文章编号：1000-8608(2020)04-0437-04

一类3-正则图完美对集的计数

唐保祥*[1]，任韩[2]

(1. 天水师范学院 数学与统计学院，甘肃 天水 741001；
2. 华东师范大学 数学系，上海 200062)

摘要：图的完美对集计数理论是图论研究的重要内容之一，此问题的研究具有很强的计算机科学、物理学和化学的应用背景，是一个有生机和活力的研究领域，也是快速发展的组合数学理论中许多重要思想的源泉。构造了一类3-正则新图2-3-nC_6，用嵌套递推的方法，得到了图2-3-nC_6的完美对集数的一个递推关系，再解出这个递推式的通解，从而得到了这个图的完美对集数计算公式。最后又给出这个图完美对集数计算公式的一个组合证明。

关键词：完美对集；分类；递推式

中图分类号：O157.5　　**文献标识码：**A　　**doi：**10.7511/dllgxb202004013

0 引言

图的完美对集计数理论的研究成果已经在计算机科学、物理学和化学等多个领域有广泛的应用。例如，DNA计算自组装模型的算法理论，计算机积和式二分图的完美对集表示，化学中共轭分子图Kekulé结构的完美对集表示，此外完美对集数还是估计共振能量和π-电子能量的重要指标。因此，研究图的完美对集计数理论有重要的理论价值和现实意义[1-3]。但是，此问题已经被证实是NP-难问题。分类嵌套递推的方法是求解许多类图完美对集数非常有效的方法[4-8]。本文构造一类新的3-正则图2-3-nC_6，用分类嵌套递推的方法求出图2-3-nC_6中不同完美对集的计数公式。

1 基本概念

定义1　若图G有一个1-正则生成子图P，则称这个生成子图P为图G的完美对集。

定义2　设图G是一个有完美对集的图，若图G的两个完美对集P_1和P_2中有一条边不同，则称P_1和P_2是G的两个不同完美对集。

定义3　设长度为6的圈C_6^i顶点集合为$V(C_6^i)=\{u_{i1},u_{i2},u_{i3},v_{i1},v_{i2},v_{i3}\}(i=1,2,\cdots,n)$，分别连接圈$C_6^i$与$C_6^{i+1}$的顶点$v_{ij}$与$u_{i+1,j}(i=1,2,\cdots,n-1;j=1,2,3)$，把顶点$s$分别与$u_{11}$、$u_{12}$、$u_{13}$各连接一条边，再把顶点$t$分别与$v_{n1}$、$v_{n2}$、$v_{n3}$各连接一条边，产生的图记为2-3-$nC_6$，见图1。

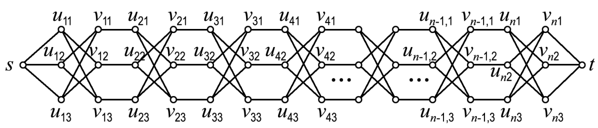

图1　图2-3-nC_6

Fig. 1　Figure of 2-3-nC_6

2 主要结果

定理1　设图2-3-nC_6的完美对集数为$\rho(n)$，则$\rho(n)=3^{n+1}$。

证明　显然$\{su_{12},u_{11}v_{13},v_{11}u_{13},v_{12}u_{22},u_{21}v_{23},v_{21}u_{23},\cdots,v_{n-1,2}u_{n2},u_{n1}v_{n3},v_{n1}u_{n3},v_{n2}t\}$是

收稿日期：2020-01-30；　修回日期：2020-05-10.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11171114).
作者简介：唐保祥*(1961-)，男，教授，E-mail：tbx0618@sina.com.

图 2-3-nC_6 的一个完美对集. 因此,可设图 2-3-nC_6 的完美对集数为 $\rho(n)$. 欲求 $\rho(n)$ 的解析式,分别定义 3 个图 G_1、G_2 和 G_3,并求出它们的完美对集数的递推式. 把路 $w_1u_2w_3$ 的端点 w_1、w_3 分别与图 2-3-nC_6 顶点 u_{11}、u_{13} 各连接一条边,再把路 $w_2u_1w_3$ 的端点 w_2、w_3 分别与图 2-3-nC_6 顶点 u_{12}、u_{13} 各连接一条边,最后删除图 2-3-nC_6 的顶点 s,这样产生的图记为 G_1,如图 2 所示. 类似地定义图 G_2、G_3,见图 3、4.

