第60卷第6期
2020年11月

大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology

Vol. 60， No. 6
Nov. 2020

文章编号：1000-8608(2020)06-0663-04

扩张 Schrodinger-Virasoro李代数及其一些子代数研究

余德民， 李 笛， 柴嘉潞， 罗德仁*

（湖南理工学院 数学学院，湖南 岳阳 414000）

摘要： 研究了无限维李代数 Schrodinger-Virasoro 的性质，这类李代数是 Virasoro 李代数的推广．研究了这类李代数同构及其李子代数的一些性质，例如李子代数 $\boldsymbol{g}^{-}$、$\boldsymbol{g}^{0^{-}}$，且 $\boldsymbol{g}^{-}\subset\boldsymbol{g}^{0^{-}}\subset\boldsymbol{g}$．进一步研究了其李子代数 $\boldsymbol{g}_2$、$\boldsymbol{g}_3$，证明 $\boldsymbol{g}_3$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维交换理想，从而证明了李代数 Schrodinger-Virasoro 不是半单李代数，也不是单李代数．

关键词： 李代数；同构；理想

中图分类号： O152.5　　**文献标识码：** A　　**doi：** 10.7511/dllgxb202006015

0 引 言

无中心的 Virasoro 李代数（简化为$\overline{vir}$），为 $\mathbf{C}$ 上由 $\boldsymbol{F}_i$（$\forall i\in\mathbf{Z}$）线性张成的无限维线性空间，运算如下：$[\boldsymbol{F}_i,\boldsymbol{F}_j]=(j-i)\boldsymbol{F}_{i+j}$（$\forall i,j\in\mathbf{Z}$）．$\overline{vir}$为单李代数．本文研究扩张李代数 Schrodinger-Virasoro，这类李代数是 Virasoro 李代数的推广，Virasoro 李代数在数学和理论物理中尤其是共形理论和弦论中有非常重要的应用．$\boldsymbol{g}$ 为 $\mathbf{C}$ 上线性空间，其基向量为（$\boldsymbol{L}_i$　$\boldsymbol{M}_i$　$\boldsymbol{Y}_{i+\frac{1}{2}}$　$\boldsymbol{N}_i$）（$\forall i\in\mathbf{Z}$），张成的复数域 $\mathbf{C}$ 上的线性空间，李运算定义如下：

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{L}_n]=(n-m)\boldsymbol{L}_{n+m}$，$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{M}_n]=n\boldsymbol{M}_{n+m}$，$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{M}_n]=\boldsymbol{0}$；

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=\left(n+\frac{1}{2}-\frac{m}{2}\right)\boldsymbol{Y}_{n+m+\frac{1}{2}}$，$[\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{M}_m]=\boldsymbol{0}$，$[\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}},\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=(n-m)\boldsymbol{M}_{n+m+1}$；

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{N}_n]=n\boldsymbol{N}_{n+m}$，$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{N}_n]=-2\boldsymbol{M}_{n+m}$，$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{N}_n]=\boldsymbol{0}$，$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=\boldsymbol{Y}_{m+n+\frac{1}{2}}$

此运算在基向量上线性扩张，并满足反对称性和 Jacobi 不等式，称 $\boldsymbol{g}$ 为扩张李代数 Schrodinger-Virasoro，文献[1]研究了扩张李代数 Schrodinger-Virasoro 的结构，文献[2]研究了 Schrodinger-Virasoro 的表示．文献[3-7]研究了 Virasoro 李代数及其推广的 Virasoro 李代数，文献[8-10]研究了推广的 Virasoro 李代数的结构分类、导子、自同构和最高权模．本文研究这类李代数的子代数、同构．

1 主要结果

定义 1　若李代数 $\boldsymbol{g}$ 无非零的交换理想，则称 $\boldsymbol{g}$ 为半单李代数．又若李代数 $\boldsymbol{g}$ 还无非平凡的理想，则称 $\boldsymbol{g}$ 为单李代数．

