

二阶挠曲重力波对直墙作用及其奇异解

滕 斌*, 梁 爽, 勾 莹

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 利用特征函数展开法, 对有限水深下二阶挠曲重力波在直墙前的反射问题做了求解. 计算了直墙上二阶挠曲重力波作用力随入射波浪频率的变化关系. 数值结果显示在某一特殊频率下二阶挠曲重力波作用力会趋向无穷. 进一步研究表明, 在该频率下挠曲重力波的相速度与倍频下的相速度相等, 使得挠曲重力波的二阶分量分母为零而出现奇异性. 这一奇异解的出现, 使得入射波浪存在不确定性, 对非线性挠曲重力波与结构物作用问题的求解造成困难. 这是一个非常有意义但尚未解决的问题, 需进一步探索.

关键词: 二阶; 水弹性; 挠曲重力波; 特征函数展开法; 奇异性

中图分类号: O353.2

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb202005009

0 引言

挠曲重力波(flexural-gravity waves)指的是水面带有弹性板情况下的波浪传播现象, 这一问题也称为水弹性(hydroelasticity)问题. 早期关于挠曲重力波的研究主要以波浪与海冰层的作用为研究背景^[1-3]. 后来, 随着海上大型浮体结构的兴建, 增加了波浪与大型浮体作用的背景^[4-7].

规则波浪与水面弹性板作用问题, 大多采用势流理论在小振幅假设下开展研究. 对于波浪与半无限长弹性板的作用问题, Balmforth 等^[8]应用 Wiener-Hopf 方法求得了解析解, Fox 等^[2]、Teng 等^[9]运用特征函数展开法和最小二乘法研究了波浪对二维半无限弹性板的线性作用. Brocklehurst 等^[10]、Bhattacharjee 等^[11]应用特征函数展开法研究了挠曲重力波与二维直墙的作用, Brocklehurst 等^[12]又采用韦伯积分变换法研究了挠曲重力波与三维直立圆柱的作用.

对于波浪与有限长弹性体的作用问题, Eatock Taylor^[13]指出可分别采用湿模态或干模态方法进行研究. 滕斌等^[7]研究了矩形弹性板不同干模态函数对计算结果收敛性和精确性的影

响, 沈洁等^[14]应用有限元方法得到了任意形状弹性板的干模态函数, 与高阶边界元结合建立了三维线性水弹性分析模型.

对于频域内非线性波浪与弹性板的作用以及挠曲重力波对结构物作用的研究还很少. 目前见到的工作有: Hegarty 等^[15]应用板格林函数与水波格林函数相结合的边界元方法, 研究了二阶非线性波浪与有限长二维弹性板的相互作用问题; Malenica 等^[16]利用积分方程方法推导了二阶挠曲重力波与直立圆柱作用的计算公式.

本研究利用特征函数展开法研究二阶挠曲重力波在直墙前的反射问题. 首先介绍挠曲重力波的基本方程和直墙前二阶挠曲重力波反射的求解过程; 然后给出奇异现象, 分析造成奇异性的原因; 最后列出非线性挠曲重力波中奇异性的消除方法和与结构物作用问题分析中会面临的问题.

1 基本理论

设直墙前水面上覆盖着半无限长薄弹性板, 挠曲重力波从左侧入射与直墙作用, 如图 1 所示. 建立二维笛卡儿坐标系, x 轴在静水面上, 向右为

收稿日期: 2020-06-01; 修回日期: 2020-07-16.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51879039).

作者简介: 滕 斌*(1958-), 男, 博士, 教授, E-mail: bteng@dlut.edu.cn; 梁 爽(1996-), 男, 博士生, E-mail: ls@mail.dlut.edu.cn; 勾 莹(1977-), 女, 博士, 副教授, E-mail: gouying@dlut.edu.cn.

正; z 轴在直墙面上,向上为正.弹性板的厚度为 d ,弹性模量为 E ,泊松比为 ν ,密度为 ρ_s ,弹性板与直墙的接触可以为嵌固、简支或自由的.流体假设是无黏、无旋、不可压缩的.