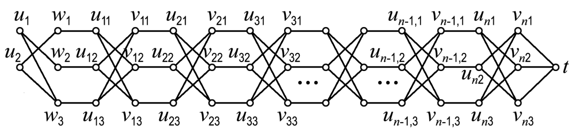

图 2　图 G_1

Fig. 2　Figure of G_1

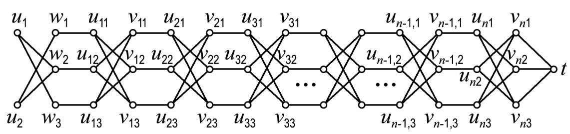

图 3　图 G_2

Fig. 3　Figure of G_2

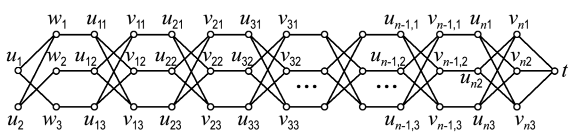

图 4　图 G_3

Fig. 4　Figure of G_3

显然 $\{u_1w_2, u_2w_1, w_3u_{13}, u_{11}v_{12}, u_{12}v_{11}, v_{13}u_{23}, \cdots, u_{n1}v_{n2}, u_{n2}v_{n1}, v_{n2}t\}$ 是图 G_1 的完美对集. 容易判断图 G_2、G_3 有完美对集. 显然 $G_1 \cong G_3$. $\alpha(n)$、$\beta(n)$ 分别表示图 G_1、G_2 完美对集的数目. 则图 G_3 的完美对集数为 $\alpha(n)$.

下面证明 $\alpha(n)=\beta(n)$. 设图 G_1 完美对集的集合为 P,图 G_1 含边 u_1w_2、u_1w_3 的完美对集集合分别记为 P_1、P_2,则 $P_1 \cap P_2=\varnothing$,$P=P_1\cup P_2$,故 $\alpha(n)=|P|=|P_1|+|P_2|$.

P_1 划分为两类. P_1 中含边 u_1w_2、u_2w_1、w_3u_{13} 的完美对集集合记为 P_1^1;P_1 中含边 u_1w_2、u_2w_3、w_1u_{11} 的完美对集集合记为 P_1^2.

由 $\alpha(n)$ 的定义,以及 G_3 的完美对集数也为 $\alpha(n)$,故 $|P_1^1|=|P_1^2|=\alpha(n-1)$,故 $|P_1|=2\alpha(n-1)$.

因为 $u_1w_3\in P_2$,所以 $u_2w_1, w_2u_{12}\in P_2$,由 $\beta(n)$ 的定义可知,$|P_2|=\beta(n-1)$.

因此,

$$\alpha(n)=2\alpha(n-1)+\beta(n-1) \tag{1}$$

设图 G_2 完美对集的集合为 M,图 G_2 含边 u_1w_2、u_1w_3 的完美对集集合分别记为 M_1、M_2,则 $M_1\cap M_2=\varnothing$,$M=M_1\cup M_2$,故 $\beta(n)=|M|=|M_1|+|M_2|$.

因为 $u_1w_2\in M_1$,所以 $u_2w_1, w_3u_{13}\in M_1$,由 $\alpha(n)$ 的定义可知,$|M_1|=\alpha(n-1)$.

M_2 划分为两类. M_2 中含边 u_1w_3、u_2w_1、w_2u_{12} 的完美对集集合记为 M_2^1;M_2 中含边 u_1w_3、u_2w_2、w_1u_{11} 的完美对集集合记为 M_2^2.

由 $\beta(n)$ 的定义可知,$|M_2^1|=\beta(n-1)$,由 $\alpha(n)$ 的定义,以及 G_3 的完美对集数也为 $\alpha(n)$,故 $|M_2^2|=\alpha(n-1)$.