定义 2　设由 $\boldsymbol{L}_i$（$\forall i\geqslant 2,i\in\mathbf{Z}$）张成的子空间为 $\boldsymbol{g}_2$．

定理 1　$\boldsymbol{g}_2$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数．

证明　$\forall i\geqslant 2,j\geqslant 2,i,j\in\mathbf{Z}$，可验证

$$[\boldsymbol{L}_i,\boldsymbol{L}_j]=(j-i)\boldsymbol{L}_{i+j}\tag{1}$$

从而，$\boldsymbol{g}_2$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的子代数，$\boldsymbol{g}_2$ 也是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数．

定理 2　$\boldsymbol{g}_2$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的半单李子代数．

证明　由于 $\forall i\geqslant 2,i\in\mathbf{Z}$，$\forall j\geqslant 2,j\in\mathbf{Z}$，$\boldsymbol{L}_i\in\boldsymbol{g}_2$，$\boldsymbol{L}_j\in\boldsymbol{g}_2$

$$[\boldsymbol{L}_i,\boldsymbol{L}_j]=(j-i)\boldsymbol{L}_{i+j}$$

收稿日期： 2020-07-05；　**修回日期：** 2020-09-20.
基金项目： 国家自然科学基金资助项目(11771135,11901191)；湖南理工学院科研创新团队资助项目(2019-TD-15).
作者简介： 余德民(1975-)，男，博士，副教授，E-mail：yudeming8640024@126.com；李 笛(1998-)，女，硕士生，E-mail：1793338770@qq.com；柴嘉潞(1998-)，女，硕士生，E-mail：1961006970@qq.com；罗德仁*(1987-)，男，博士，副教授，E-mail：79274188@qq.com.

$\boldsymbol{g}_2$ 无二维交换李子代数，反证假设 $\boldsymbol{h}$ 为 $\boldsymbol{g}_2$ 的二维交换子代数，设 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{h}$ 的基，则 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，设

$$\boldsymbol{x}=k_2\boldsymbol{L}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{L}_{n-1}+k_n\boldsymbol{L}_n$$
$$\boldsymbol{y}=l_2\boldsymbol{L}_2+\cdots+l_{n-1}\boldsymbol{L}_{n-1}+l_n\boldsymbol{L}_n$$

观察矩阵：

$$\begin{pmatrix} k_2 & k_3 & \cdots & k_{n-1} & k_n \\ l_2 & l_3 & \cdots & l_{n-1} & l_n \end{pmatrix}\ (k_n,l_n\ \text{不全为零})$$

因为 $\boldsymbol{h}$ 为交换子代数，所以

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

仔细观察系数矩阵，式(2)左边经过具体计算之后可知 $\boldsymbol{L}_{2n-1}$ 系数为

$$\begin{vmatrix} k_{n-1} & k_n \\ l_{n-1} & l_n \end{vmatrix}=0$$

同理观察 $\boldsymbol{L}_{2n-2}$ 的系数

$$\begin{vmatrix} k_{n-2} & k_n \\ l_{n-2} & l_n \end{vmatrix}=0$$

利用行列式有关知识，又 k_n、l_n 不全为零，因为

$$\begin{vmatrix} k_{n-1} & k_n \\ l_{n-1} & l_n \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} k_{n-2} & k_n \\ l_{n-2} & l_n \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} k_{n-2} & k_{n-1} \\ l_{n-2} & l_{n-1} \end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

于是 $\boldsymbol{L}_{2n-3}$ 的系数

$$\begin{vmatrix} k_{n-2} & k_{n-1} \\ l_{n-2} & l_{n-1} \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_n \\ l_{n-3} & l_n \end{vmatrix}=0$$

根据式(3)，有 $\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_n \\ l_{n-3} & l_n \end{vmatrix}=0$，又考虑 $\boldsymbol{L}_{2n-4}$ 系数

$$4\begin{vmatrix} k_{n-4} & k_n \\ l_{n-4} & l_n \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_{n-1} \\ l_{n-3} & l_{n-1} \end{vmatrix}=0$$

