

文章编号: 1000-8608(2020)04-0427-10

图($p \leq 9$)的边幻和全标号

顾彦波, 李敬文*, 火金萍, 邵淑宏

(兰州交通大学电子与信息工程学院, 甘肃兰州 730070)

摘要: 图的边幻和全标号是指图中任意边及其两个顶点的标号和为常数, 且标号取值一一对应于从1至点边之和的自然数集合。设计了一种递归算法, 采用了与目标函数相结合的算法优化策略, 实现了对9个点内所有简单连通图的边幻和性判定。结果表明, 当 $p \leq 9$ 时, 所有的树图、单圈图和双圈图都是边幻和全标号图; 当点边数值满足一定条件时, 发现若干图类是边幻和全标号图或非边幻和全标号图, 结合已有结果, 猜测当点数超过9时, 相关结论也成立。其中, 已经证明点数不超过12时的猜测成立。

关键词: 递归算法; 边幻和全标号; 非边幻和全标号; 边幻和全标号解空间

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb202004012

0 引言

图论广泛应用于计算机科学、复杂网络及化学等领域, 而图的标号问题是图论中的热门研究之一。1970年Anton等首次提出了图的边幻和全标号概念, 并研究了一些特殊图的边幻和全标号^[1]。目前, 国内外学者对于边幻和全标号的研究只是针对于一些特殊图, 如树图、圈图及其相关图、并图和一些非连通图^[2-5]。1970年Anton等提出了猜想: 所有的树图都有边幻和全标号^[1]; 1998年Enomoto等进一步提出: 所有的树图都有超级边幻和全标号^[6]; Fukuchi证明了当 $n \pmod{4} \not\equiv 3$ 时, W_n 均具有边幻和全标号^[7]; 文献[1]证明了所有的圈图 C_n 均为边幻和全标号图; Wallis等在文献[8]中证明了所有的皇冠图 $C_n \odot K_1$ 均是边幻和全标号图; Lin等证明了扇图具有边幻和全标号^[9]; Craft等证明了当 r 为奇数且图 $G(p, q)$ 的点数 $p \equiv 4 \pmod{8}$ 时, r -正则图为非边幻和全标号图^[10]; 当 $n \geq 7$ 时, 完全图 K_n 为非边幻和全标号图^[10]。

文献[11]总结了目前所有图标号的研究现状, 其中的结论大多数是针对特殊图的。本文主要

研究利用标号算法, 得到9个点以内的所有图的标号结果, 通过结果分析, 总结出若干定理, 并猜测当点数超过9时, 相关结论也成立。

1 基本概念

本文所涉及的图均为无向、简单连通图, 具有 p 个顶点 q 条边的图记为 $G(p, q)$, 当 $q = p - 1$ 时, 称为树图; 当 $q = p$ 时, 称为单圈图; 当 $q = p + 1$ 时, 称为双圈图。

定义 1^[1] 图 $G(p, q)$ 存在双射 $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow [1, p+q]$, 使对 G 的任意一条边 uv , 总有 $f(u) + f(v) + f(uv) = k$, 则称 f 为图 G 的一个边幻和全标号(edge-magic total labeling, 简称EMTL), k 为幻和常数。若 $f(V(G)) \rightarrow [1, p]$, 则称为图 G 的一个超级边幻和全标号(super edge-magic total labeling, 简称SEMTL)。

猜想 1^[6] 每一棵树有一个EMTL。

猜想 2^[7] 每一棵树有一个SEMTL。

2 EMTL 算法

根据定义1, 设 $f(u) + f(v) + f(uv) = k$, 将所有的边相加, 得到

收稿日期: 2019-12-05; 修回日期: 2020-03-20。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11461038)。

作者简介: 顾彦波(1994-), 男, 硕士生, E-mail: gsgtgyb@163.com; 李敬文*(1965-), 男, 教授, 硕士生导师, E-mail: lijingwen28@163.com。

$$\sum_{j=1}^{p+q} j + \sum_{i=1}^p (\deg(v_i) - 1)f(v_i) = qk \quad (1)$$

其中 $f(v_i)$ 表示顶点 v_i 的标号, $\deg(v_i)$ 表示顶点 v_i 的度, 记 $Coe(v_i) = \deg(v_i) - 1$, 令常数 $C = \sum_{j=1}^{p+q} j - \frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$, 则得到

$$qk = C + \sum_{i=1}^p Coe(v_i) f(v_i) \quad (2)$$

使用式(2)无法构建解空间, 本文将所有边的标号系数设为 0, 并进行累加, 故得到了

$$k = \left(C + \sum_{i=1}^p Coe(v_i) f(v_i) + \sum_{j=1}^q 0 * f(e_j) \right) / q \quad (3)$$

这里 $f(e_j)$ 表示边标号.

算法思想:

(1) 计算图 G 的度序列、常数 C 和系数 $Coe(v_i)$.

(2) 初始化 $f(v_i)$, 即给点按度从大到小分配标号.

(3) 根据式(3), 如存在正整数 k 使等式成立, 则进入分配函数 *Labeling*, 若不成立, 则对 $Coe(v_i)$ 与边系数 0 组成的序列 Coe 做一次全排列.

(4) 若分配函数 *Labeling* 分配成功, 则表示该图存在 EMTL, 算法结束; 若分配失败, 则继续对 Coe 做一次全排列.

