

基于 Copula 函数的土石坝三维坝坡稳定可靠度分析

宋来福, 孔宪京, 徐斌*, 庞锐

(大连理工大学 水利工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 不完备概率信息条件下边坡稳定可靠度评价是岩土工程新兴的热点问题之一,其关键难点在于如何在不完备概率信息条件下有效地建立符合抗剪强度参数分布特征的联合概率分布模型.在考虑堆石料非线性强度参数不完备概率信息条件下,采用 Copula 函数建立非线性强度参数联合分布模型,结合径向基神经网络(RBFN)提出了土石坝坝坡稳定系统可靠度分析智能响应面法,并通过实例验证了其可行性与有效性.最后,基于所建智能响应面,系统研究了 Copula 函数类型与样本数量对土石坝坝坡稳定系统可靠度的影响规律.

关键词: 相关性;不完备概率信息;可靠度;Copula;联合概率分布

中图分类号: TV641

文献标识码: A

doi: 10.7511/dllgxb202101013

0 引言

土石坝工程的安全性一直是坝工界关注的焦点,其中,坝坡稳定性是影响土石坝工程安全的主要问题之一^[1].在土石坝建设过程中存在大量的不确定性^[2-4],现有确定性分析方法无法解决对其不确定性认知的局限性.可靠度理论可以合理、系统地对各种不确定性进行定量分析,使岩土工程结构物设计、分析符合工程实际,近年来在边坡稳定分析领域受到高度重视并得到广泛应用^[5-7].目前,定量表征不确定性及减小不确定性的方法已成为岩土边坡包括土石坝坝坡稳定可靠度分析的研究热点.

岩土物理力学参数的不确定性是岩土工程不确定性的主要来源,合理表征岩土体参数的不确定性是岩土工程可靠度分析的关键.堆石料作为主要的筑坝材料,其非线性强度参数是影响土石坝坝坡稳定的关键指标^[8-12].因此,学术界将非线性强度参数作为随机变量对土石坝坝坡稳定可靠度进行了大量研究^[13-16].然而,目前的研究忽略了非线性强度参数间的相关性,将其作为独立的随机变量.大量试验研究表明^[17-21]:筑坝堆石料非线

性强度参数间存在显著的正相关性.因此,在土石坝坝坡稳定可靠度分析过程中,忽略了非线性强度参数间的相关性显然是不合理的,应充分考虑非线性强度参数间的相关性,建立符合非线性强度参数分布特征的联合概率分布模型(下文简称联合分布模型),即获取完备概率信息.但受经济、技术等条件的限制,土石坝工程试验数据有限,样本数量无法达到统计要求,仅可获得非线性强度参数的边缘分布函数与相关系数,即不完备概率信息.在不完备概率信息条件下,无法确定合理的非线性强度参数联合分布函数. Copula 函数为不完备概率信息条件下构造非线性强度参数联合分布函数提供了一种简单有效的途径,在岩土工程可靠度分析领域得到广泛应用^[22-27],如 Tang 等^[28]和 Li 等^[29]采用 Copula 函数对岩土结构系统的可靠度进行了研究;Xu 等^[30]基于 Copula 理论对地震边坡进行了三维可靠度分析;Pan 等^[31]基于 Copula 函数建立了隧道工程钻进工作面可靠度分析模型.目前,尚未见到关于筑坝堆石料非线性强度参数联合分布模型研究,鉴于 Copula 函数在建立岩土体参数联合分布模型方面的显著优

收稿日期: 2020-03-13; 修回日期: 2020-10-12.

基金项目: 国家重点研发计划资助项目(2017YFC0404904);国家自然科学基金资助项目(51979026,51779034,51679029).

作者简介: 宋来福(1985-),男,博士生, E-mail: songlaifu_jia@mail.dlut.edu.cn; 徐斌*(1981-),男,博士,副教授, E-mail: xubin@dlut.edu.cn.