因此,

$$\beta(n)=2\alpha(n-1)+\beta(n-1) \tag{2}$$

由式(1)和(2)可知,

$$\alpha(n)=\beta(n)=3\alpha(n-1) \tag{3}$$

现在来求 $\rho(n)$ 的递推式. 设图 2-3-nC_6 完美对集的集合为 N,图 2-3-nC_6 含边 su_{11}、su_{12}、su_{13} 的完美对集集合分别记为 N_1、N_2、N_3,则 $N_i\cap N_j=\varnothing\ (1\leqslant i<j\leqslant 3)$,$N=\bigcup_{i=1}^{3}N_i$,故 $\rho(n)=|N|=\sum_{i=1}^{3}|N_i|$.

因为 $su_{11}\in N_1$,所以 $su_{12}, su_{13}, u_{11}v_{12}, u_{11}v_{13}\notin N_1$,因为 $G_1\cong G_3$,由 $\alpha(n)$ 的定义可知,$|N_1|=\alpha(n-1)$.

因为 $su_{12}\in N_2$,所以 $su_{11}, su_{13}, u_{12}v_{11}, u_{12}v_{13}\notin N_2$,由 $\beta(n)$ 的定义可知,$|N_2|=\beta(n-

$1)=\alpha(n-1)$.

因为 $su_{13}\in N_3$，所以 su_{11}，su_{12}，$u_{13}v_{11}$，$u_{13}v_{12}\notin N_3$，由 $\alpha(n)$ 的定义可知，$|N_3|=\alpha(n-1)$.

综上所述，

$$\rho(n)=3\alpha(n-1) \tag{4}$$

由式(3)和(4)，得 $\rho(n)=3^{n-1}\alpha(1)$.

由图 5 知，$\alpha(1)=9$，故 $\rho(n)=3^{n+1}$. 证毕.

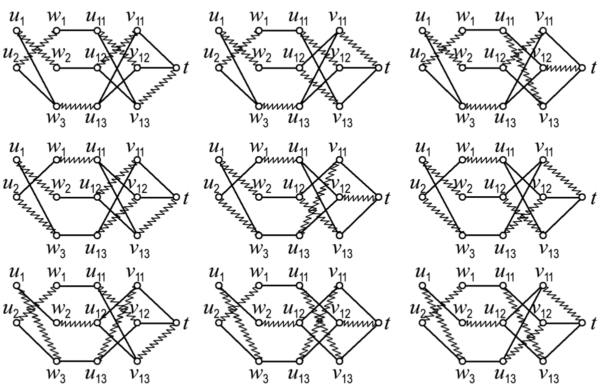

图 5　图 G_4

Fig. 5　Figure of G_4

下面再给出图 2-3-nC_6 的完美对集数为 3^{n+1} 的一个组合证明.

事实上，饱和图 2-3-nC_6 顶点 s 的完美对集的边有 3 种选择，分别是边 su_{11}、su_{12}、su_{13}，当边 su_{1i} $(i=1,2,3)$ 被选定，每个完美对集都要从 4 条边 $u_{1j}v_{1k}$ 中选取 2 条边 $(j,k\in\{1,2,3\},j\neq i,k\neq i)$，也就是在圈 $u_{11}v_{12}u_{13}v_{11}u_{12}v_{13}u_{11}$ 上除边 $u_{1i}v_{1j}$、$u_{1i}v_{1k}$(i,j,k 互不相等)的 4 条边中选取不相邻的 2 条边，有 3 种选择；当 $u_{1j}v_{1k}$ 中的 2 条边选定之后，边 $v_{11}u_{21}$、$v_{12}u_{22}$、$v_{13}u_{23}$ 中有唯一确定的边在完美对集中；如此下去，每个圈 $u_{t1}v_{t2}u_{t3}v_{t1}u_{t2}v_{t3}u_{t1}$ $(t=1,2,\cdots,n)$ 中选取 2 条不相邻的边在完美对集中，都有 3 种选择，按乘法原理，共有 3^{n+1} 种选择边的方法，因此图 2-3-nC_6 的完美对集数为 3^{n+1}.

例 1　$\rho(1)=9$，图 2-3-$1\times C_6$ 的 9 个不同完美对集见图 6.