(5) 直到分配成功或者所有的全排列做完, 则算法结束. 若全排列做完后该图还未标号成功, 则表示该图为 NEMTL 图.

EMTL 算法:

```

输入: 图  $G(p,q)$  邻接矩阵
输出: 图  $G(p,q)$  标号矩阵
1 for i:1→p+q
2     Num[i]=i;
3 End for
4 Calculate Coe(); //计算 Coe(v_i)
5 isContinue=true;
6 while isContinue
7     Sum=Calculate Sum(Coe, f(v_i));
8     If((Sum+C)%q==0)
9         if(Allocation(0,0,matrix,Coe,f(v_i)))
10            isSuccess=true;
11            isContinue=false;
12        End if

```

```

13    End if
14    permutation(Coe);
15 End while

```

Allocation(0,0,matrix,Coe,f(v_i)) 函数用来分配点、边的标号.

利用递归算法来分配标号, 需遵守以下原则:

(1) 递归出口为当前函数层数 n 超过了矩阵的行数, 则分配成功, 返回 true.

(2) 当给当前层的顶点分配元素时, 若该元素已被分配, 则 start++.

(3) 当给当前层的顶点分配元素时, 若该元素与之前分配过的元素存在边, 则计算该条边的标号, 若边标号存在于边集合中, 则删除当前元素, 若不存在, 则 start++.

(4) 若当前层的元素取值 start 超过当前层元素的个数, 则退回上一层.

(5) 如第一层的元素取值超过第一层元素个数, 则退出, 分配失败, 返回 false.

Allocation(0,0,matrix) 函数描述:

输入: 层数 n , 初始位置 start, 当前层的矩阵 matrix;
输出: 如果存在则输出 EMTL, 否则输出 NEMTL.

```

1 If(n>=L_Matrix>Getlength(0))
2     LabelMatrix=L_Matrix;
3     return true;
4 End if
5 isContinue=true;
6 While isContinue
7     conflict = false;
8     if (start 大于当前行所填元素个数)
9         isSuccess=false;
10    End if
11    if (当前元素填入矩阵产生冲突)
12        start++;
13    else
14        Allocation (n+1,0,T_Matrix);
15    End if
16 End while

```

引理 1 EMTL 算法搜索图 $G(p,q)$ 的 EMTL 解空间, 如果有解, 则图 $G(p,q)$ 为 EMTL 图, 否则为非边幻和全标号图(简称 NEMTL 图).

例 1 表 1、2 为图集 $G(6,10)$ 的系数变换过程; 图 1 为矩阵分配过程; 图 2 为 $G(6,10)$ 的原图和标号图.

根据式(3)可得图1的初始系数如表1所示.

表1 初始系数
Tab. 1 Initial coefficients

系数	未知数	系数	未知数
4	1	0	9
3	2	0	10
2	3	0	11
2	4	0	12
2	5	0	13
1	6	0	14
0	7	0	15
0	8	0	16

表2 最终系数
Tab. 2 Final coefficients

系数	未知数	系数	未知数
4	1	0	9
3	2	0	10
2	3	2	11
2	4	0	12
0	5	0	13
0	6	0	14
0	7	0	15
1	8	0	16

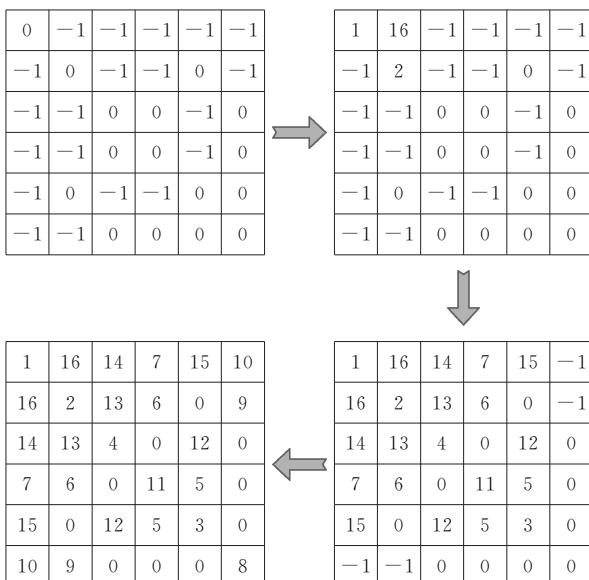
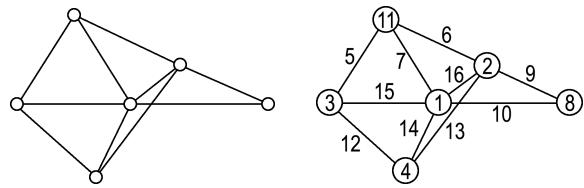


图1 矩阵分配过程

Fig. 1 Allocation process of matrix

当系数变换为表2时,存在正整数 $k=19$,使得式(3)成立.



(a) $G(6,10)$ 原图 (b) $G(6,10)$ 标号图

图2 原图和标号图

Fig. 2 The original and labeling graphs

将系数分类之后得到5度点标号为1,4度点标号为2,3度点标号为3、4、11,2度点标号为8,将其填入邻接矩阵,若存在冲突,则该系数不适合该邻接矩阵,重新寻找下一组满足式(3)的系数组合,如不存在冲突,则该图标号成功,该图成功结果如图2所示.