势,有必要采用 Copula 函数对筑坝堆石料非线性强度参数联合分布模型进行研究,为准确评估土石坝坝坡稳定可靠度提供可靠的模型、数据支持,对于探索土石坝坝坡稳定可靠度分析具有重要的意义。

因此,本文在考虑堆石料非线性强度参数不完备概率信息条件下,采用 Copula 函数建立非线性强度参数联合分布模型,结合径向基神经网络(radial basis function network, RBFN)提出土石坝坝坡稳定系统可靠度分析智能响应面法,并通过与传统独立正态分布模型算例结果进行比较,分析基于 Copula 函数建立非线性强度参数联合分布模型开展土石坝坝坡稳定系统可靠度分析的必要性。最后,系统研究 Copula 函数类型与样本数量对土石坝坝坡稳定系统可靠度的影响规律。

1 基于 Copula 函数建立非线性强度参数联合分布模型

Copula 理论^[32]认为可以根据 N 个边缘分布函数和相关结构精确地建立 N 维联合分布函数模型。基于二维分布, Copula 函数定义为 $[0, 1]^2$ 空间中边缘分布为区间 $[0, 1]$ 的均匀分布^[33], 由 Sklar 定理^[32], 非线性强度参数 φ_0 和 $\Delta\varphi$ 的联合分布函数为

$$F(\varphi_0, \Delta\varphi) = C(F_1(\varphi_0), F_2(\Delta\varphi); \theta) = C(u_1, u_2; \theta) \quad (1)$$

式中: $u_1 = F_1(\varphi_0)$ 、 $u_2 = F_2(\Delta\varphi)$ 分别为非线性强度参数 φ_0 和 $\Delta\varphi$ 的边缘分布函数, θ 为 Copula 函数的参数。

非线性强度参数 φ_0 和 $\Delta\varphi$ 的联合概率密度函数为

$$f(\varphi_0, \Delta\varphi) = f_1(\varphi_0) f_2(\Delta\varphi) D(F_1(\varphi_0), F_2(\Delta\varphi); \theta) \quad (2)$$

式中: $f_1(\varphi_0)$ 、 $f_2(\Delta\varphi)$ 分别为非线性强度参数 φ_0 和 $\Delta\varphi$ 的边缘概率密度函数, $D(F_1(\varphi_0), F_2(\Delta\varphi); \theta)$ 为 Copula 函数的密度函数。

当已知 Copula 函数、非线性强度参数的边缘分布函数和边缘概率密度函数及 Copula 函数的参数, 由式(1)、(2)便可求出非线性强度参数的联合分布函数和联合概率密度函数。

Copula 函数的参数 θ 可由 Kendall 秩相关系数或 Pearson 线性相关系数求得^[33]。Kendall 秩

相关系数 R 的表达式为

$$R = \frac{2 \arcsin \theta}{\pi} \quad (3)$$

Copula 函数的参数为

$$R = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2; \theta) dC(u_1, u_2; \theta) - 1 \quad (4)$$

2 三维边坡稳定分析

二维边坡稳定分析方法概念明确、理论成熟、计算方便、应用广泛。然而,在实际工程中边坡失稳破坏均呈三维状态,三维边坡稳定分析能真实反映边坡宽度、边界条件等影响,可直接用于三维边坡坡面三量分布规律的研究。对于土石坝工程,宽河谷、低坝应用二维分析计算简便、保守安全。然而,随着施工技术的进步,土石坝坝体形状逐步向更窄、更高的方向发展,河谷三维效应明显,二维简化分析可能会造成分析结果不够准确^[34-36]。为避免二维模型分析存在的不足,真实反映土石坝的形状分布,获得更符合实际状态的分析成果,开展三维边坡稳定分析是十分必要的。

因此,本文在课题组开发的有限元分析软件 GEODYNA 基础上,开发了三维边坡稳定程序并进行了算例验证,为深入开展土石坝三维坝坡动力稳定可靠度研究提供有效的技术手段。

本文通过有限元分析得到单元应力的各个分量,得到滑动面上点的应力分量,再由滑动面上的应力分量,求得滑动面上的法向与切向应力。

一般空间问题包含 6 个应力分量、6 个变形分量和 3 个位移分量,且均为 x 、 y 、 z 坐标变量函数。已知任意一点 P 的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} , 斜面上任意一点 P 附近取一个平面 ABC , 过点 P 与平行于坐标面的 3 个平面形成一个微小四面体 $PABC$, 如图 1 所示, 当四

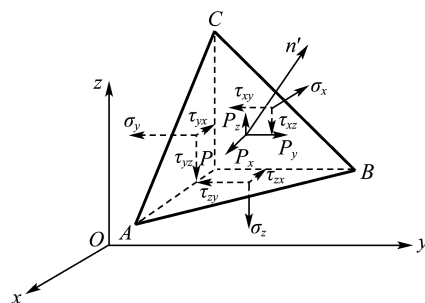


图1 四面体 $PABC$ 的应力状态

Fig. 1 Stress state of tetrahedron $PABC$

面体 $PABC$ 无限减小而趋于点 P 时,平面 ABC 上的应力为该斜面上的应力.

