

# 用于保特征四边形网格生成的改进 Morse 算法

籍冉冉, 郑晓朋, 雷娜, 罗钟铉\*

(大连理工大学 软件学院, 辽宁 大连 116620)

**摘要:** 在 Morse 理论的基础上, 采用迭代算法来计算特征函数, 通过优化生成保特征的四边形网格. 首先, 在拉普拉斯矩阵中加入模型的曲率信息, 计算出的特征函数更加符合模型的几何特征; 其次, 使用迭代算法求得特征函数, 可以求解任意数值的特征函数, 不仅限于特征值, 使得特征函数的选取更加具有灵活性, 为后续做铺垫; 最后, 在迭代算法的过程中加入特征线信息, 最终求得的特征函数可以很准确地将临界点定位在特征线上, 这样可以生成沿特征线的 Morse-Smale 复形, 通过优化生成保特征的四边形网格. 所提算法简单, 易于实现, 输入信息较少.

**关键词:** Morse 理论; 迭代算法; 保特征; 四边形网格

**中图分类号:** TP319; O242.2 **文献标识码:** A **doi:** 10.7511/dllgxb202006013

## 0 引言

数字几何用于描述空间中的几何物体, 在工业设计、影视、游戏等领域都有广泛的应用. 数字几何首先需要在计算机中对空间几何模型进行描述, 从而在此基础上进一步进行建模、分析、仿真等. 三角形网格是表述中最常用的一种网格形式, 生成技术也比较成熟, 但在许多应用领域, 四边形网格却具有无可替代的优势. 在数值模拟仿真中, 四边形网格的稳定性、精度、收敛速度等都优于三角形网格; 四边形网格也可以用于生成样条曲面; 四边形网格在模型参数化、纹理贴图等领域也有着广泛的应用. 在四边形网格生成中保持模型的特征至关重要.

曲面四边形网格生成的方法很多, 主要有基于方向场的方法<sup>[1-2]</sup>、参数化方法<sup>[3-4]</sup>、“分而治之”的方法<sup>[5-6]</sup>和基于 Morse 理论的方法. Dong 等<sup>[7]</sup>基于 Morse 理论, 分析拉普拉斯矩阵的特征向量得到四边形网格, 算法首先计算输入网格的拉普拉斯矩阵, 求解拉普拉斯矩阵的特征向量, 选择合适的特征向量作为特征函数; 然后利用该函数生成 Morse-Smale 复形完成对三角网格的四边单

元剖分; 最后在此剖分的基础上进行全局分片参数化, 并在参数域上进行规则采样获得最终的四边形网格. 在之后的工作中, Huang 等<sup>[8]</sup>、Zhang 等<sup>[9]</sup>和 Ling 等<sup>[10]</sup>加入了方向、特征对齐和各向异性的约束, 通过优化求解带有约束的广义特征问题来求解特征函数. Huang 等<sup>[8]</sup>将谱分析与离散余弦变换的关系应用在特征函数的优化上, 建立了特征函数与其对应 Morse 复形的内在联系, 通过改变拉普拉斯算子中的面积项来控制单元密度; 通过在广义拉普拉斯特征问题中引入额外的能量项来控制 Morse 复形边的方向与位置, 方向由用户输入的方向场控制, 特征对齐对应于网格边的具体位置. Zhang 等<sup>[9]</sup>提出一种基于驻波构造的各向异性四边形网格生成技术, 通过挖掘四边形网格和驻波的内在关系, 将所有的用户需求同时转化为驻波的各种物理属性约束, 通过输入密度场实现了各向异性和密度控制, 同样也通过输入方向场来实现方向和特征对齐约束. Ling 等<sup>[10]</sup>通过引入边界条件来实现特征对齐控制, 通过求解 Helmholtz 方程来得到特征函数, 在 Helmholtz 方程中加入了密度场的控制. 这些算

收稿日期: 2020-03-15; 修回日期: 2020-09-28.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61720106005).

作者简介: 籍冉冉(1996-), 女, 硕士生, E-mail: ranan\_ji@163.com; 郑晓朋(1987-), 男, 博士, E-mail: ZhengXP@dlut.edu.cn; 雷娜(1977-), 女, 博士, 教授, 博士生导师, E-mail: nalei@dlut.edu.cn; 罗钟铉\*(1966-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, E-mail: zxlue@dlut.edu.cn.