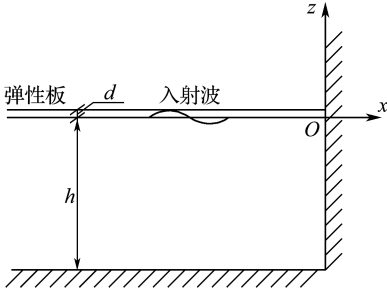


图1 坐标系示意图

Fig. 1 The sketch of the coordinates system

考虑规则波浪下的反射问题,速度势可摄动展开成下列形式:

$$\Phi = \epsilon \text{Re}[\phi^{(1)} e^{-i\omega t}] + \epsilon^2 (\text{Re}[\phi^{(2)} e^{-2i\omega t}] + \phi_m^{(2)}) + O(\epsilon^3) \quad (1)$$

式中: $\phi^{(j)}(x, z)$ ($j=1, 2$)为一阶和二阶速度势, $\phi_m^{(2)}$ 为二阶平均项,平均项不对二阶力产生贡献,故不再考虑.

速度势 $\phi^{(j)}(x, z)$ 在未扰动的流域内满足拉普拉斯方程:

$$\partial^2 \phi^{(j)} / \partial x^2 + \partial^2 \phi^{(j)} / \partial z^2 = 0; j=1, 2; -h < z < 0 \quad (2)$$

不透水的水底条件:

$$\partial \phi^{(j)} / \partial z = 0; z = -h \quad (3)$$

直立壁面条件:

$$\partial \phi^{(j)} / \partial x = 0; x = 0 \quad (4)$$

弹性板和水面的接触面随波动而上下起伏,弹性板和水体在交界面处满足运动连续和力平衡条件.

设弹性板的位移为 ζ ,在弹性板的下部,如果流体与固体不分离,流体满足的运动学条件为

$$-j\omega i \zeta^{(j)} = \frac{\partial \phi^{(j)}(x, z)}{\partial z} + G^{(j)}; z=0, x \leq 0$$

$$G^{(j)} = \begin{cases} 0; & j=1 \\ \frac{1}{2} \phi_{zz}^{(1)} \zeta^{(1)} - \frac{1}{2} \phi_x^{(1)} \zeta_x^{(1)}; & j=2 \end{cases} \quad (5)$$

动力学条件为

$$p^{(j)} = i j \rho \omega \phi^{(j)}(x, z) - \rho g \zeta^{(j)} - L^{(j)}; z=0, x \leq 0$$

$$L^{(j)} = \begin{cases} 0; & j=1 \\ \frac{1}{4} \rho \nabla \phi^{(1)} \cdot \nabla \phi^{(1)} - \frac{1}{2} i \rho \omega \phi_z^{(1)} \zeta^{(1)}; & j=2 \end{cases} \quad (6)$$

这两个条件是该问题非线性的来源.弹性板的弹性变形在此研究中被假设为线性的,且满足欧拉-伯努利板方程:

$$p^{(j)} = EI \frac{\partial^4 \zeta^{(j)}}{\partial x^4} - j^2 m_s \omega^2 \zeta^{(j)}; z=0, x \leq 0 \quad (7)$$

整合式(5)~(7),可得弹性板下水面边界条件:

$$\left[EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} - m_s (j\omega)^2 + \rho g \right] \phi_z^{(j)} - \rho (j\omega)^2 \phi^{(j)} = F^{(j)}; j=1, 2; z=0 \quad (8)$$

其中 ρ 是水的密度, g 是重力加速度, $m_s = \rho_s d$ 是弹性板单位面积的质量, $I = d^3 / 12(1 - \nu^2)$ 为板截面惯性矩,等式右侧的强迫项为

$$F^{(j)} = \begin{cases} 0; & j=1 \\ \frac{i}{2\omega} \left[\left(EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 4m_s \omega^2 + \rho g \right) \times \right. \\ \left. (\phi_x^{(1)} \phi_{zx}^{(1)} - \phi_z^{(1)} \phi_{xx}^{(1)}) \right] + \\ \left. \frac{i\omega\rho}{2} [(\phi_x^{(1)})^2 + 3(\phi_z^{(1)})^2]; & j=2 \end{cases} \quad (9)$$

由一阶速度势的水面条件,可得挠曲重力波(一阶)的色散关系:

$$(EI k^4 - m_s \omega^2 + \rho g) k \tanh(kh) - \rho \omega^2 = 0 \quad (10)$$

该方程有两个实根 $\pm k_0^{(1)}$,无穷个虚根 $\pm i k_i^{(1)}$ ($i=1, 2, \dots$)和4个复根 $\lambda_i^{(1)} = \pm \alpha \pm i\beta$ ($i=-1, -2, -3, -4$).