3 定理、猜测和证明

文中所有图集是根据文献[12]提供的算法,生成9个点内的所有非同构图,用邻接矩阵存储.

实验运行环境及硬件配置为

处理器:Intel(R) Core(TM) i7-7700 CPU @ 3.60 GHz; RAM: 64.0 GB; 开发环境: Visual Studio 2017; 开发语言:C#; 绘图工具: Microsoft Visual; Wolfram Mathematica 11; 操作系统: Windows 7,64位.

定理1 对于树图 $G(p,q)$, 当 $2 \leq p \leq 9$ 时, 图 G 均为 SEMTL 图.

证明

(1)对于树图 $G(p,q)$, 当 $2 \leq p \leq 9$ 时, 根据式(2)判断每个图理论上是否存在无解.

(2)利用EMTL算法,得到结果见表3.

表3 树图的EMTL结果($2 \leq p \leq 9$)

Tab. 3 The EMTL result of tree graphs when $2 \leq p \leq 9$

(p,q) 图	图总数	SEMTL图个数	总耗时/ms	平均耗时/ms
(2,1)	1	1	2	2.00
(3,2)	1	1	6	6.00
(4,3)	2	2	3	3.00
(5,4)	3	3	230	7.67
(6,5)	6	6	270	4.50
(7,6)	11	11	260	2.36
(8,7)	23	23	410	1.78
(9,8)	47	47	800	1.70

(3)从表 3 可以看出, 阶数小于等于 9 的树图均为 EMTL 图, 且是 SEMTL 图.

(4)图 3 为图 $G(9,8)$ 的两个成功标号示例.

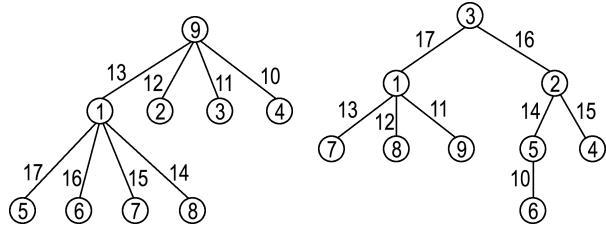


图 3 树图的 SEMTL 图示例

Fig. 3 The examples of SEMTL graphs for tree graphs

定理 2 对于单圈图 $G(p,q)$, 当 $3 \leq p \leq 9$ 时均有 EMTL 图.

证明 (1)对于单圈图 $G(p,q)$, 当 $3 \leq p \leq 9$ 时, 根据式(2)判断每个图理论上是否存在无解.

(2)利用 EMTL 算法, 得到结果见表 4.

表 4 单圈图的 EMTL 数目 ($3 \leq p \leq 9$)

Tab. 4 The amount of EMTL for unicyclic graphs
when $3 \leq p \leq 9$

(p,q) 图	图总数	SEMTL 图个数	EMTL 图个数
(3,3)	1	1	1
(4,4)	2	1	2
(5,5)	5	3	5
(6,6)	13	8	13
(7,7)	33	18	33
(8,8)	89	75	89
(9,9)	240	217	240

(3)从表 4 可以看出, 阶数小于等于 9 的单圈图均有 EMTL 图.

(4)图 4 为图 $G(9,9)$ 的两个成功标号示例.

定理 3 对于双圈图 $G(p,q)$, 当 $4 \leq p \leq 9$ 时均有 EMTL 图.

证明

(1)对于双圈图 $G(p,q)$, 当 $4 \leq p \leq 9$ 时, 根据式(2)判断每个图理论上是否存在无解.

(2)利用 EMTL 算法, 得到结果见表 5.

(3)从表 5 可以看出阶数小于等于 9 的双圈图均有 EMTL 图.

(4)图 5 为图 $G(9,10)$ 的两个成功标号示例.

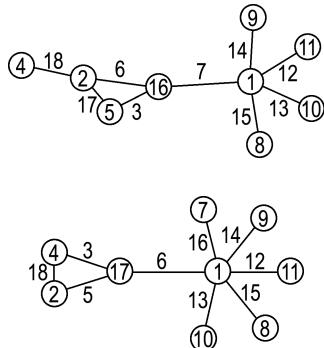


表 6 图 $G(p, p+2)$ 的 EMTL 结果 ($5 \leq p \leq 9$)

Tab. 6 The EMTL result of $G(p, p+2)$ when
 $5 \leq p \leq 9$

$(p, p+2)$ 图	图总数	SEMTL 图 个数	EMTL 图 个数	NEMTL 图 个数
(5,7)	4	4	4	0
(6,8)	22	14	20	2
(7,9)	107	86	107	0
(8,10)	486	442	474	12
(9,11)	2 075	2 056	2 075	0

(3) 从表 6 可以看出图 $G(p, q)$, 当 $5 \leq p \leq 9$, $q = p + 2$ 时, 如果 $p \equiv 1 \pmod{2}$, 该类图均为 EMTL 图, 如果 $p \equiv 0 \pmod{2}$, 则该类图存在 NEMTL 图.

(4) 图 6 为图 $G(7,9)$ 和图 $G(9,11)$ 成功标号示例, 图 7 为图 $G(6,8)$ 和图 $G(8,10)$ 所有的 NEMTL 图.