假设平面 ABC 外法线 n' 的方向余弦为 $\cos(n',x)=l, \cos(n',y)=m, \cos(n',z)=n$. 根据四面体的平衡条件 $\sum F_x=0, \sum F_y=0, \sum F_z=0$, 可得:

$$F_{P,x}=l\sigma_x+m\tau_{yx}+n\tau_{zx}$$

$$F_{P,y}=m\sigma_y+n\tau_{zy}+l\tau_{xy}$$

$$F_{P,z}=n\sigma_z+l\tau_{xz}+m\tau_{yz}$$

平面 ABC 的法向应力 σ 和切向应力 τ 分别为

$$\sigma=l^2\sigma_x+m^2\sigma_y+n^2\sigma_z+2mn\tau_{yz}+2nl\tau_{zx}+2lm\tau_{xy}$$

$$\tau^2=F_{P,x}^2+F_{P,y}^2+F_{P,z}^2-\sigma^2$$

由此可知任意斜面上安全系数的表达式为

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^N (c_i + \sigma_i \tan \varphi_i) S_i}{\sum_{i=1}^N \tau_i S_i}$$

式中: c_i, φ_i 分别为第 i 个单元体的黏聚力和内摩擦角; S_i 为滑弧穿过第 i 个单元的面积; σ_i, τ_i 分别为第 i 个单元滑弧面上的法向和切向应力; N 为求和数量.

滑动面搜索采用枚举法,即通过规定的球心空间范围和椭球体长短轴半径进行搜索,按规定顺序逐次进行计算,在所有滑动面中选取安全系数最小值为该边坡的安全系数最小值. 详细的分析方法及验证过程见文献[37].

3 基于 Copula 函数的土石坝三维坝坡稳定系统可靠度分析

3.1 土石坝三维坝坡稳定系统可靠度定义

土石坝坡体内可能存在大量潜在滑动面,坝坡可沿坡体内任意滑动面滑动. 因此,可将土石坝坝坡稳定问题定义为一个由大量潜在滑动面构成的串联系统可靠度问题. 串联系统整体失效概率 P_f 可以表示为

$$P_f \approx P(E(F_{s1}(X) < 1)) \cup P(E(F_{s2}(X) < 1)) \cup \dots \cup P(E(F_{sM}(X) < 1)) \quad (5)$$

式中: $P(\cdot)$ 为边坡失效事件的发生概率, $F_{si}(X)$ 为坝坡沿滑动面 i 发生失稳破坏的安全系数, $E(F_{si}(X) < 1)$ 为坝坡沿滑动面 i 发生失稳破坏的事件, M 为计算的坝坡失稳破坏的滑动面数量.

土石坝坝坡稳定系统失效概率的表达式为

$$P_{f,d} = P\{g(X) \leq 0\} = \int_{g(X) \leq 0} f_x(X) dx \quad (6)$$

式中: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_D\}$ 为影响坝坡稳定的随机变量, D 为随机变量的数量; $g(X) = F_s(X) - 1.0$, 为功能函数, $F_s(X)$ 为用确定性坝坡稳定分析方法解得的安全系数; $f_x(X)$ 为联合概率密度函数. 但是,联合概率密度函数求解十分困难,只可近似求解,计算结果存在较大的误差. 因此,工程中多采用 Monte-Carlo 法(MCS),其基本表达式为

$$\hat{P}_{f,d} = \frac{N_f}{N_s} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^M F_{si}(X) \quad (7)$$

式中: $\hat{P}_{f,d}$ 为 $P_{f,d}$ 的近似值, N_s 为抽样模拟总次数, N_f 为失稳破坏发生的总次数.

3.2 土石坝三维坝坡稳定系统可靠度分析智能响应面法

Monte-Carlo 法(MCS)概念清晰、明确,但需要进行大量的确定性计算,时间成本高、效率低. 为了提高计算效率、保证计算精度,本文提出了土石坝坝坡稳定系统可靠度分析的智能响应面法. 该方法适应能力强,容错性高,且具有更大灵活性和强非线性拟合方法,计算精度高,并在二维边坡可靠度分析中得到了很好的验证、应用^[38-41].