法均需将所有用户控制和质量需求集中在一个全局优化问题中统一求解,算法复杂,随着模型规模的增大,计算代价将急速上升,噪声增多,也需要后期复杂的优化.2018 年,Fang 等<sup>[11]</sup>将参数化和 Morse 理论结合起来,算法通过用户输入标架场来进行参数化,在参数化的过程中也输入特征线来进行特征约束,在参数化发生退化的区域用 Morse 理论来生成四边形网格,通过将两种方法优势互补,解决了参数化的退化问题和 Morse 方法在规模较大时运算量大的缺陷.

本文将曲率信息加入到拉普拉斯矩阵中,通过迭代的方法计算特征函数,在迭代的过程中将特征线的信息加入,使得临界点能够准确定位到特征线上,并通过临界点来构造保特征的 Morse-Smale 复形,进而参数化生成四边形网格.

1 技术路线

基于 Morse 理论生成满足特征的四边形网格,算法步骤概括为 5 步,图 1 是原始算法与本文算法的对比,本文接下来将对每一步进行更加详细的介绍.

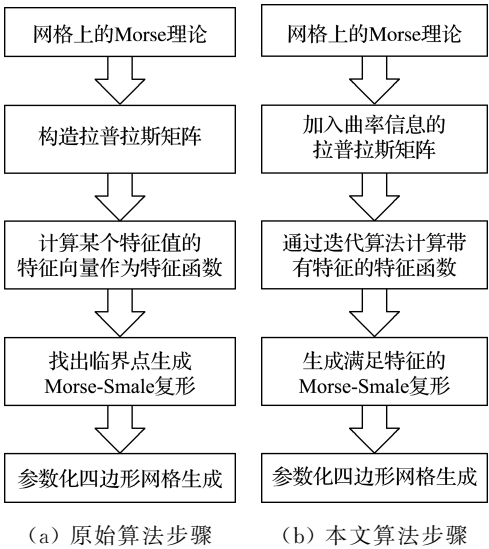


图 1 原始算法与本文算法的对比

Fig. 1 Comparison between the original algorithm and the algorithm in this paper

2 Morse 理论与 Morse-Smale 复形

2.1 Morse 理论

Morse 理论是微分拓扑学中的一个工具,它涉及流形的几何拓扑与定义在它们上的实值函数间的关系,通过在流形上定义一个光滑函数  $f$ ,则

$f$  需满足  $f:M\rightarrow R$ ,对  $\forall p(x)\in M$ ,假设  $p$  点的局部坐标系为  $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ,若  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_p=0$ ,则称  $p$  为临界点,否则为正则点.常见的临界点有极大值点、极小值点和鞍点,具体见图 2. Morse 点处的 Hessian 矩阵是非奇异的,只有所有的临界点都是 Morse 点,函数  $f$  才称为 Morse 函数.

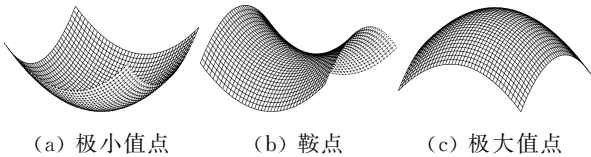


图 2 二维流形上的临界点<sup>[12]</sup>

Fig. 2 Critical point on 2-manifold<sup>[12]</sup>

Banchoff<sup>[13]</sup>用分段线性函数替代光滑函数  $f$  将 Morse 理论推广到三角网格上, $f$  的值定义在三角网格顶点上,通过判断顶点的一环领域内的点来判断临界点.三角网格上光滑的 Morse 函数通常是求解一个拉普拉斯方程得到,即

$$\Delta f_i = \sum_{j \in N_i} w_{ij} (f_j - f_i) \tag{1}$$

式中: $N_i$  为顶点  $i$  的一环领域的所有顶点的集合, $w_{ij}$  表示与顶点  $i$  相连接的边  $(i,j)$  的权重,在三维流形曲面网格上,通过用拉普拉斯矩阵的形式来表示拉普拉斯算子,即

$$\Delta f = -L f; L_{ij} = \begin{cases} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})/2; & i \neq j \\ -\sum_{j \in N_i} L_{ij}; & i = j \\ 0; & \text{其他} \end{cases} \tag{2}$$

式中: $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$  为边  $(i,j)$  的两个三角形的两个对角.  $-L f = \lambda f$ ,特征函数即为计算特征值所对应的特征向量,特征值  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$  所对应的特征向量  $e_1, e_2, \cdots, e_n$ ,随着特征值的增大,频率越来越高,临界点的个数越来越多,在模型上的可视化如图 3 所示.拉普拉斯方程的解称为调和函数,因此拉普拉斯矩阵的特征向量也是离散情形下球面调和函数的基.