猜测 1 对于图 $G(p, q)$, 当 $p \geq 10, q = p + 2$

时, 如果 $p \equiv 1 \pmod{2}$, 该类图均为 EMTL 图, 如果 $p \equiv 0 \pmod{2}$, 则该类图存在 NEMTL 图.

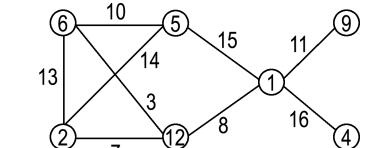
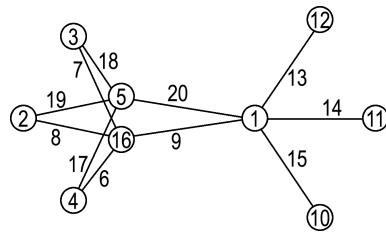
(a) $G(7,9)$ (b) $G(9,11)$ 图 6 图 $G(7,9)$ 和图 $G(9,11)$ EMTL 图示例

Fig. 6 The examples of EMTL graph for $G(7,9)$ and $G(9,11)$

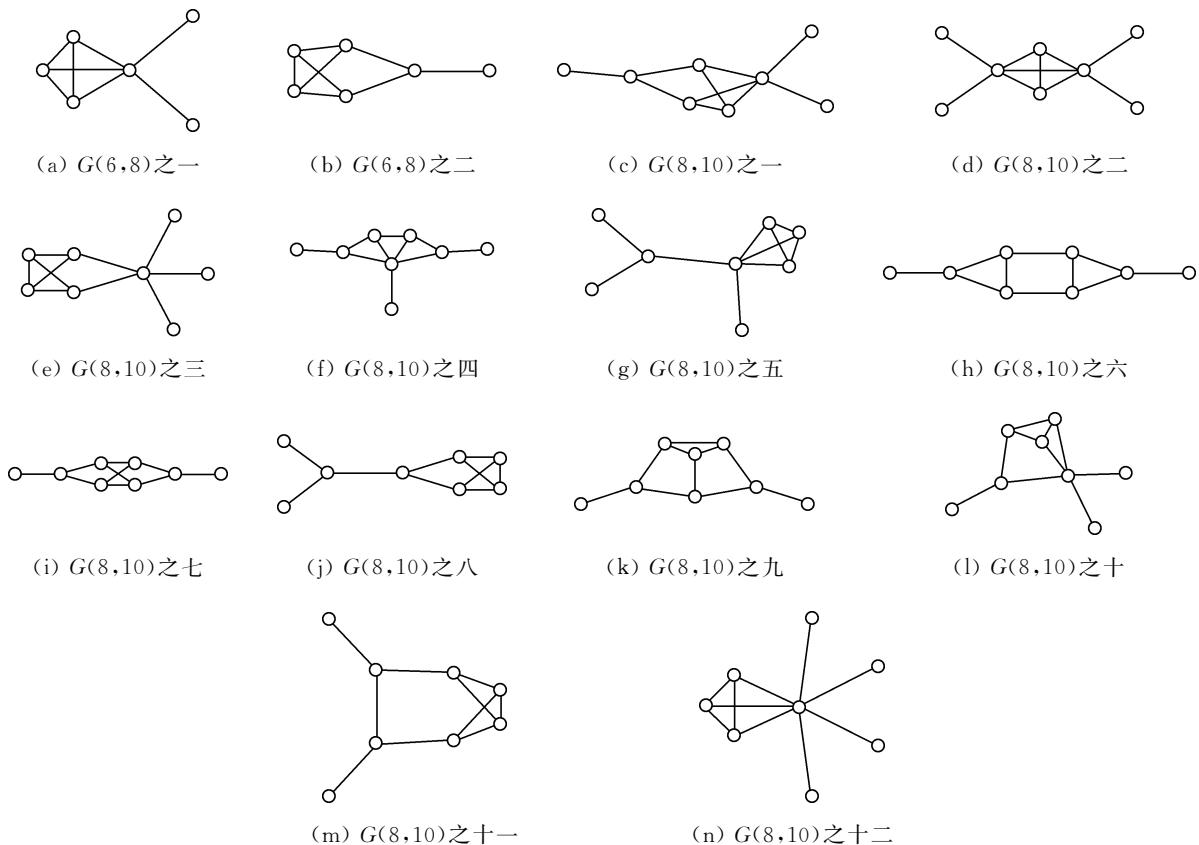
图 7 图 $G(6,8)$ 和图 $G(8,10)$ 中所有 NEMTL 图

Fig. 7 All NEMTL graphs for $G(6,8)$ and $G(8,10)$

当点数小于等于 11 时, 猜测 1 所表示的图集结果如表 7 所示.

表 7 图 $G(p, p+2)$ 的 EMTL 结果 ($10 \leq p \leq 11$)

Tab. 7 The EMTL result of $G(p, p+2)$ when $10 \leq p \leq 11$

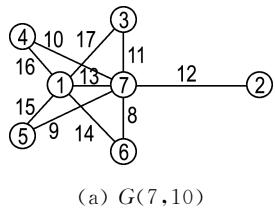
$(p, p+2)$ 图	图总数	SEMTL 图 个数	EMTL 图 个数	NEMTL 图 个数
(10,12)	8 548	8 477	8 489	59
(11,13)	33 851	33 841	33 851	0

从表 7 的结果图集中可以看出, 当 $10 \leq p \leq 11$ 时符合猜测 1.