板端边界条件为

嵌固端 $\zeta^{(j)} = 0, \zeta_x^{(j)} = 0$ 在 $(0, 0)$ 点

简支端 $\zeta^{(j)} = 0, \zeta_{xx}^{(j)} = 0$ 在 $(0, 0)$ 点 (11)

自由端 $\zeta_{xx}^{(j)} = 0, \zeta_{xxx}^{(j)} = 0$ 在 $(0, 0)$ 点

水体中动压强为

$$p^{(1)}(x, z) = i\omega\rho\phi^{(1)}(x, z);$$

$$p^{(2)}(x, z) = 2i\omega\rho\phi^{(2)}(x, z) - \frac{1}{4}\rho \nabla \phi^{(1)}(x, z) \cdot \nabla \phi^{(1)}(x, z) \quad (12)$$

2 速度势的求解

分解速度势为入射势和反射势两部分:

$$\phi^{(j)}(x,z)=\phi_i^{(j)}(x,z)+\phi_r^{(j)}(x,z);j=1,2 \tag{13}$$

入射势为向右传播的稳定推进模式,反射势包含向左传播的稳定推进、衰减推进和非传播模式.

2.1 一阶解

对于幅度为 A 的挠曲重力波,一阶入射势为

$$\phi_i^{(1)}=-\frac{Ai\omega}{k_0^{(1)}\tanh(k_0^{(1)}h)}e^{ik_0^{(1)}x}\frac{\cosh k_0^{(1)}(z+h)}{\cosh k_0^{(1)}h} \tag{14}$$

其中 $k_0^{(1)}$ 为 ω 频率下色散方程(10)的实根. 反射势可写为

$$\begin{aligned} \phi_r^{(1)}= & c_0^{(1)}e^{-ik_0^{(1)}x}\frac{\cosh k_0^{(1)}(z+h)}{\cosh k_0^{(1)}h}+ \\ & c_{-1}^{(1)}e^{-ik_{-1}^{(1)}x}\frac{\cosh \lambda_{-1}^{(1)}(z+h)}{\cosh \lambda_{-1}^{(1)}h}+ \\ & c_{-2}^{(1)}e^{-ik_{-2}^{(1)}x}\frac{\cosh \lambda_{-2}^{(1)}(z+h)}{\cosh \lambda_{-2}^{(1)}h}+ \\ & \sum_{i=1}^{\infty}c_i^{(1)}e^{k_i^{(1)}x}\frac{\cos k_i^{(1)}(z+h)}{\cos k_i^{(1)}h} \end{aligned} \tag{15}$$

其中 $ik_i^{(1)}(i=1,2,\cdots)$ 为色散方程(10)的虚根, $\lambda_{-1}^{(1)}=\alpha+i\beta$ 和 $\lambda_{-2}^{(1)}=-\alpha+i\beta$ 为色散方程(10)的复根, $c_i^{(1)}(i=-2,-1,0,1,2,\cdots)$ 为待定系数.

由直墙壁面边界条件和板端边界条件,可求得待定系数 $c_i^{(1)}(i=-2,-1,0,1,2,\cdots)$.

2.2 二阶解

将一阶入射势(式(14))代入水面强迫项(式(9)),则可得到二阶入射势的水面强迫项为

$$F_i^{(2)}=f_i^{(2)}e^{2ik_0^{(1)}x} \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned} f_i^{(2)}= & \left(\frac{A\omega}{k_0^{(1)}\tanh(k_0^{(1)}h)}\right)^2\left[\frac{i(k_0^{(1)})^3\tanh(k_0^{(1)}h)}{\omega}\times \right. \\ & (16(k_0^{(1)})^4EI-4m_s\omega^2+\rho g)+\frac{i\rho\omega(k_0^{(1)})^2}{2}\times \\ & \left.(3\tanh^2(k_0^{(1)}h)-1)\right] \end{aligned}$$

由此可求得二阶入射势为

$$\phi_i^{(2)}=Ce^{2ik_0^{(1)}x}\frac{\cosh 2k_0^{(1)}(z+h)}{\cosh 2k_0^{(1)}h} \tag{17}$$

其中 $C=f_i^{(2)}/D, D=[16(k_0^{(1)})^4EI-4m_s\omega^2+\rho g]2k_0^{(1)}\tanh(2k_0^{(1)}h)-4\rho\omega^2$.