利用前述结论有 $\begin{vmatrix} k_{n-4} & k_n \\ l_{n-4} & l_n \end{vmatrix}=0$，从前述有 $\begin{vmatrix} k_{n-1} & k_n \\ l_{n-1} & l_n \end{vmatrix}=0$，从而有 $\begin{vmatrix} k_{n-4} & k_{n-1} \\ l_{n-4} & l_{n-1} \end{vmatrix}=0$，从前面有 $\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_n \\ l_{n-3} & l_n \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} k_{n-2} & k_n \\ l_{n-2} & l_n \end{vmatrix}=0$，从而有 $\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_{n-2} \\ l_{n-3} & l_{n-2} \end{vmatrix}=0$，又考虑 $\boldsymbol{L}_{2n-5}$ 的系数

$$5\begin{vmatrix} k_{n-5} & k_n \\ l_{n-5} & l_n \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} k_{n-4} & k_{n-1} \\ l_{n-4} & l_{n-1} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_{n-2} \\ l_{n-3} & l_{n-2} \end{vmatrix}=0$$

利用前面结论有 $\begin{vmatrix} k_{n-4} & k_{n-1} \\ l_{n-4} & l_{n-1} \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} k_{n-3} & k_{n-2} \\ l_{n-3} & l_{n-2} \end{vmatrix}=0$，从而 $\begin{vmatrix} k_{n-5} & k_n \\ l_{n-5} & l_n \end{vmatrix}=0$，依此类推 $\begin{vmatrix} k_i & k_n \\ l_i & l_n \end{vmatrix}=0(i=2,3,\cdots,n-1)$.

所以 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 对应的系数成比例，$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 线性相关，这与 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 为基矛盾. 从而 $\boldsymbol{g}_2$ 无二维及二维以上的交换理想，假设 $\bar{\boldsymbol{g}}$ 是 $\boldsymbol{g}_2$ 一维的交换理想，设

$$\boldsymbol{x}\in\bar{\boldsymbol{g}},\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n}k_{i_j}\boldsymbol{L}_{i_j},$$
$$k_{i_j}\neq0,\ i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}<i_n$$

由于 $\bar{\boldsymbol{g}}$ 是一维的，从而 $\bar{\boldsymbol{g}}$ 由基向量 $\boldsymbol{x}$ 线性张成. 令 $m>i_n$，$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{L}_m]\notin\bar{\boldsymbol{g}}$ 与 $\bar{\boldsymbol{g}}$ 是 $\boldsymbol{g}_2$ 一维的交换理想矛盾，从而原命题成立.

构造 $\boldsymbol{g}_2$ 到 $\overline{vir}$ 映射如下：

$$\phi_1:\boldsymbol{g}_2\to\overline{vir},\ \phi_1(\boldsymbol{L}_i)=\boldsymbol{F}_i(\forall\boldsymbol{L}_i\in\boldsymbol{g}_1)$$

ϕ_1 在 $\boldsymbol{g}_2$ 的基向量 $\boldsymbol{L}_i$ 上线性扩张.

定理3 ϕ_1 是 $\boldsymbol{g}_2$ 到 $\overline{vir}$ 的子代数的同构.

证明 从构造知 ϕ_1 是 $\boldsymbol{g}_2$ 到 $\overline{vir}$ 同构的线性映射，且是单射. 可验证

$$\phi_1([\boldsymbol{L}_i,\boldsymbol{L}_j])=[\phi_1(\boldsymbol{L}_i),\phi_1(\boldsymbol{L}_j)];$$
$$\forall i\geqslant2,j\geqslant2,i,j\in\mathbf{Z}$$

从而对 $\forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{g}$，$\phi_1([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}])=[\phi_1(\boldsymbol{u}),\phi_1(\boldsymbol{v})]$，从而 ϕ_1 是 $\boldsymbol{g}_2$ 到 $\overline{vir}$ 的子代数的同构.