2.2 Morse-Smale 复形

Morse 函数  $f$ ,如果它的稳定流形和不稳定流形之间只有横向相交,则  $f$  是 Morse-Smale 函数<sup>[12]</sup>,稳定流形与不稳定流形相交形成的胞腔称为 Morse-Smale 复形. Morse 函数  $f$  定义在三角

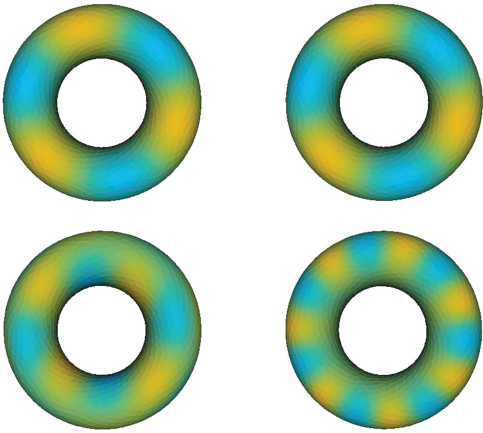


图 3 三角网格模型上调和函数的基  
Fig. 3 Manifold harmonic basis of the input triangle mesh

网格上,  $f$  的值定义在三角网格顶点上, 通过比较顶点的值与一环领域内点的值来判断临界点的类型, 如图 4 所示.

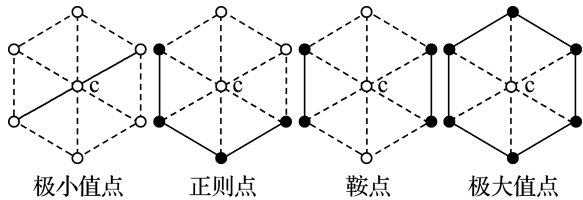


图 4 三角网格上的临界点<sup>[7]</sup>  
Fig. 4 Critical point on triangle mesh<sup>[7]</sup>

Morse-Smale 复形是在一个流形上标量函数的胞腔剖分. 如图 5 所示, 从鞍点出发沿梯度上升或者下降最快的方向, 直到达到极大值点或者极小值点, 一般来说会从鞍点引出两条上升梯度线和两条下降梯度线, 这些路径把流形分成若干四边形区域, 所有的四边形区域都有两个鞍点、一个极大值点、一个极小值点.

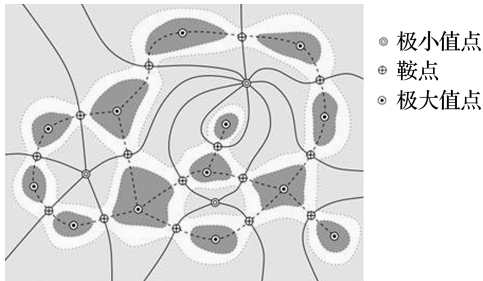


图 5 Morse-Smale 复形<sup>[12]</sup>  
Fig. 5 Morse-Smale complex<sup>[12]</sup>

Morse-Smale 复形的生成直接关系到最终生

成的四边形网格的质量, 而生成 Morse-Smale 复形的关键在于求解 Morse 函数, 在计算 Morse 函数时通常会充分考虑特征对齐约束的要求, 但由于离散化中的精度损失以及噪声点的影响, 临界点不能完全准确地定位在特征线上, 导致 Morse-Smale 复形中的边没能与特征对齐, 因此需要对临界点进行局部扰动, 使其准确定位到特征线上. 本文针对这一点提出了相应的改进算法, 下面将详细说明.

### 3 加入特征约束的 Morse-Smale 复形

生成满足模型特征的网格在曲面四边形化中是非常重要的一个约束要求. 而生成满足模型特征的 Morse-Smale 复形, 关键在于求解拉普拉斯矩阵的特征函数, 即 Morse 函数. 本文给出如何求解特征函数, 使得临界点准确地定位在特征线上.