二阶反射势满足的水面条件为

$$\begin{aligned} & \left[EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}-4m_s\omega^2+\rho g\right]\phi_{rz}^{(2)}-4\rho\omega^2\phi_r^{(2)}= \\ & F^{(2)}-F_i^{(2)};z=0 \end{aligned} \tag{18}$$

分解二阶反射势为锁定波(特解) $\phi_{rp}^{(2)}$ 和自由波(通解) $\phi_{rh}^{(2)}$ 的形式:

$$\phi_r^{(2)}=\phi_{rp}^{(2)}+\phi_{rh}^{(2)} \tag{19}$$

锁定波和自由波分别满足下述水面边界条件:

$$\begin{aligned} & \left[EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}-4m_s\omega^2+\rho g\right]\phi_{rpz}^{(2)}-4\rho\omega^2\phi_{rp}^{(2)}= \\ & F^{(2)}-F_i^{(2)};z=0 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} & \left[EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}-4m_s\omega^2+\rho g\right]\phi_{rhz}^{(2)}-4\rho\omega^2\phi_{rh}^{(2)}=0; \\ & z=0 \end{aligned} \tag{21}$$

锁定波 $\phi_{rp}^{(2)}$ 中包含向左传播的稳定推进、衰减推进和非传播模式,及不传播的常数项,其表达式为

$$\begin{aligned} \phi_{rp}^{(2)}= & \tilde{B}e^{-2ik_0^{(1)}x}\frac{\cosh 2k_0^{(1)}(z+h)}{\cosh 2k_0^{(1)}h}+ \\ & \int_0^\infty B(\mu)e^{-i\mu x}\frac{\cosh \mu(z+h)}{\cosh \mu h}d\mu+R;x<0 \end{aligned} \tag{22}$$

将式(22)代入二阶流体上表面条件(式(20))中,可确定待定系数.

自由波 $\phi_{rh}^{(2)}$ 满足的色散关系为

$$(EIk^4-4m_s\omega^2+\rho g)k\tanh(kh)-4\rho\omega^2=0 \tag{23}$$

该方程同样有两个实根 $\pm k_0^{(2)}$, 无穷个虚根 $\pm ik_i^{(2)}(i=1,2,\cdots)$ 和 4 个复根 $\lambda_i^{(2)}=\pm\alpha\pm i\beta(i=-1,-2,-3,-4)$. 自由波包含向左传播的稳定推进、衰减推进和非传播模式,可写为

$$\begin{aligned} \phi_{rh}^{(2)}= & c_0^{(2)}e^{-ik_0^{(2)}x}\frac{\cosh k_0^{(2)}(z+h)}{\cosh k_0^{(2)}h}+ \\ & c_{-1}^{(2)}e^{-ik_{-1}^{(2)}x}\frac{\cosh \lambda_{-1}^{(2)}(z+h)}{\cosh \lambda_{-1}^{(2)}h}+ \\ & c_{-2}^{(2)}e^{-ik_{-2}^{(2)}x}\frac{\cosh \lambda_{-2}^{(2)}(z+h)}{\cosh \lambda_{-2}^{(2)}h}+ \\ & \sum_{i=1}^{\infty}c_i^{(2)}e^{k_i^{(2)}x}\frac{\cos k_i^{(2)}(z+h)}{\cos k_i^{(2)}h} \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $k_0^{(2)}$ 为色散方程(23)的实根, $ik_i^{(2)}(i=1,2,\cdots)$ 为色散方程(23)的虚根, $\lambda_{-1}^{(2)}=\alpha+i\beta$ 和 $\lambda_{-2}^{(2)}=-\alpha+i\beta$ 为色散方程(23)的复根, $c_i^{(2)}(i=-2,-1,0,1,2,\cdots)$ 为待定系数.

由直墙壁面边界条件和板端边界条件,可求得待定系数 $c_i^{(2)} (i=-2,-1,0,1,2,\cdots)$.

3 数值结果

取水体密度 $\rho=1\,025\text{ kg/m}^3$,弹性板密度 $\rho_s=925\text{ kg/m}^3$,板厚 $d=1\text{ m}$,重力加速度 $g=9.81\text{ m/s}^2$,水深 $h=30\text{ m}$,弹性板刚度为 $5\times 10^8\text{ N}\cdot\text{m}$,以板与直墙嵌固连接为例,对速度势进行求解.