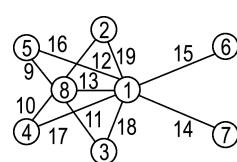
定理 5 对于图 $G(p, q)$, 当 $5 \leq p \leq 9, q = p+3$ 时均有 EMTL 图.

证明

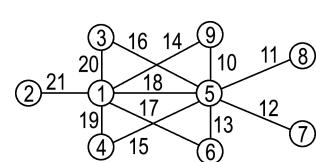
(1) 对于图 $G(p, q)$, 当 $5 \leq p \leq 9, q = p+3$



(a) $G(7,10)$



(b) $G(8,11)$



(c) $G(9,12)$

图 8 图 $G(p, p+3)$ 的 EMTL 成功标号示例

Fig. 8 The successful examples of EMTL for $G(p, p+3)$

猜测 2 对于图 $G(p, q)$, 当 $p \geq 10, q = p+3$ 时均有 EMTL 图.

当点数小于等于 11 时, 猜测 2 所表示的图集结果如表 9 所示.

表 9 图 $G(p, p+3)$ 的 EMTL 结果 ($10 \leq p \leq 11$)

Tab. 9 The EMTL result of $G(p, p+3)$ when $10 \leq p \leq 11$

$(p, p+3)$ 图	图总数	SEMTL 图 个数	EMTL 图 个数	NEMTL 图 个数
(10,13)	22 950	22 905	22 950	0
(11,14)	109 844	109 699	109 844	0

从表 9 的结果图集中可以看出, 当 $10 \leq p \leq 11$ 时符合猜测 2.

定理 6 对于图 $G(p, q)$, 当 $5 \leq p \leq 9, q = p+4$ 时, 除图 9 外均为 EMTL 图.

时, 根据式(2)判断每个图理论上是否存在无解.

(2) 利用 EMTL 算法, 得到结果见表 8.

表 8 图 $G(p, p+3)$ 的 EMTL 结果 ($5 \leq p \leq 9$)

Tab. 8 The EMTL result of $G(p, p+3)$ when $5 \leq p \leq 9$

$(p, p+3)$ 图	图总数	SEMTL 图 个数	EMTL 图 个数	NEMTL 图 个数
(5,8)	2	0	2	0
(6,9)	20	12	20	0
(7,10)	132	109	132	0
(8,11)	814	756	814	0
(9,12)	4 495	4 414	4 495	0

(3) 从表 8 可以看出图 $G(p, q)$, 当 $5 \leq p \leq 9, q = p+3$ 时均有 EMTL 图.

(4) 图 8 为图 $G(7,10)、G(8,11)、G(9,12)$ 成功标号示例.

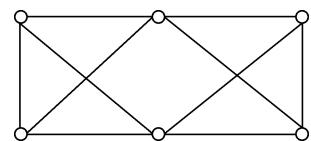


图 9 NEMTL 图

Fig. 9 NEMTL graph

证明

(1) 对于图 $G(p, q)$, 当 $5 \leq p \leq 9, q = p+4$ 时, 根据式(2)判断每个图理论上是否存在无解.

(2) 利用 EMTL 算法, 得到结果表 10.

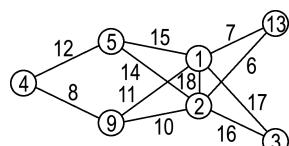
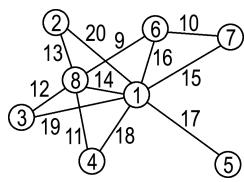
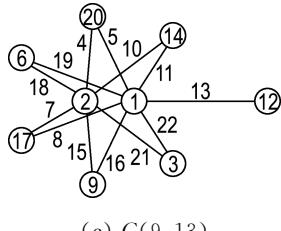
(3) 从表 10 可以看出图 $G(p, q)$, 当 $5 \leq p \leq 9, q = p+4$ 时, 除图 9 外均为 EMTL 图.

(4) 图 10 为图 $G(7,11)、G(8,12)、G(9,13)$ 成功标号示例.

猜测 3 对于图 $G(p, q)$, 当 $p \geq 10, q = p+4$ 时, 均为 EMTL 图.

表 10 图 $G(p, p+4)$ 的 EMTL 结果 ($5 \leq p \leq 9$)Tab. 10 The EMTL result of $G(p, p+4)$ when $5 \leq p \leq 9$

$(p, p+4)$ 图	图总数	SEMTL 图 个数	EMTL 图 个数	NEMTL 图 个数
(5,9)	1	0	1	0
(6,10)	14	0	13	1
(7,11)	138	80	138	0
(8,12)	1 169	986	1 169	0
(9,13)	8 404	8 182	8 404	0

(a) $G(7,11)$ (b) $G(8,12)$ (c) $G(9,13)$ 图 10 图 $G(p, p+4)$ 的 EMTL 成功标号示例Fig. 10 The successful examples of EMTL for $G(p, p+4)$

当点数小于等于 11 时, 猜测 3 所表示的图集

结果如表 11 所示.