#### 3.1 加入曲率信息的拉普拉斯矩阵

在计算三角网格上标量函数时, 通过拉普拉斯矩阵的某个特征值的特征向量来定义, 即

$$-L f = \lambda f \quad (3)$$

通过借鉴之前的研究<sup>[8,14]</sup>, 对拉普拉斯矩阵的对角线进行扰动. 在拉普拉斯方程中加入了模型曲率的信息, 使用三角网格曲面模型顶点上的高斯曲率, 并归一化:

$$k(v) = \frac{1}{2\pi} \left( 2\pi - \sum_{v_i \in N_1(v)} \theta_i \right) \quad (4)$$

其中  $\theta_i$  为点  $v$  的一环领域的三角形中所对应的顶点为  $v$  的角的大小. 曲率反映了模型表面的弯曲程度, 刻画了模型的几何特征信息, 求解特征函数的方程定义如下:

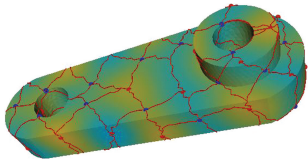
$$-L f = \lambda (I + K) f \Rightarrow -(I + K)^{-1} L f = \lambda f \quad (5)$$

其中矩阵  $K$  为对角矩阵, 对角线上的元素  $k_i$  等于第  $i$  个顶点  $v_i$  处的高斯曲率.

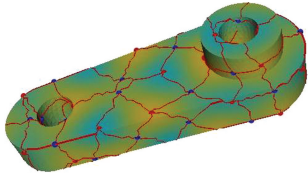
拉普拉斯矩阵在加入曲率信息后, 临界点会因为加入的曲率值而进行相应的位置扰动, 临界点能够更加精确地定位到模型特征的地方, 生成的 Morse-Smale 复形更加贴合模型的特征, 如图 6 所示.

#### 3.2 特征函数的迭代算法

通过计算拉普拉斯矩阵  $L$  的某个特征值  $\lambda_k$  的特征向量来作为特征函数  $f$ , 在这里一般使用的是 ARPACK 稀疏矩阵特征问题求解器来求解, 求解出来的只能是特定的数值  $\lambda_k$  所对应的特征函数, 特征函数的选取不具有灵活性, 具体体现



(a) 加入曲率信息之前的结果



(b) 加入曲率信息之后的结果

图 6 加入曲率信息前后 Morse-Smale 复形对比结果

Fig. 6 Morse-Smale complex result comparison before and after adding curvature information

在以下两个方面：

(1) 2.1 节分析的临界点个数随着特征值的数值增大而增多，如果在求解中  $\lambda_k$  所对应的特征函数  $f_k$  的临界点个数偏少，而  $\lambda_{k+1}$  所对应的特征函数  $f_{k+1}$  的临界点个数偏多，根据原始的方法不能求得  $f_k$  和  $f_{k+1}$  之间的特征函数；

(2) 想要对特征值  $\lambda_k$  所对应的特征函数  $f_k$  做少许的扰动，或者是对局部顶点上的特征函数做扰动，使得临界点移动到模型特征的地方，根据原始的方法也没有办法实现。

从以上两点可以看出，特征函数的选取受到局限，因此本文提出了一种迭代算法来计算特征函数。

根据式(5)，记  $\tilde{L} = (I + K)^{-1}L$ ，式(5)变为

$$-\tilde{L}f = \lambda f \Rightarrow -(\tilde{L} + \lambda I)f = 0 \quad (6)$$

对于任意的顶点  $v_i$ ，式(6)的第  $i$  行可以写为

$$-\left[(\tilde{L}_{ii} + \lambda)f_i + \sum_{j \in N_i} \tilde{L}_{ij}f_j\right] = 0 \Rightarrow f(v_i) = \frac{\sum_{j \in N_i} \tilde{L}_{ij}f(v_j)}{-(\tilde{L}_{ii} + \lambda)} \quad (7)$$

这里  $\lambda$  不仅限于特征值，可以是任意数值，则相对应求解出来的  $f$  就更具有灵活性，则迭代公式即为式(7)。根据拉普拉斯算子的离散形式(1)，定义全局  $M$  上的调和能量<sup>[15]</sup>

$$E(f) = \sum_{[v_i, v_j] \in M} w_{ij}(f(v_j) - f(v_i))^2; w_{ij} = L_{ij} \quad (8)$$