图 2 是频率 $\omega=1.0\text{ rad/s}$ 下水体中一阶速度势模的分布图.这一结果与 Brocklehurst 等^[10]和 Bhattacharjee 等^[11]的结果均吻合得很好.在远离直墙外,挠曲重力波为立波形式, x 方向的变化周期为波长的一半;而在直墙附近,由于受到板端边界条件的影响,压力场的分布情况与远处不同.

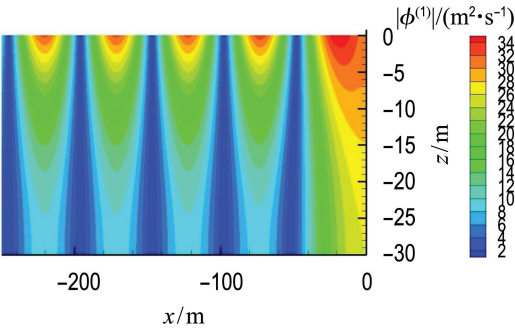


图 2 直墙前一阶速度势模的分布
Fig. 2 Distribution of module of the first order velocity potential near the vertical wall

分解直墙上的二阶水平波浪力 $F_x^{(2)}$ 为两个部分,其一为一阶速度平方的贡献:

$$F_{x1}^{(2)}=-\frac{\rho}{4}\int_{-h}^0\nabla\phi^{(1)}\cdot\nabla\phi^{(1)}dz\tag{25}$$

另一为二阶速度势的贡献:

$$F_{x2}^{(2)}=2i\omega\rho\int_{-h}^0\phi^{(2)}dz\tag{26}$$

图 3 和图 4 分别给出了二阶归一化波浪力随入射波浪频率的变化关系.从两图的对比中可以看到, $F_{x2}^{(2)}$ 远大于 $F_{x1}^{(2)}$,且在 $\omega=0.47\text{ rad/s}$ 附近 $F_{x2}^{(2)}$ 趋向无穷.二阶频域问题尚未找到可以对比的结果,但在飞机、车辆在冰层上行进问题的研究中,人们发现存在临界速度^[17-19],当移动荷载以临界速度行进时冰层极易破碎断裂.

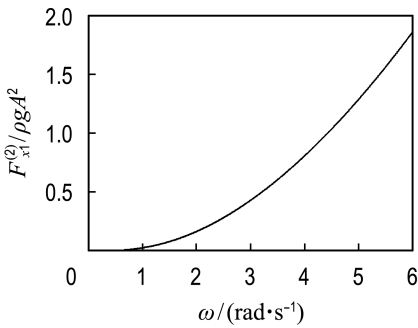


图 3 $F_{x1}^{(2)}$ 随波浪频率的变化
Fig. 3 Variation of $F_{x1}^{(2)}$ with wave frequency

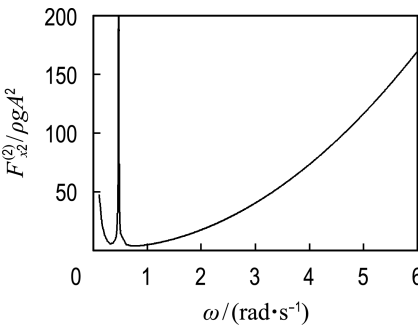


图 4 $F_{x2}^{(2)}$ 随波浪频率的变化
Fig. 4 Variation of $F_{x2}^{(2)}$ with wave frequency

4 奇异性讨论

为了探讨二阶挠曲重力波速度势出现奇异性的原因,图 5 和图 6 分别绘制了二阶入射势中系数 C 和 D 随波浪频率的变化曲线.计算中的具体模型参数如下:水体密度、弹性板密度、重力加速度、水深与上一算例相同,弹性板刚度分别为 1×10^7 、 5×10^8 和 $1\times 10^{10}\text{ N}\cdot\text{m}$,另外图中还绘制了