表 11 图 $G(p, p+4)$ 的 EMTL 结果 ($10 \leq p \leq 11$)Tab. 11 The EMTL result of $G(p, p+4)$ when $10 \leq p \leq 11$

$(p, p+4)$ 图	图总数	SEMTL 图 个数	EMTL 图 个数	NEMTL 图 个数
(10,14)	53 863	53 444	53 863	0
(11,15)	313 670	313 550	313 670	0

从表 11 的结果图集中可以看出, 当 $10 \leq p \leq 11$ 时符合猜测 3.

定理 7 对于图 $G(p, q)$, 当 $5 \leq p \leq 9, q = p+5$ 时均有 EMTL 图.

证明

(1)对于图 $G(p, q)$, 当 $5 \leq p \leq 9, q = p+5$ 时, 根据式(2)判断每个图理论上是否存在无解.

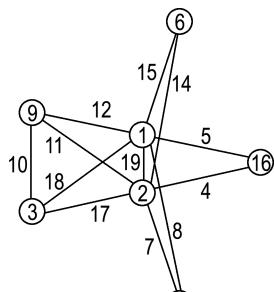
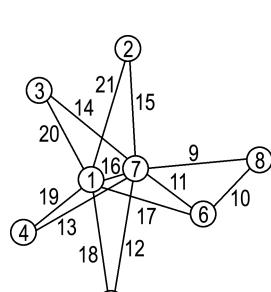
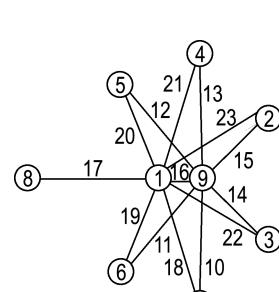
(2)利用 EMTL 算法, 得到结果见表 12.

表 12 图 $G(p, p+5)$ 的 EMTL 结果 ($5 \leq p \leq 9$)Tab. 12 The EMTL result of $G(p, p+5)$ when $5 \leq p \leq 9$

$(p, p+5)$ 图	图总数	SEMTL 图 个数	EMTL 图 个数	NEMTL 图 个数
(5,10)	1	0	1	0
(6,11)	9	0	9	0
(7,12)	126	0	126	0
(8,13)	1 454	757	1 454	0
(9,14)	13 855	12 460	13 855	0

(3)从表 12 可以看出图 $G(p, q)$, 当 $5 \leq p \leq 9, q = p+5$ 时均有 EMTL 图.

(4)图 11 为图 $G(7,12)、G(8,13)、G(9,14)$ 成功标号示例.

(a) $G(7,12)$ (b) $G(8,13)$ (c) $G(9,14)$ 图 11 图 $G(p, p+5)$ 的 EMTL 成功标号示例Fig. 11 The successful examples of EMTL for $G(p, p+5)$

猜测 4 对于图 $G(p, q)$, 当 $p \geq 10, q = p + 5$ 时均有 EMTL 图.

定理 8 对于图 $G(p, q)$, 当 $6 \leq p \leq 9, q = p + 6$ 时, 如果 $p \equiv 1 \pmod{2}$, 该类图中不存在 NEMTL 图, 如果 $p \equiv 0 \pmod{2}$, 则该类图存在 NEMTL 图.

证明

(1)对于图 $G(p, q)$, 当 $6 \leq p \leq 9, q = p + 6$ 时, 根据式(2)判断每个图理论上是否存在无解.

(2)利用 EMTL 算法, 得到结果见表 13.

表 13 图 $G(p, p+6)$ 的 EMTL 结果 ($6 \leq p \leq 9$)
Tab. 13 The EMTL result of $G(p, p+6)$ when $6 \leq p \leq 9$

$(p, p+6)$ 图	图总数	SEMTL 图 个数	EMTL 图 个数	NEMTL 图 个数
(6,12)	5	0	3	2
(7,13)	95	0	95	0
(8,14)	1 579	0	1 550	29
(9,15)	20 303	10 547	20 303	0

(3)从表 13 可以看出图 $G(p, q)$, 当 $6 \leq p \leq 9, q = p + 6$ 时, 如果 $p \equiv 1 \pmod{2}$, 该类图中不存在 NEMTL 图, 如果 $p \equiv 0 \pmod{2}$, 则该类图存在 NEMTL 图.

(4)图 12 为图 $G(p, p+6)$ 成功标号示例.

猜测 5 对于图 $G(p, q)$, 当 $p \geq 10, q = p + 6$ 时, 如果 $p \equiv 1 \pmod{2}$, 该类图中不存在 NEMTL 图, 如果 $p \equiv 0 \pmod{2}$, 则该类图存在 NEMTL 图.

定理 9 对于图 $G(p, q)$, 当 $6 \leq p \leq 9, q = p + 7$ 时, 均为 EMTL 图, 且不存在 SEMTL 图.

证明

(1)对于图 $G(p, q)$, 当 $6 \leq p \leq 9, q = p + 7$ 时, 根据式(2)判断每个图理论上是否存在无解.

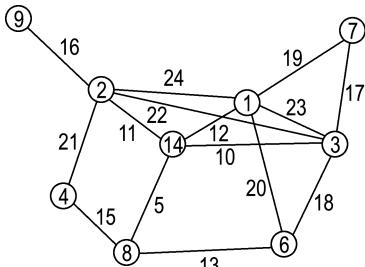
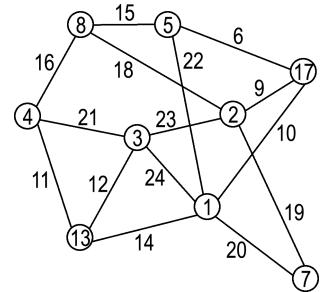


图 12 图 $G(p, p+6)$ 的 EMTL 成功标号示例

Fig. 12 The successful examples of EMTL for $G(p, p+6)$

(2)利用 EMTL 算法, 得到结果见表 14.