智能响应面法采用径向基神经网络(RBFN)数学模型建立响应面. RBFN 是前馈反向传播神经网络,一般包含 3 个部分:输入层、隐含层、输出层. 图 2 展示了一个结构为 $d-k-p$ 的 RBFN,其中 d 为输入数量, k 为隐藏单元数量, p 为输出数量. $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_d)^T \in \mathbf{R}^d$ 为网络输入向量; $\mathbf{W}$ 为权值矩阵, $\mathbf{W} \in \mathbf{R}^{k \times p}$; $b_1, b_2, \dots, b_p$ 为输出单元的偏移量; $\mathbf{Y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p)^T \in \mathbf{R}^p$ 为网络输出向量; $f_i(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|)$ 为第 i 个径向基函数中心,多采用高斯函数:

$$\varphi(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2A}\right) \quad (8)$$

式中: A 为径向基函数的扩展常数,反映了函数图像的宽度.

RBFN 选定单元 j 的最终输出可以表示为

$$y_j = \sum_{h=1}^k w_{jh} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_h\|^2}{2A}\right) + b_j \quad (9)$$

其中 w_{jh} 为输出层的权重.

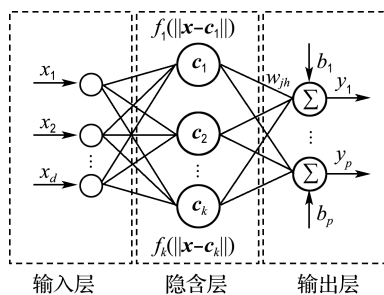


图 2 RBFN 结构

Fig. 2 Structure of the RBFN

3.3 基于 Copula 函数的土石坝三维坝坡稳定系统可靠度分析框架

本文借助 MATLAB 程序, 基于 Copula 函数与智能响应面法计算土石坝三维坝坡稳定系统失效概率. 主要分为 3 个步骤: (1) 建立符合原始数据分布特征的联合分布模型; (2) 确定坝坡稳定系统可靠度分析的智能响应面; (3) 进行土石坝三维坝坡稳定系统可靠度分析. 具体的分析流程如图 3 所示.

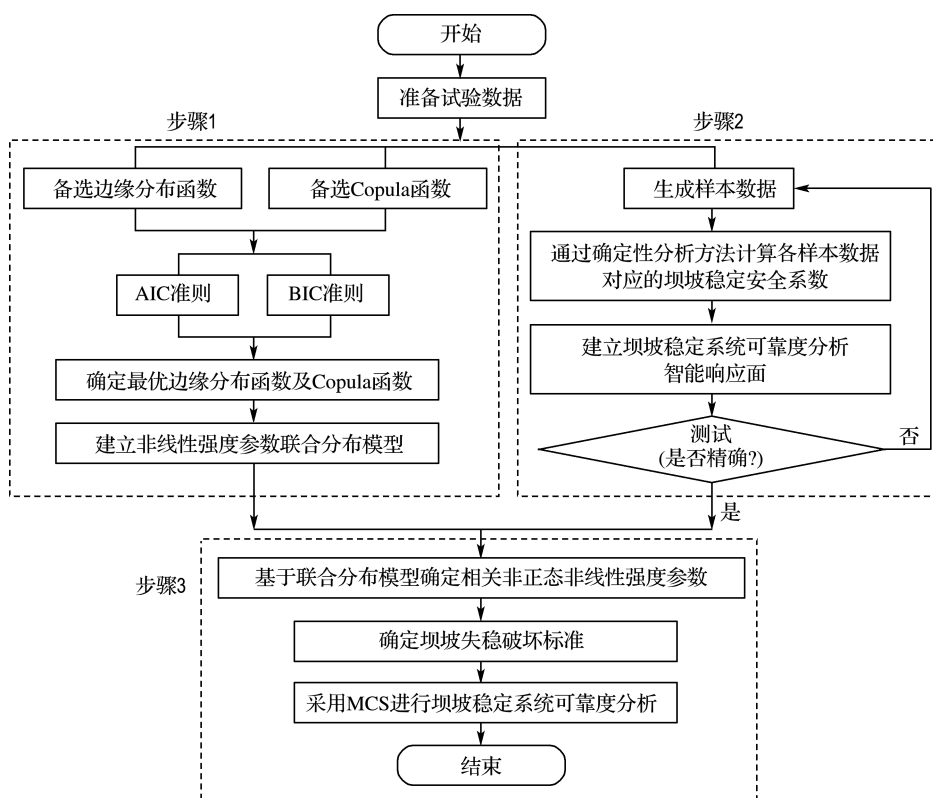


图 3 土石坝三维坝坡稳定系统可靠度分析流程

Fig. 3 Flow diagram for performing the reliability analysis of the 3D rockfill dam slope stability system