当迭代求解趋于稳定时，调和能量逐渐减小并

趋于 0。想要对特征值  $\lambda_k$  所对应的特征函数  $f_k$  做相应扰动，就将  $f_k$  作为迭代初值。算法流程如下：

输入：拉普拉斯矩阵  $L$ 。

输出：特征函数  $f$ 。

**Step 1** 计算矩阵  $L$  的特征值  $\lambda_k$  所对应的特征函数  $f_k$ ，将  $f_k$  作为迭代的初值  $f^0$ 。

**Step 2** 计算调和能量  $E_0$ 。

**Step 3** 对所有网格上的点进行更新：

$$f^{m+1}(v_i) = \frac{\sum_{j \in N_i} \tilde{L}_{ij}f^m(v_j)}{-(\tilde{L}_{ii} + \lambda_k \pm \delta)}$$

**Step 4** 计算调和能量  $E_{m+1}$ ，当  $|E_{m+1} - E_m| < \epsilon$  时，停止迭代，否则返回 Step3。

### 3.3 加入特征信息

在模型表面生成四边形网格时，希望生成的网格的边能与模型的特征线对齐，在基于 Morse 理论生成四边形网格的过程中，Morse-Smale 复形的边一定是四边形网格的边，所以生成的 Morse-Smale 复形的边与模型的特征线对齐。在本文算法中，关键是让 Morse-Smale 复形的临界点准确定位到模型的特征线上，步骤如下：

(1) 首先在模型的表面画出特征线，在本文中，为了验证算法的效果，只选取了部分特征线，特征线的集合为  $S_c$ ，定义这些边的特征属性作为输入，如图 7 所示

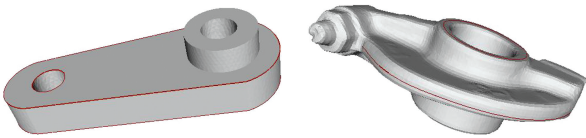


图 7 加入特征线信息

Fig. 7 Adding feature line information

(2) 在 3.2 节的迭代算法流程中，针对 Step 3，如果  $[v_i, v_j] \in S_c$ ， $\mu_{ij} > 1$ ，否则  $\mu_{ij} = 1$ 。针对不同的模型  $\mu_{ij}$  的取值不同，在本文的模型中  $\mu_{ij} \in [1, 2]$ 。特征函数的迭代公式为

$$f^{k+1}(v_i) = \frac{\sum_{j \in N_i} \mu_{ij} \tilde{L}_{ij}f^k(v_j)}{-(\tilde{L}_{ii} + \lambda_k \pm \delta)} \quad (9)$$

即增大特征线的权重。通过增大特征线的权重，就可以使得原本在特征线附近的临界点，准确定位到特征线上，并且采用迭代的算法，对不是特征线上的点没有产生太大的影响，如图 8 给出了增加特征线权重前后的结果对比。

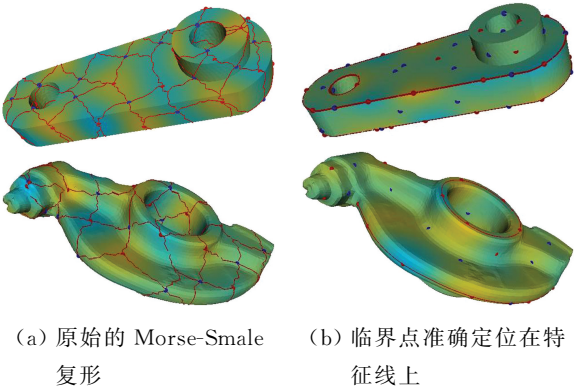


图 8 加入特征线的临界点前后对比图  
Fig.8 Comparison diagrams of critical points before and after adding feature line

从图中可以看出,临界点都准确地定位到了特征线上,并且其他位置的特征点没有发生太大的变化.从之前的分析也可以知道,Morse-Smale 复形的边都是从鞍点出发,连向极大值点或极小值点,因此,只要临界点在特征线上,Morse-Smale 复形的边大多就会沿着特征线,少数情况下在特征线上存在两个相邻的临界点为极值点,两个点之间没有复形的边,此时可以通过对偶操作或者补齐操作来优化,补齐操作的优化过程在下一节会详细介绍,优化使得生成的复形的边可以沿着模型的特征线,如图 9 所示,蓝线是补齐算法补齐的特征线.