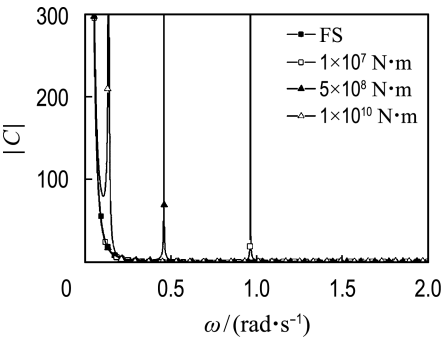


图 5 系数 C 随波浪频率的变化
Fig. 5 Variation of coefficient C with wave frequency

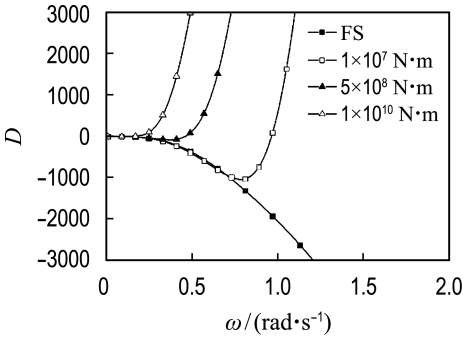


图 6 分母 D 随波浪频率的变化

Fig. 6 Variation of denominator D with wave frequency

重力波 ($EI = \rho_s = 0$) 对应的曲线 (图中标示为 FS). 可以清楚看到, 对于挠曲重力波, 3 种弹性板刚度下的系数 C 均出现了奇异性, 在对应频率下分母 D 等于零. 在其他条件不变的情况下, 刚度越大, 奇异点所对应的这一特征频率越小. 而在重力波情况下, 系数 C 无奇异现象, 分母 D 只在零频率下为零.

进一步分析可以发现, 挠曲重力波分母 D 等于零出现的条件, 是二倍频波浪通过色散方程

$$[EI(k_0^{(2)})^4 - m_s(2\omega)^2 + \rho g]k_0^{(2)} \tanh(k_0^{(2)}h) - \rho(2\omega)^2 = 0 \quad (27)$$

计算出的波数 $k_0^{(2)}$ 等于波浪频率下波数 $k_0^{(1)}$ 的 2 倍, 即 $k_0^{(2)} = 2k_0^{(1)}$. 在此频率下, 入射波二阶分量的传播速度 ($2\omega/2k_0^{(1)}$) 与二倍频下一阶波浪的传播速度 ($c_2 = 2\omega/k_0^{(2)}$) 相等, 均为一倍频下一阶波浪的传播速度 ($c_1 = \omega/k_0^{(1)}$). 图 7 为波数比 $2k_0^{(1)}/k_0^{(2)}$ 随着波浪频率变化的关系, 可以看到对于不同弹性板刚度, 波数比 $2k_0^{(1)}/k_0^{(2)}$ 在零频率时为 1, 然后随着频率增大开始减小, 减小到最小值后

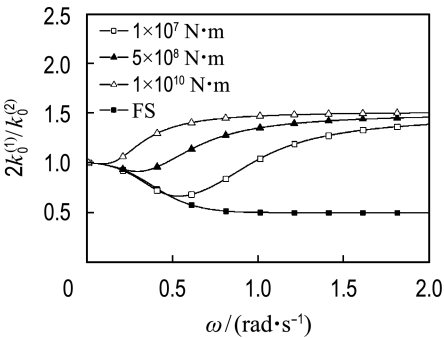


图 7 $2k_0^{(1)}/k_0^{(2)}$ 随波浪频率的变化

Fig. 7 Variation of $2k_0^{(1)}/k_0^{(2)}$ with wave frequency

开始增大, 并穿过纵坐标为 1 的水平线. 但对于重力波, 波数比 $2k_0^{(1)}/k_0^{(2)}$ 在零频率时为 1, 然后随着频率的增大而单调减小, 高频下趋于 0.5.

图 8 为波速 c 随波浪频率的变化关系. 对于挠曲重力波, 波速先随频率的增大而减小, 减小到最小值后再开始增大, 所以会出现 $c(2\omega) = c(\omega)$ 的情况. 而反观重力波波速, 随着频率的增大而单调减小.