定义3 设由 $\boldsymbol{M}_i(\forall i\in\mathbf{Z})$ 张成的子空间为 $\boldsymbol{g}_3$.

定理4 李代数 $\boldsymbol{g}$ 不是单李代数，也不是半单李代数.

证明 先证明 $\boldsymbol{g}_3$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维交换子代数，并且 $\boldsymbol{g}_3$ 是李代数 $\boldsymbol{g}$ 的交换理想，$\forall i,j\in\mathbf{Z}$，由于

$$[\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{M}_j]=\boldsymbol{0}$$

从而 $\boldsymbol{g}_2$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维交换子代数，$\forall m,n\in\mathbf{Z}$，由于

$$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{M}_n]=n\boldsymbol{M}_{n+m},\ [\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{M}_n]=\boldsymbol{0},$$
$$[\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{M}_m]=\boldsymbol{0},\ [\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{N}_n]=-2\boldsymbol{M}_{n+m}$$

从而 $\boldsymbol{g}_2$ 是李代数 $\boldsymbol{g}$ 的交换理想. 从而原命题成立. 构造 $\boldsymbol{g}$ 到 $\boldsymbol{g}$ 映射如下：

$$\varphi_2:\boldsymbol{g}\to\boldsymbol{g},\ \varphi_2(\boldsymbol{L}_i)=a^i\boldsymbol{L}_i,\ \varphi_2(\boldsymbol{N}_i)=a^i\boldsymbol{N}_i,$$

$\varphi_2(\boldsymbol{M}_i)=a^i\boldsymbol{M}_i$，$\varphi_2(\boldsymbol{Y}_{i+\frac{1}{2}})=a^{i+\frac{1}{2}}\boldsymbol{Y}_{i+\frac{1}{2}}$

$\forall \boldsymbol{L}_i, \boldsymbol{M}_i, \boldsymbol{Y}_{i+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{N}_i\in \boldsymbol{g}, a>0$

φ_2 在 $\boldsymbol{g}$ 的基向量($\boldsymbol{M}_i \quad \boldsymbol{L}_i \quad \boldsymbol{Y}_{i+\frac{1}{2}} \quad \boldsymbol{N}_i$)上线性扩张.

定理 5　φ_2 是 $\boldsymbol{g}$ 到 $\boldsymbol{g}$ 的同构.

证明　从构造知 φ_2 是 $\boldsymbol{g}$ 到 $\boldsymbol{g}$ 同构的线性映射，且是单射. 可验证 $\forall i,j,n,m\in \boldsymbol{Z}$，$\varphi_2([\boldsymbol{L}_i,\boldsymbol{L}_j])=[\varphi_2(\boldsymbol{L}_i),\varphi_2(\boldsymbol{L}_j)]$，$\varphi_2([\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{M}_j])=[\varphi_2(\boldsymbol{M}_i),\varphi_2(\boldsymbol{M}_j)]$，$\varphi_2([\boldsymbol{L}_i,\boldsymbol{M}_j])=[\varphi_2(\boldsymbol{L}_i),\varphi_2(\boldsymbol{M}_j)]$，$\varphi_2([\boldsymbol{L}_i,\boldsymbol{Y}_{j+\frac{1}{2}}])=[\varphi_2(\boldsymbol{L}_i),\varphi_2(\boldsymbol{Y}_{j+\frac{1}{2}})]$，$\varphi_2([\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{M}_n])=[\varphi_2(\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}),\varphi_2(\boldsymbol{M}_n)]$，$\varphi_2([\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}}])=[\varphi_2(\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}),\varphi_2(\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}})]$，$\varphi_2([\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}])=[\varphi_2(\boldsymbol{N}_m),\varphi_2(\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}})]$，$\varphi_2([\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{N}_n])=[\varphi_2(\boldsymbol{L}_m),\varphi_2(\boldsymbol{N}_n)]$，$\varphi_2([\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{N}_n])=[\varphi_2(\boldsymbol{M}_m),\varphi_2(\boldsymbol{N}_n)]$，$\varphi_2([\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{N}_n])=[\varphi_2(\boldsymbol{N}_m),\varphi_2(\boldsymbol{N}_n)]$，从而对 $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{g}$，$\varphi_2([\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}])=[\varphi_2(\boldsymbol{u}),\varphi_2(\boldsymbol{v})]$，从而 φ_2 是 $\boldsymbol{g}$ 到 $\boldsymbol{g}$ 的同构.