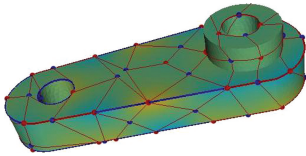


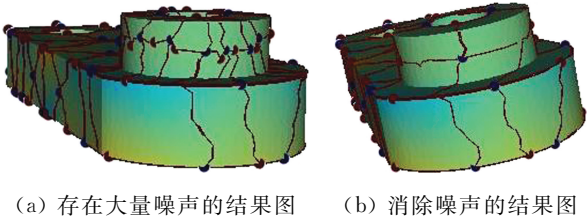
图 9 沿特征线的复形结果图  
Fig.9 Complex result diagram along feature line

## 4 Morse-Smale 复形的优化

### 4.1 噪声点的消除

初步生成的 Morse-Smale 复形会产生很多的噪声点,如图 10 所示.

通过持久性简化<sup>[16]</sup>来消除不稳定的点对.在生成的 Morse-Smale 复形中,对于两个相邻的临界点  $v_i, v_j$ ,它们对应于特征函数所对应的标量场的一组拓扑特征,持久性值定义为两个点的函数值之差的绝对值,即  $|f(v_i) - f(v_j)|$ ,其是描述移除这个拓扑特征时,特征函数的变化量,持久性值较小的点对属于不稳定点对,要进行消除.一对



(a) 存在大量噪声的结果图 (b) 消除噪声的结果图  
图 10 Morse-Smale 噪声点消除前后结果图  
Fig.10 Morse-Smale complex result diagram with and without noise

相邻的临界点,必然一个是鞍点,另一个是极值点,定义在它们上的消除操作是指将鞍点和极值点消除,同时将所有连向该极值点的梯度线连向鞍点的另一个同属性的极值点.如图 11 所示.

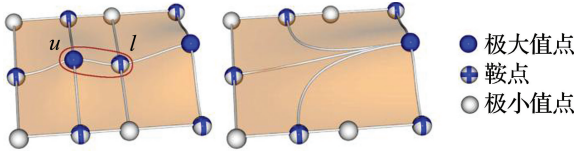


图 11 持久性简化操作  
Fig.11 Persistence simplified operation

### 4.2 几何优化

希望生成的 Morse-Smale 复形是近似于正方形或者矩形,但是由于根据特征函数计算梯度线过程中的不可控制性,初始复形的形状可能会出现菱形、梯形等,如果不对其优化,会对后续参数化生成四边形网格的质量产生影响,因此对全局的复形进行形状的优化.

(1)文献[14]中提到通过参数化和松弛迭代的方法来重新定位复形的边缘点,文献[8]中由于加入了特征线,为了不使复形的边缘偏离特征线,对文献[14]的方法进行了扩充,固定特征线上的参数化值,借鉴文献[8]的算法,可以对复形的边缘进行优化;

(2)本文迭代算法中,需要对特征线上相邻的两个极值点之间进行补齐操作,由此一个复形区域被分割成了两个三角形,针对因为这种情况生成的三角形区域,可以对这些区域采用“分而治之”的思想,将 1 个三角形剖分成 3 个四边形.

## 5 四边形网格生成

优化完成后的 Morse-Smale 复形可以保证生成高质量的四边形网格.将每一个复形区域参数化到平面上,这一步可以通过调和映射完

成<sup>[15]</sup>,根据密度要求 $d$ ,在二维平面上生成规则的 $d\times d$ 维的四边形网格,再将其映回到模型表面,输出四边形网格.

本文给出了几种模型迭代结果,如图 12(c),临界点可以很准确地与特征线对齐,通过补齐操

作可以实现最终的保特征四边形网格生成;图 12(d)给出了补齐操作的结果.几何优化部分和最后的分区域参数化四边形网格生成都是非常成熟的算法,在本文中没有显示,可以在以后的优化中实现.