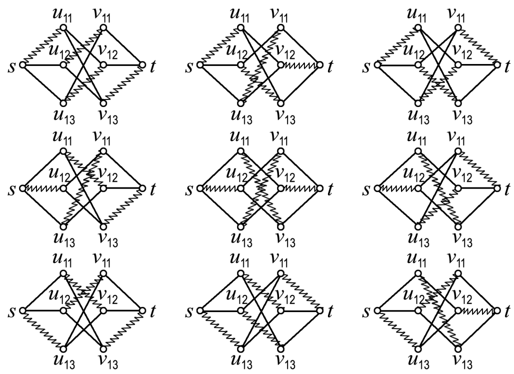

图 6　图 G_5

Fig. 6　Figure of G_5

3　结　语

图的完美对集计数问题研究具有重要的理论价值和现实意义. 但是，一般图的完美对集计数问题却是 NP-难问题. 本文方法研究了计算一般的有完美对集图的所有完美对集数的可能性. 很多存在完美对集图都能利用本文方法求出它的完美对集数的递推式，由于高阶递推式的特征方程是一个高次代数方程，而一般的 5 次及以上代数方程没有根式解，一般的图很难求出它的完美对集数递推式的通解. 但是，从应用角度来看，递推式更容易算出一个图的完美对集数. 因此，本文方法为图的完美对集应用提供了有力支持.

参考文献：

[1] LOVÁSZ L, PLUMMER M D. **Matching Theory** [M]. New York: North-Holland Press, 1986.

[2] DONG Fengming, YAN Weigen, ZHANG Fuji. On the number of perfect matchings of line graphs [J]. **Discrete Applied Mathematics**, 2013, **161**: 794-801.

[3] LI Shuli, YAN Weigen. The matching energy of graphs with given parameters [J]. **Discrete Applied Mathematics**, 2014, **162**: 415-420.

[4] 唐保祥，任　韩. 2 类图完美匹配数目的解析

式[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, **55**(4): 15-17.

TANG Baoxiang, REN Han. The analytic formula of the number of perfect matchings of two types of graphs [J]. **Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni**, 2016, **55**(4): 15-17. (in Chinese)

[5] 唐保祥,任 韩. 按匹配顶点分类的完美匹配数递推求法[J]. 吉林大学学报(理学版), 2019, **57**(2): 285-290.

TANG Baoxiang, REN Han. Recursive method for perfect matching numbers by matching vertex classification [J]. **Journal of Jilin University (Science Edition)**, 2019, **57**(2): 285-290. (in Chinese)

[6] 唐保祥,任 韩. 图的1-因子数目的递推求法[J]. 浙江大学学报(理学版), 2019, **46**(6): 670-675.

TANG Baoxiang, REN Han. Recursive method for the number of 1-factors in graphs [J]. **Journal of Zhejiang University (Science Edition)**, 2019, **46**(6): 670-675. (in Chinese)

[7] 唐保祥,任 韩. 两类特殊图1-因子数分类递推求法[J]. 大连理工大学学报, 2019, **59**(1): 106-110.

TANG Baoxiang, REN Han. Classification and recursive method for 1-factor number of two kinds of special graphs [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2019, **59**(1): 106-110. (in Chinese)

[8] 唐保祥,任 韩. 按饱和顶点分类的完美匹配数的递推求法[J]. 华南师范大学学报(自然科学版), 2019, **51**(5): 110-114.

TANG Baoxiang, REN Han. A recursive method for perfect matching number classified with saturation of a certain vertex [J]. **Journal of South China Normal University (Natural Science Edition)**, 2019, **51**(5): 110-114. (in Chinese)

Enumeration of perfect matchings of a type of 3-regular graphs

TANG Baoxiang*[1], REN Han[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China;
2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: The perfect matching counting theory of graphs is one of the important contents of graph theory research. The research of this problem has a strong application background in computer science, physics and chemistry. It is a field of activity and vitality, and it is also the source of many important ideas in fast developing combinatorial mathematics. A new type of 3-regular graph 2-3-nC_6 is constructed. Using the nested recursive method, a recursive relationship for the number of perfect matchings of graph 2-3-nC_6 is obtained. By solving the general solution of the recursive formula, the formula for calculating the number of perfect matchings in this graph is given. Finally, a combined proof of the formula for calculating the number of perfect matchings in this graph is provided.

Key words: perfect matching; classification; recursive formula