定义 4　设由 $\boldsymbol{L}_i,\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{N}_i,\boldsymbol{Y}_{i+\frac{1}{2}}$($\forall i<0, i\in \boldsymbol{Z}$)张成的子空间为 $\boldsymbol{g}^-$.

定理 6　$\boldsymbol{g}^-$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数.

证明　$\forall m<0, n<0, m,n\in \boldsymbol{Z}$，可验证

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{L}_n]=(n-m)\boldsymbol{L}_{n+m}$，$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{M}_n]=n\boldsymbol{M}_{n+m}$，

$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{M}_n]=\boldsymbol{0}$；

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=\left(n+\dfrac{1}{2}-\dfrac{m}{2}\right)\boldsymbol{Y}_{n+m+\frac{1}{2}}$，

$[\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{M}_m]=\boldsymbol{0}$，$[\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}},\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=(n-m)\boldsymbol{M}_{n+m+1}$；

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{N}_n]=n\boldsymbol{N}_{n+m}$，$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{N}_n]=-2\boldsymbol{M}_{n+m}$，

$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{N}_n]=\boldsymbol{0}$，$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=\boldsymbol{Y}_{m+n+\frac{1}{2}}$

从而 $\boldsymbol{g}^-$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数.

定义 5　设由 $\boldsymbol{L}_i,\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{N}_i,\boldsymbol{Y}_{i+\frac{1}{2}}$($\forall i\leqslant 0, i\in \boldsymbol{Z}$)张成的子空间为 $\boldsymbol{g}^{0^-}$.

定理 7　$\boldsymbol{g}^{0^-}$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数.

证明　$\forall m\leqslant 0, n\leqslant 0, m,n\in \boldsymbol{Z}$，可验证

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{L}_n]=(n-m)\boldsymbol{L}_{n+m}$，$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{M}_n]=n\boldsymbol{M}_{n+m}$，

$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{M}_n]=\boldsymbol{0}$；

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=\left(n+\dfrac{1}{2}-\dfrac{m}{2}\right)\boldsymbol{Y}_{n+m+\frac{1}{2}}$，

$[\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{M}_m]=\boldsymbol{0}$，$[\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}},\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=(n-m)\boldsymbol{M}_{n+m+1}$；

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{N}_n]=n\boldsymbol{N}_{n+m}$，$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{N}_n]=-2\boldsymbol{M}_{n+m}$，

$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{N}_n]=\boldsymbol{0}$，$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=\boldsymbol{Y}_{m+n+\frac{1}{2}}$

从而 $\boldsymbol{g}^{0^-}$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数.

显然，$\boldsymbol{g}^-\subset\boldsymbol{g}^{0^-}\subset\boldsymbol{g}$.

定理 8　$\boldsymbol{g}^-$ 是 $\boldsymbol{g}^{0^-}$ 的无限维非交换子代数，$\boldsymbol{g}^-$ 是 $\boldsymbol{g}^{0^-}$ 理想.