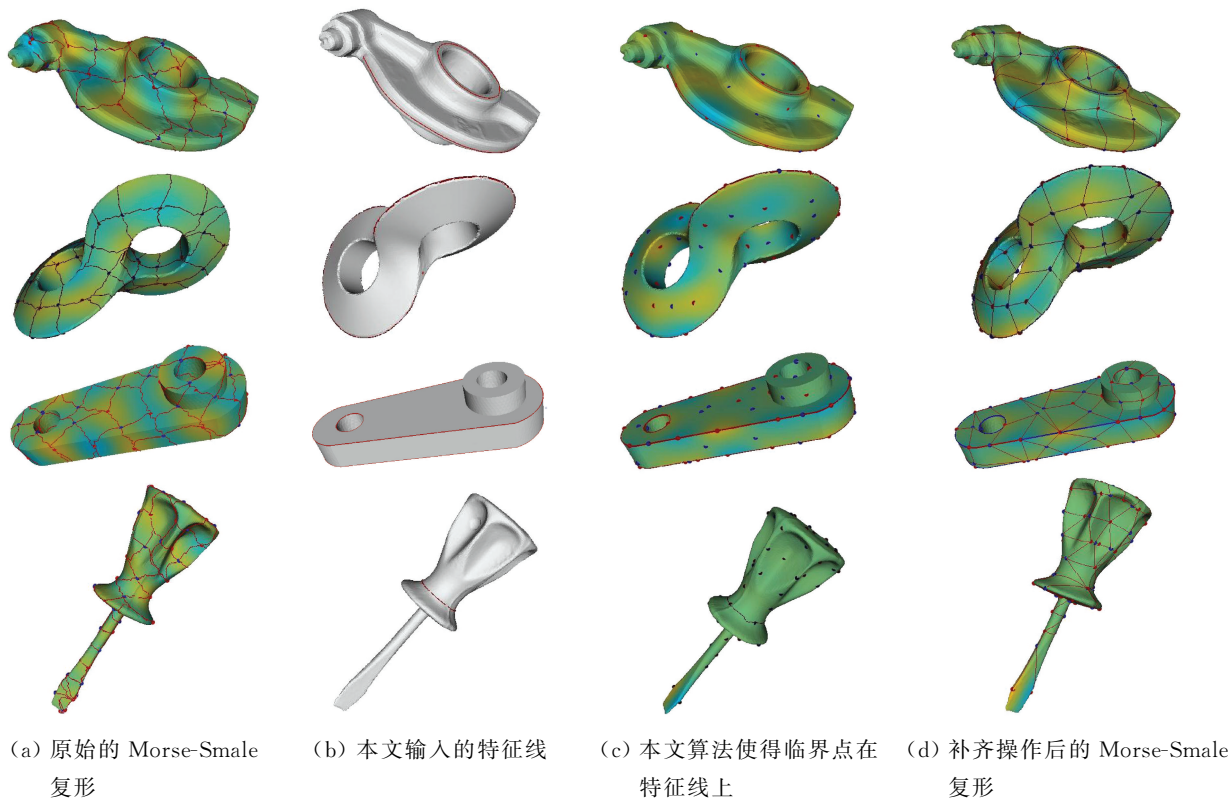


图 12 4 个模型的结果  
Fig. 12 The results of four models

6 结 语

本文在 Morse 理论的基础上,提出了一种特征函数的新计算方法.通过迭代算法计算特征函数,使得特征函数的选取更加具有灵活性;在迭代算法中加入特征约束,可以将临界点准确定位在特征线上,生成 Morse-Smale 复形;最后对初始形成的 Morse-Smale 复形进行拓扑优化和几何优化,进而生成保特征的四边形网格.本文所展示的结果与文献[8-11]的结果相比,存在不足,但是本文提出了计算特征函数的一种特殊的新算法,并且这个算法实现了临界点对齐这一好的结果,对后续的保特征的四边形网格生成起到了关键作用,在优化完成后也可以生成质量较好的四边形网格,并且本文提出的算法简单,易于实现,输入信息较少,计算效率高.

后续的研究工作包括以下内容:(1)实现对目前四边形网格的优化,并将本文算法应用到实际问题中,验证其有效性;(2)将本文的算法推广到高维,生成三维的 Morse-Smale 复形,进而生成六面体网格.

参考文献:

[1] VAXMAN A, CAMPEN M, DIAMANTI O, et al. Directional field synthesis, design, and processing [C] // ACM SIGGRAPH 2017 Courses, SIGGRAPH 2017. Los Angeles: ACM, 2016: 545-572.