表 14 图 $G(p, p+7)$ 的 EMTL 结果 ($6 \leq p \leq 9$)

Tab. 14 The EMTL result of $G(p, p+7)$ when $6 \leq p \leq 9$

$(p, p+7)$ 图	图总数	SEMTL 图 个数	EMTL 图 个数	NEMTL 图 个数
(6,13)	2	0	2	0
(7,14)	64	0	64	0
(8,15)	1 515	0	1 515	0
(9,16)	26 631	0	26 631	0

(3)从表 14 可以看出图 $G(p, q)$, 当 $6 \leq p \leq 9, q = p + 7$ 时均为 EMTL 图, 且不存在 SEMTL 图.

(4)图 13 为图 $G(7,14)$ 、 $G(8,15)$ 、 $G(9,16)$ 成功标号示例.

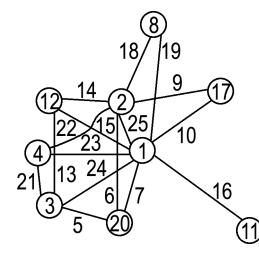
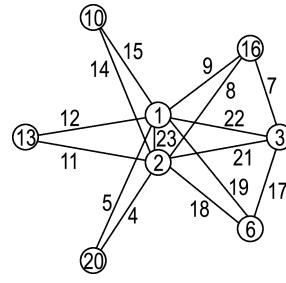
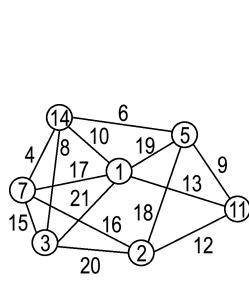


图 13 图 $G(p, p+7)$ 的 EMTL 成功标号示例

Fig. 13 The successful examples of EMTL for $G(p, p+7)$

猜测 6 对于图 $G(p, q)$, 当 $p \geq 10, q = p + 7$ 时, 均为 EMTL 图, 且不存在 SEMTL 图.

定理 10 对于图 $G(p, q)$, 当 $6 \leq p \leq 9, q = p + 8$ 时, 如果 $p \equiv 0 \pmod{2}$, 该类图均为 EMTL 图, 如果 $p \equiv 1 \pmod{2}$, 则该类图存在 NEMTL 图.

证明

(1) 对于图 $G(p, q)$, 当 $6 \leq p \leq 9, q = p + 8$ 时, 根据式(2)判断每个图理论上是否存在无解.

(2) 利用 EMTL 算法, 得到结果见表 15.

(3) 从表 15 可以看出图 $G(p, q)$, 当 $6 \leq p \leq 9, q = p + 8$ 时, 如果 $p \equiv 0 \pmod{2}$, 该类图均为 EMTL 图, 如果 $p \equiv 1 \pmod{2}$, 则该类图存在

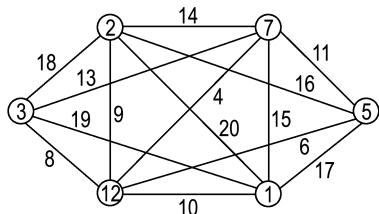
NEMTL 图, 且只有一个非边幻和全标号图.

(4) 图 14 为图 $G(6, 14)、G(7, 15)、G(8, 16)、G(9, 17)$ 成功标号的边幻和全标号图及图 $G(7, 15)、G(9, 17)$ 图集中的非边幻和全标号图.

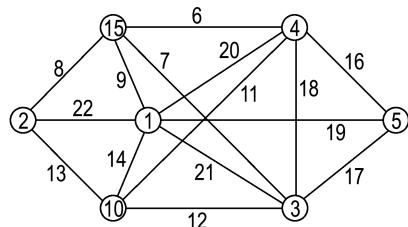
表 15 图 $G(p, p+8)$ 的 EMTL 结果 ($6 \leq p \leq 9$)

Tab. 15 The EMTL result of $G(p, p+8)$ when $6 \leq p \leq 9$

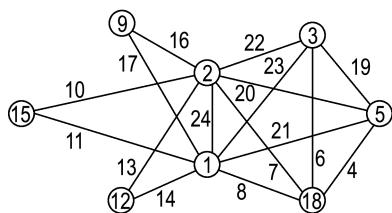
$(p, p+8)$ 图	图总数	SEMTL 图 个数	EMTL 图 个数	NEMTL 图 个数
(6,14)	1	0	1	0
(7,15)	40	0	39	1
(8,16)	1 290	0	1 290	0
(9,17)	31 400	0	31 399	1