证明　由于 $\boldsymbol{g}^-$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数，当然 $\boldsymbol{g}^-$ 是 $\boldsymbol{g}^{0^-}$ 的无限维非交换子代数. $\forall m>0$，$n>0, m,n\in \boldsymbol{Z}$，可验证

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{L}_0]=-m\boldsymbol{L}_m$，$[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{M}_n]=\boldsymbol{0}$，

$[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}}$，$[\boldsymbol{L}_0,\boldsymbol{N}_n]=n\boldsymbol{N}_n$；

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{M}_0]=\boldsymbol{0}$，$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{M}_0]=\boldsymbol{0}$，

$[\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}},\boldsymbol{M}_0]=\boldsymbol{0}$，$[\boldsymbol{M}_0,\boldsymbol{N}_n]=-2\boldsymbol{M}_m$；

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{N}_0]=\boldsymbol{0}$，$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{N}_0]=-2\boldsymbol{M}_m$，

$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{N}_0]=\boldsymbol{0}$，$[\boldsymbol{N}_0,\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}$；

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{Y}_{0+\frac{1}{2}}]=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{m}{2}\right)\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}}$，$[\boldsymbol{Y}_{0+\frac{1}{2}},\boldsymbol{M}_n]=\boldsymbol{0}$，

$[\boldsymbol{Y}_{0+\frac{1}{2}},\boldsymbol{Y}_{n+\frac{1}{2}}]=-m\boldsymbol{M}_{m+1}$，$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{Y}_{0+\frac{1}{2}}]=\boldsymbol{Y}_{m+\frac{1}{2}}$

从而 $\boldsymbol{g}^-$ 是 $\boldsymbol{g}^{0^-}$ 理想.

定义 6　设由 $\boldsymbol{M}_i,\boldsymbol{N}_i$($\forall i\in \boldsymbol{Z}$)张成的子空间为 $\boldsymbol{g}_{13}$. 如前所述 $\boldsymbol{M}_i$($\forall i\in \boldsymbol{Z}$)张成的子空间为 $\boldsymbol{g}_3$.

定理 9　$\boldsymbol{g}_{13}$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数，$\boldsymbol{g}_3$ 是 $\boldsymbol{g}_{13}$ 的理想，$\boldsymbol{g}_{13}$ 不是单李代数，也不是半单李代数.

证明　$\forall m>0, n>0, m,n\in \boldsymbol{Z}$，可验证

$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{M}_n]=\boldsymbol{0}$，$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{N}_n]=-2\boldsymbol{M}_{n+m}$，$[\boldsymbol{N}_m,\boldsymbol{N}_n]=\boldsymbol{0}$

从而 $\boldsymbol{g}_{13}$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数. 显然 $\boldsymbol{g}_3$ 是 $\boldsymbol{g}_{13}$ 的交换理想，$\boldsymbol{g}_{13}$ 不是单李代数，也不是半单李代数.

定义 7　设由 $\boldsymbol{L}_i,\boldsymbol{M}_i$($\forall i\in \boldsymbol{Z}$)张成的子空间为 $\boldsymbol{g}_{14}$. 如前所述 $\boldsymbol{M}_i$($\forall i\in \boldsymbol{Z}$)张成的子空间为 $\boldsymbol{g}_3$.

定理 10　$\boldsymbol{g}_{14}$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数，$\boldsymbol{g}_3$ 是 $\boldsymbol{g}_{14}$ 的理想，$\boldsymbol{g}_{14}$ 不是单李代数，也不是半单李代数.

证明　$\forall m,n\in \boldsymbol{Z}$，可验证

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{L}_n]=(n-m)\boldsymbol{L}_{n+m}$，

$[\boldsymbol{L}_m,\boldsymbol{M}_n]=n\boldsymbol{M}_{n+m}$，$[\boldsymbol{M}_m,\boldsymbol{M}_n]=\boldsymbol{0}$

从而 $\boldsymbol{g}_{14}$ 是 $\boldsymbol{g}$ 的无限维非交换子代数. 显然 $\boldsymbol{g}_3$ 是 $\boldsymbol{g}_{14}$ 的交换理想，$\boldsymbol{g}_{14}$ 不是单李代数，也不是半单李代数.