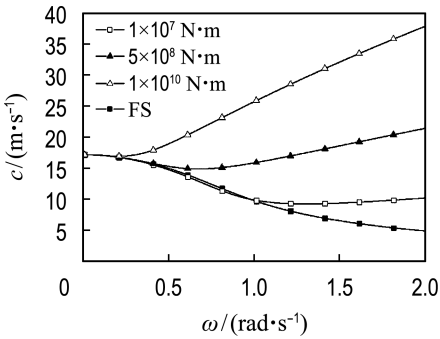


图 8 波速随波浪频率的变化

Fig. 8 Variation of wave speed with wave frequency

5 非线性挠曲重力波中奇异性的移除

对于单频率的入射波浪, Vanden-Broeck 等^[19]将挠曲重力波的波面、速度势和相速度用奇异摄动展开方法展开到三阶:

$$\begin{aligned} \eta &= \epsilon \eta^{(1)} + \epsilon^2 \eta^{(2)} + \epsilon^3 \eta^{(3)} + O(\epsilon^4) \\ \phi &= \epsilon \phi^{(1)} + \epsilon^2 \phi^{(2)} + \epsilon^3 \phi^{(3)} + O(\epsilon^4) \\ c &= c_0 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \epsilon^3 c_3 + O(\epsilon^4) \end{aligned} \quad (28)$$

对于 $2k_0^{(1)} = k_0^{(2)}$ 的情形, 将一阶挠曲重力波表示成双频波浪的形式:

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_1 + \zeta_2 = \text{Re}[\eta_1 e^{-i\omega t}] + \text{Re}[\eta_2 e^{-2i\omega t}] = \\ &\text{Re}[A_1 e^{ik_0^{(1)}x} e^{-i\omega t}] + \text{Re}[A_2 e^{2ik_0^{(1)}x} e^{-2i\omega t}] \end{aligned} \quad (29)$$

在无限水深中一阶挠曲重力波的速度势可表达为

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 = \text{Re}[\phi_1 e^{-i\omega t}] + \text{Re}[\phi_2 e^{-2i\omega t}] = \\ &\text{Re}[ic_0 A_1 e^{k_0^{(1)}z + ik_0^{(1)}x} e^{-i\omega t}] + \\ &\text{Re}[ic_0 A_2 e^{2k_0^{(1)}z + 2ik_0^{(1)}x} e^{-2i\omega t}] \end{aligned} \quad (30)$$

取 $A_2 = \pm A_1/2$ 可让水面强迫项 $F_i^{(2)}(2\omega) = 0$, 从而去除二阶挠曲重力波的奇异性. 同时指出该问题的解是不唯一的.

Vanden-Broeck 等的方法虽然可以消除入射波浪在这一特殊频率下的奇异问题, 但对于二阶

挠曲重力波对结构物作用问题仍有下述问题需要解决:

(1)在 $k_0^{(2)}$ 接近 $2k_0^{(1)}$ 但不等于 $2k_0^{(1)}$ 的频率下,入射势如何给定?

(2)一阶波浪成为双色波浪,二阶速度势水面条件中的强迫项将会包含 5 个和频和差频分量 ($0, \omega, 2\omega, 3\omega$ 和 4ω). 这样波浪力中增加了高频成分,挠曲重力波作用下结构动力响应机理将发生变化.

这些问题需要进一步研究.

6 结 论

(1)重力波的相速度随波浪频率的增大而单调减小,而挠曲重力波的相速度先减小后增大.

(2)除了零频率外,挠曲重力波会出现倍频下波速与波频下波速相等的情况,即倍频下波数是波频下波数两倍的情况.

(3)在其他条件不变的情况下,板刚度越大,特征频率越小.

(4)在波频波速与倍频波速相等的频率,挠曲重力波入射速度势存在奇异性,按此理论波幅巨大,水面弹性板会断裂.

(5)应用上述二阶挠曲重力波计算的波浪力,也存在奇异性问题.

(6)Vanden-Broeck 等^[19]通过引入双频波浪成分,得到了这一特殊频率下的有限解.但如何应用其求解挠曲重力波与结构物作用问题,仍需进一步研究.另外,需开展现场观测,量测非线性挠曲重力波在这一特殊频率下的波形特征和极限高度.

参考文献:

- [1] EVANS D V, DAVIES T V. Wave-ice interaction: Rep 1313 [R]. Hoboken: Davidson Lab, Stevens Institute of Technology, 1968.
- [2] FOX C, SQUIRE V A. Reflection and transmission characteristics at the edge of shore fast sea ice [J]. *Journal of Geophysical Research*, 1990, **95** (C7): 11629-11639.
- [3] SQUIRE V A, DUGAN J P, WADHAMS P, *et al.* Of ocean waves and sea ice [J]. *Annual*

Review of Fluid Mechanics, 1995, **27**: 115-168.

