v_j$ 的边进行染色. 令

$f(u_iv_j)=(i+j-1)_{4n+1}\in\{1,2,\cdots,4n+1\}$；

$1\leqslant i\leqslant 4m,1\leqslant j\leqslant 4n$

**步骤 2**　给 4 圈的边进行染色. 边 $u_iu_{i+1}$、$u_{i+1}u_{i+2}$、$u_{i+2}u_{i+3}$、$u_{i+3}u_i$ 分别染以颜色 $\alpha$、$\beta$、$\alpha$、$\beta$，这里 $i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$，$i\in\{1,2,\cdots,4m\}$；边 $v_jv_{j+1}$、$v_{j+1}v_{j+2}$、$v_{j+2}v_{j+3}$、$v_{j+3}v_j$ 分别染以颜色 $\alpha$、$\beta$、$\alpha$、$\beta$，这里 $j\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$，$j\in\{1,2,\cdots,4n\}$.

**步骤 3**　给点染色. 点 $u_i$、$u_{i+1}$ 分别染以颜色 $\alpha$、$\beta$，这里 $i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$，$i\in\{1,2,\cdots,4m\}$. 点 $v_j$ 染以颜色 $j$，这里 $j\in\{1,2,\cdots,4n\}$.

上述染色是Ⅰ-全染色，并且在此染色下有

$\overline{C(u_i)}=\{(i-1)_{4n+1}\}$，其中 $i\in\{1,2,\cdots,4m\}$. $C(v_j)=\{j,j+1,\cdots,(j+4m-1)_{4n+1}\}$，其中 $j\in\{1,2,\cdots,4n\}$. 可见 $4m+4n$ 个点的色集合彼此互异，故上述Ⅰ-全染色是点可区别的. 所以 $\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(mC_4 \vee nC_4)=4n+3$.

(ii) 由引理 1 可知，$\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{VI}}(mC_4 \vee nC_4)=\chi_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{I}}(mC_4 \vee nC_4)$.

## 3 结 语

从本文的主要结论及证明过程可以看出 $\chi_{vt}^{\mathrm{VI}}(mC_3 \vee nC_3)=\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(mC_3 \vee nC_3)=\zeta(mC_3 \vee nC_3)$及$\chi_{vt}^{\mathrm{VI}}(mC_4 \vee nC_4)=\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(mC_4 \vee nC_4)=\zeta(mC_4 \vee nC_4)$.

综上所述，可以得到 VDITC 猜想及 VDVITC猜想对本文所涉及的两类联图 $mC_i \vee nC_i$，$i=3,4$，其中 $1\leqslant m\leqslant n$ 是成立的.今后将对 $mC_i \vee nC_i$，$i\geqslant 5$ 的点可区别Ⅰ-全色数及点可区别Ⅵ-全色数作进一步探讨.

## 参考文献：


[1] HARARY F，PLANTHOLT M. The point-distinguishing chromatic index［M］// HARARY F，MAYBEE J S，Eds. **Graphs and Application**. New York：Wiley Interscience，1985：147-162.

[2] HORŇÁK M，SOTÁK R. The fifth jump of the point-distinguishing chromatic index of $K_{n,n}$［J］. **Ars Combinatoria**，1996，**42**：233-242.

[3] CHEN Xiang′en. Point-distinguishing chromatic index of the union of paths［J］. **Czechoslovak Mathematical Journal**，2014，**64**(3)：629-640.

[4] CHEN Xiang′en，LI Zepeng. Vertex-distinguishing Ⅰ-total colorings of graphs［J］. **Utilitas Mathematica**，2014，**95**：319-327.

[5] 苗婷婷，王治文，陈祥恩. 圈与路联图点可区别Ⅰ-全染色和点可区别Ⅵ-全染色［J］. 大连理工大学学报，2017，**57**(4)：430-435.
MIAO Tingting，WANG Zhiwen，CHEN Xiang′en. Vertex-distinguishing Ⅰ-total colorings and vertex-distinguishing Ⅵ-total colorings of join-graph of cycle and path［J］. **Journal of Dalian University of Technology**，2017，**57**(4)：430-435. (in Chinese)

[6] 陈祥恩，苗婷婷，王治文. 两条路的联图的点可区别Ⅰ-全染色［J］. 山东大学学报(理学版)，2017，**52**(4)：6-9.
CHEN Xiang′en，MIAO Tingting，WANG Zhiwen. Vertex-distinguishing Ⅰ-total colorings of the join of two paths［J］. **Journal of Shandong University (Natural Science)**，2017，**52**(4)：6-9. (in Chinese)


# Vertex-distinguishing Ⅰ-total coloring and Ⅵ-total coloring of $mC_3 \vee nC_3$ and $mC_4 \vee nC_4$


CHEN Xiang′en*，ZHANG Shenggui

( College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China )



**Abstract**：Let $G$ be a simple graph. Suppose $f$ is a general total coloring of graph $G$ (i. e. , an assignment of several colors to all vertices and edges of $G$ ), if any two adjacent vertices and any two adjacent edges of graph $G$ are assigned different colors，then $f$ is called an Ⅰ-total coloring of a graph $G$; if any two adjacent edges of $G$ are assigned different colors，then $f$ is called a Ⅵ-total coloring of a graph $G$. Let $C(x)$ denote the set of colors of vertex $x$ and of the edges incident with $x$ under $f$，the set is non multiple set. For an Ⅰ-total coloring (resp. , Ⅵ-total coloring) $f$ of a graph $G$，if $C(u)\neq C(v)$ for any two distinct vertices $u$ and $v$ of $V(G)$，then $f$ is called a vertex-distinguishing Ⅰ-total coloring (resp. , vertex-distinguishing Ⅵ-total coloring) of graph $G$，short for VDIT coloring (resp. , VDVIT coloring). Let $\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(G)=\min\{k\mid G$ has a $k$-VDIT coloring$\}$，then $\chi_{vt}^{\mathrm{I}}(G)$ is called the VDIT chromatic number of graph $G$. Let $\chi_{vt}^{\mathrm{VI}}(G)=\min\{k\mid G$ has a $k$-VDVIT coloring$\}$，then $\chi_{vt}^{\mathrm{VI}}(G)$ is called the VDVIT chromatic number of graph $G$. The VDIT coloring (resp. , VDVIT coloring) of $mC_3 \vee nC_3$ and $mC_4 \vee nC_4$ are determined and the VDIT chromatic number (resp. , VDVIT chromatic number) of them are determined by constructing concrete coloring.



**Key words**：join of graphs；Ⅰ-(Ⅵ-) total coloring；vertex-distinguishing Ⅰ-(Ⅵ-) total coloring；vertex-distinguishing Ⅰ-(Ⅵ-) total chromatic number