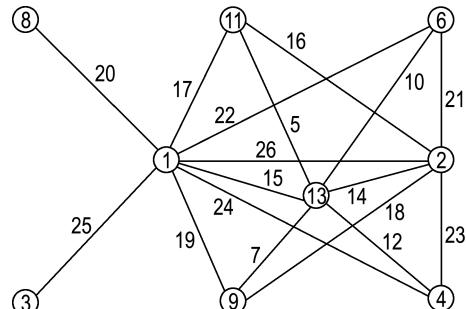
(a) $G(6, 14)$ 边幻和全标号图



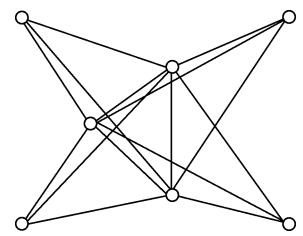
(b) $G(7, 15)$ 边幻和全标号图



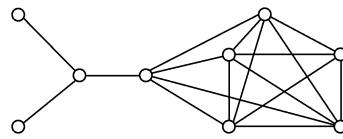
(c) $G(8, 16)$ 边幻和全标号图



(d) $G(9, 17)$ 边幻和全标号图



(e) $G(7, 15)$ 非边幻和全标号图



(f) $G(9, 17)$ 非边幻和全标号图

图 14 图 $G(p, p+8)$ 的 EMTL 和 NEMTL 成功标号示例

Fig. 14 The successful examples of EMTL and NEMTL for $G(p, p+8)$

猜测 7 对于图 $G(p, q)$, 当 $p \geq 10, q = p + 8$ 时, 如果 $p \equiv 0 \pmod{2}$, 该类图均为 EMTL 图, 如果 $p \equiv 1 \pmod{2}$, 则该类图存在 NEMTL 图.

4 结语

本文设计了一种 EMTL 算法, 引入目标函数

进行优化并采用递归的方式进行标号分配。使用该算法对 9 个点以内的所有简单连通图进行计算并得到所有图的 EMTL 或 NEMTL 结果, 通过分析发现, 当图 $G(p, q)$ 满足一定条件时, 该类图有 EMTL 或 NEMTL 图, 给出了 10 个定理, 并给出相关猜测。由于图集较大, 故验证了部分图集, 结果证明部分猜测当 $10 \leq p \leq 11$ 时也是成立的。

参考文献:

- [1] ANTON K, ALEXANDER R. Magic valuations of finite graphs [J]. *Canadian Mathematical Bulletin*, 1970, **13**(4): 451-461.
- [2] FIGUEROA-CENTENO R M, ICHISHIMA R, MUNTANER-BATLE F A. The place of super edge-magic labelings among other classes of labelings [J]. *Discrete Mathematics*, 2001, **231**(1/2/3): 153-168.
- [3] FIGUEROA-CENTENO R M, ICHISHIMA R, MUNTANER-BATLE F A. On edge-magic labelings of certain disjoint unions of graphs [J]. *Australasian Journal of Combinatorics*, 2005, **32**: 225-242.
- [4] FIGUEROA-CENTENO R M, ICHISHIMA R, MUNTANER-BATLE F A, et al. A magical approach to some labeling conjectures [J]. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2011, **31**(1): 79-113.
- [5] MCQUILLAN D, MCQUILLAN J M. Magic labelings of triangles [J]. *Discrete Mathematics*, 2009, **309**(9): 2755-2762.
- [6] ENOMOTO H, LLADÓ A S, NAKAMIGAWA T, et al. Super edge-magic graphs [J]. *SUT Journal of Mathematics*, 1998, **34**(2): 105-109.
- [7] FUKUCHI Y. Edge-magic labelings of wheel graphs [J]. *Tokyo Journal of Mathematics*, 2001, **24**(1): 153-167.
- [8] WALLIS W D, BASKORO E T, MILLER M, et al. Edge-magic total labelings [J]. *Australasian Journal of Combinatorics*, 2000, **22**: 177-190.
- [9] LIN Y, MILLER M, SIMANJUNAK R. Edge-magic total labelings of wheels, fans and friendship graphs [J]. *Bulletin of the ICA*, 2002, **35**: 89-98.
- [10] CRAFT D, TESARE H. On a question by Erdős about edge-magic graphs [J]. *Discrete Mathematics*, 1999, **207**(1/2/3): 271-276.
- [11] GALLIAN J A. A dynamic survey of graph labeling [J]. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2009, **16**(6): 1-219.
- [12] MCKAY B D, PIPERNO A. Practical graph isomorphism, II [J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2014, **60**: 94-112.

Edge-magic total labeling of graphs ($p \leq 9$)

GU Yanbo, LI Jingwen*, HUO Jinping, SHAO Shuhong

(School of Electronic and Information Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: The edge-magic total labeling of a graph means that the labeling sum of any edge and its two vertices in a graph is a constant, and the labeling values fully correspond to the set of natural number from 1 to the sum of the vertices and edges. A recursive algorithm is designed, which combines the algorithm optimization strategy with the objective function to realize the edge-magic judgment of all simple connected graphs in 9 vertices. The results show that when $p \leq 9$, all the tree graphs, unicyclic graphs and bicyclic graphs are edge-magic total labeling graphs. When the labeling values of vertex and edge satisfy certain conditions, it is found that several graph classes are edge-magic total labeling graphs or non-edge-magic total labeling graphs. Combining the existing results, it can be conjectured that when the number of vertices exceeds 9, the relevant conclusions are also valid. Among them, it has been proven that the conjecture is valid when the number of vertices is no more than 12.

Key words: recursive algorithm; edge-magic total labeling; non-edge-magic total labeling; edge-magic total labeling solution space