- [4] WU Y S. Hydroelasticity of floating bodies [D]. London: Brunel University, 1984.
- [5] MAEDA H, Horigome T, Hiruma T. Development of renewable energy park on oceans [C] // *Proceedings of International Workshop on Very Large Floating Structures*. Hayama: Ship Research Institute, 1996: 53-60.
- [6] KASHIWAGI M. Research on hydroelastic responses of VLFS: Recent progress and future work [J]. *Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference*, 1999, **1**: 17-26.
- [7] 滕 斌, 勾 莹. 大型浮体水弹性作用的频域分析 [J]. *工程力学*, 2006, **23**(z2): 36-48.
TENG Bin, GOU Ying. Hydroelastic analysis of very large floating structure in frequency domain [J]. *Engineering Mechanics*, 2006, **23**(z2): 36-48. (in Chinese)
- [8] BALMFORTH N J, CRASTER R V. Ocean waves and ice sheets [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, **395**: 89-124.
- [9] TENG B, CHENG L, LIU S, *et al.* Modified eigenfunction expansion methods for interaction of water waves with a semi-infinite elastic plate [J]. *Applied Ocean Research*, 2001, **23**(6): 357-368.
- [10] BROCKLEHURST P, KOROBKIN A A, PĂRĂU E I. Interaction of hydro-elastic waves with a vertical wall [J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2010, **68**(3): 215-231.
- [11] BHATTACHARJEE J, GUEDES S C. Flexural gravity wave over a floating ice sheet near a vertical wall [J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2012, **75**(1): 29-48.
- [12] BROCKLEHURST P, KOROBKIN A A, PĂRĂU E I. Hydroelastic wave diffraction by a vertical cylinder [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2011, **369**(1947): 2832-2851.
- [13] EATOCK TAYLOR R. Wet or dry modes in linear hydroelasticity - why modes? [C]// *Proceedings of 3rd International Conference on Hydroelasticity in Marine Technology*. Oxford: University of Oxford, 2003: 239-250.
- [14] 沈 洁, 勾 莹, 滕 斌. 波浪与弹性板作用的数值模拟 [J]. *工程力学*, 2012, **29**(12): 287-294.

- SHEN Jie, GOU Ying, TENG Bin. Numerical simulation of the interaction between waves and floating elastic plate [J]. **Engineering Mechanics**, 2012, **29**(12): 287-294. (in Chinese)
- [15] HEGARTY G M, SQUIRE V A. A boundary-integral method for the interaction of large-amplitude ocean waves with a compliant floating raft such as a sea-ice floe [J]. **Journal of Engineering Mathematics**, 2008, **62**(4): 355-372.
- [16] MALENICA S, KOROBKIN A A, KHABAKHPASHEVA T I, *et al.* Second order interaction of flexural gravity waves with bottom mounted vertical circular cylinder [C] // **Proceedings of the 34th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies**. Newcastle: IWWF, 2019.
- [17] WILSON J T. Moving loads on floating ice sheets; UMRI Project 2432 [R]. Ann Arbor: University of Michigan Research Institute, 1958.
- [18] SQUIRE V A, ROBINSON W H, LANGHORNE P J, *et al.* Vehicles and aircraft on floating ice [J]. **Nature**, 1988, **333**(6169): 159-161.
- [19] VANDEN-BROECK J M, PĂRĂU E I. Two-dimensional generalized solitary waves and periodic waves under an ice sheet [J]. **Philosophical Transactions of the Royal Society A**, 2011, **369**(1947): 2957-2972.

The second-order flexural-gravity wave loads on vertical wall and singularity in solution

TENG Bin*, LIANG Shuang, GOU Ying

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The problem of the second-order flexural-gravity wave reflection from a vertical wall in the finite water depth is investigated by the eigenfunction expansion method. The variation of the force of the second-order flexural-gravity wave on a vertical wall with the incident wave frequency is calculated. Numerical results show that the second-order flexural-gravity wave loads on a vertical wall will approach to infinity at a special frequency. Further studies show that at the special frequency the phase velocity of the flexural-gravity waves is equal to that of the waves with the double frequency, and the second-order component of the flexural-gravity waves is singular with the denominator of it being zero. The existence of this singular solution will induce uncertainty of the incident waves, and limit the application of solutions for nonlinear flexural-gravity wave loads on structures. This is a very meaningful but unresolved problem and deserves further exploration.

Key words: the second-order; hydroelasticity; flexural-gravity waves; eigenfunction expansion method; singularity