2 结 语

本文研究了扩张 Schrodinger-Virasoro 李代数部分结构问题.可以进一步研究这类李代数的中心和理想,及其全部自同构以及自同构群等结构问题.并可继续研究扩张 Schrodinger-Virasoro 李代数的表示.

参考文献:

[1] GAO Shoulan, JIANG Cuipo, PEI Yufeng. Structure of the extended Schrodinger-Virasoro Lie algebra (sb) over-tilde [J]. **Algebra Colluquium**, 2009, **16**(4): 549-566.

[2] TAN Shaobin, ZHANG Xiufu. Automorphisms and Verma moudules for generalized Schrodinger-Virasoro algebras [J]. **Journal of Algebra**, 2009, **322**: 1379-1394.

[3] 余德民,梅超群. 一类无限维半单李代数[J]. 系统科学与数学, 2008, **28**(9): 1101-1108.
YU Demin, MEI Chaoqun. A class of semi-simple Lie algebra [J]. **Journal of Systems Science and Mathematical Science**, 2008, **28**(9): 1101-1108. (in Chinese)

[4] 余德民,卢才辉. 李代数 $L(Z,f,\delta)$ 的特殊性质[J]. 数学进展, 2006, **35**(6): 707-711.
YU Demin, LU Caihui. Special property of Lie algebra $L(Z,f,\delta)$ [J]. **Advances in Mathematics**, 2006, **35**(6): 707-711. (in Chinese)

[5] 余德民,卢才辉. Virasoro 李代数的子代数若干结果[J]. 数学学报, 2006, **49**(3): 633-638.
YU Demin, LU Caihui. Results of Virasoro subalgebra [J]. **Acta Mathematica Sinica**, 2006, **49**(3): 633-638. (in Chinese)

[6] 余德民,卢才辉. Virasoro 李代数的子代数间的同构及生成元[J]. 系统科学与数学, 2008, **28**(1): 24-29.
YU Demin, LU Caihui. Isomorphism and generating sets of subalgebras of the Virasoro algebra [J]. **Journal of Systems Science and Mathematics Science**, 2008, **28**(1): 24-29. (in Chinese)

[7] 余德民,梅超群,郭晋云. 一些特殊项链李代数的同态[J]. 数学年刊, 2009, **30**(4): 551-562.
YU Demin, MEI Chaoqun, GUO Jinyun. Homorphisms of some special necklace Lie algebras [J]. **Chinese Annals of Mathematics**, 2009, **30**(4): 551-562. (in Chinese)

[8] XIA Chunguang, YOU Taijie, ZHU Liji. Structure of a class of Lie algebras of Block type [J]. **Communications in Algebra**, 2012, **40**(8): 3113-3126.

[9] XIA C G, WANG W. Derations and automorphisms of a Lie algebra of Block type [J]. **Algebra Colloquium**, 2013, **20**: 173-180.

[10] XIA Chunguang, ZHANG Ruibin. Unitary highest weight modules over Block type Lie algebra $B(q)$ [J]. **Journal of Lie Algebra**, 2013, **23**: 159-176.

Study of extension Schrodinger-Virasoro Lie algebra and some subalgebras

YU Demin, LI Di, CHAI Jialu, LUO Deren*

(College of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414000, China)

Abstract: The properties of infinite dimensional Lie algebra Schrodinger-Virasoro, which is a generalization of Virasoro Lie algebra are studied. The isomorphism and some properties of its Lie subalgebras are also studied. For example, Lie subalgebras $\boldsymbol{g}^{-}$, $\boldsymbol{g}^{0^{-}}$, and $\boldsymbol{g}^{-} \subset \boldsymbol{g}^{0^{-}} \subset \boldsymbol{g}$. Lie subalgebras $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$ of $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{g}_3$ is proved an infinite dimensional commutative ideal of $\boldsymbol{g}$, and then it is proved that Lie algebra Schrodinger-Virasoro is not a semi-simple Lie algebra or a simple Lie algebra.

Key words: Lie algebra; isomorphisms; ideal

(第60卷卷终)