[2] PALACIOS J, ZHANG E. Rotational symmetry field design on surfaces [C] // ACM SIGGRAPH 2007 Papers - International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. San Diego: ACM, 2007: 55.

- [3] LI Xin, IYENGAR S S. On computing mapping of 3D objects [J]. **ACM Computing Surveys**, 2015, **47**(2): 34.
- [4] LEI Na, ZHENG Xiaopeng, JIANG Lian, *et al.* Quadrilateral and hexahedral mesh generation based on surface foliation theory [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2017, **316**: 758-781.
- [5] BOIER-MARTIN I, RUSHMEIER H, JIN Jingyi. Parameterization of triangle meshes over quadrilateral domains [C] // **ACM International Conference Proceeding Series**. Nice: ACM, 2004: 193-203.
- [6] CARR N A, HOBEROCK J, CRANE K, *et al.* Rectangular multi-chart geometry images [C] // **Proceedings of the Fourth Eurographics Symposium on Geometry Processing**. Vienna: The Eurographics Association, 2006: 181-190.
- [7] DONG S, BREMER P T, GARLAND M, *et al.* Quadrangulating a mesh using Laplacian eigenvectors: Technical Report UIUCD CS-R-2005-2583 [R]. Illinois: UIUC, 2005.
- [8] HUANG Jin, ZHANG Muyang, JIN Ma, *et al.* Spectral quadrangulation with orientation and alignment control [J]. **ACM Transactions on Graphics**, 2008, **27**(5): 147.
- [9] ZHANG Muyang, HUANG Jin, LIU Xinguo, *et al.* A wave-based anisotropic quadrangulation method [J]. **ACM Transactions on Graphics**, 2010, **29**(4): 118.
- [10] LING Guotian, HUANG Jin, JUTTLE B, *et al.* Spectral quadrangulation with feature curve alignment and element size control [J]. **ACM Transactions on Graphics**, 2014, **34**(1): A11.
- [11] FANG Xianzhong, BAO Hujun, TONG Yiyi, *et al.* Quadrangulation through Morse-parameterization hybridization [J]. **ACM Transactions on Graphics**, 2018, **37**(4): A53.
- [12] ZOMORODIAN A J. **Topology for Computing** [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005: 16.
- [13] BANCHOFF T F. Critical points and curvature for embedded polyhedral surfaces [J]. **American Mathematical Monthly**, 1970, **77**(5): 475-485.
- [14] DONG Shen, BREMER P, GARLAND M, *et al.* Spectral surface quadrangulation [J]. **ACM Transactions on Graphics**, 2006, **25**(3): 1057-1066.
- [15] 钱 坤. 基于调和映射的曲面离散化映射方法 and 应用 [D]. 昆明: 昆明理工大学, 2018.  
QIAN Kun. Discrete mapping method and application based on harmonic mapping [D]. Kunming: Kunming University of Science and Technology, 2018. (in Chinese)
- [16] EDELSBRUNNER H, LETSCHER D, ZOMORODIAN A. Topological persistence and simplification [C] // **41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2000)**. Los Alamitos: IEEE, 2003.

## Improved Morse algorithm for feature-preserving quadrilateral mesh generation

JI Ranran, ZHENG Xiaopeng, LEI Na, LUO Zhongxuan\*

( School of Software Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116620, China )

**Abstract:** Based on the Morse theory, an iterative algorithm is proposed to calculate the eigenfunction, and a feature-preserving quadrilateral mesh is generated by optimization. Firstly, the calculated eigenfunction is more in line with the geometric characteristics of the model by addition of the curvature term in the Laplacian matrix. Then, the eigenfunction calculated by iterative algorithm is not only the eigenvector corresponding to the eigenvalue, but also any arbitrary value. This approach makes the selection of eigenfunctions more flexible for the follow-up. Finally, the feature line information is added to the iterative algorithm, so the resulting eigenfunction can accurately locate the critical point on the feature line, then generate a feature-alignment Morse-Smale complex. By optimization, the final feature-preserving quadrilateral mesh is generated. The proposed algorithm is simple, easy to implement and less input.

**Key words:** Morse theory; iterative algorithm; feature-preserving; quadrilateral mesh