4 算例分析

4.1 计算模型

本文将面板堆石坝作为分析对象, 建立了高度为 200 m 的计算模型. 坝顶宽 16 m, 上、下游坝坡系数分别为 1.4、1.6, 面板厚度为 $0.3 + 0.0035H$ (H 为坝高), 大坝分层填筑, 蓄水高度为 175 m, 下游无水. 面板和堆石料间设置接触面单元.

计算模型共计 80 573 个节点, 75 980 个单元, 包括坝体、两侧山体及基岩, 在基岩底部及四周山体施加约束, 分析静力荷载作用下土石坝三

维坝坡稳定性, 有限元模型如图 4 所示.

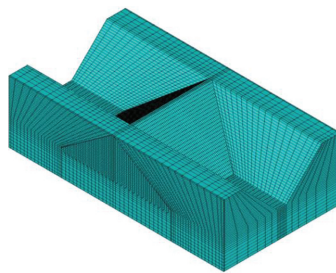


图 4 面板堆石坝有限元模型

Fig. 4 FE model of the concrete faced rockfill dam

4.2 建立堆石料非线性强度参数数据库

足够的样本数量是进行数据统计分析的基础,土石坝工程多为小样本数据,无法达到统计要求.为准确表征堆石料非线性强度参数的概率分布类型与相关性特征,本文参考类似工程的试验资料,详细汇总了国内外 124 座土石坝工程相关信息,得到 767 组堆石料非线性强度参数数据(如图 5 所示),为建立准确的堆石料非线性强度参数联合分布模型提供重要的数据支持.因试样及试验误差等众多因素的影响,统计的数据中可能存在异常点,本文选用 3σ 法则对异常点进行剔除,得到 755 组有效数据.其他材料参数如表 1 所示.

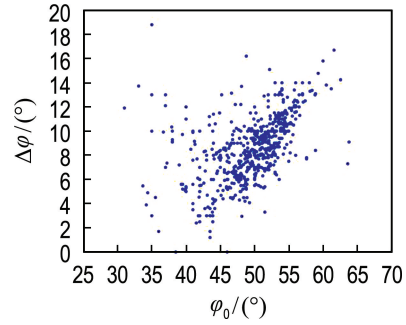


图 5 堆石料非线性强度参数数据
Fig. 5 Nonlinear strength parameters data of rockfill materials

表 1 材料参数

Tab. 1 Material parameters

材料	密度/(kg·m ⁻³)	加载模量系数	加载模量指数	破坏比	体积模量系数	体积模量指数	弹性模量/Pa	泊松比
堆石料	2 150	1 100	0.35	0.82	600	0.1	—	—
面板	2 400	—	—	—	—	—	2.55×10 ¹⁰	0.167

4.3 建立堆石料非线性强度参数联合分布模型

4.3.1 最优边缘分布函数 为了能够合理且全面地涵盖堆石料非线性强度参数的最优概率分布类型,本文选取表 2 所示 5 种边缘分布函数,结合 AIC^[42]与 BIC^[43]准则确定最优边缘分布函数.结果如表 3 所示,由表可知,堆石料非线性强度参数 φ_0 、 $\Delta\varphi$ 最优边缘分布类型分别为威布尔分布与截尾正

态分布.图 6 给出了基于原始数据拟合的 5 种不同边缘分布概率密度曲线,显然,最优分布函数类型能够更好地拟合数据的分布特征,结果与表 3 一致.

4.3.2 最优 Copula 函数 数学上有多种 Copula 函数,鉴于堆石料非线性强度参数间存在显著的正相关性,因此,本文选择能够很好表征正相关性的 8 种 Copula 函数(如表 4 所示),采用 AIC 与 BIC

表 2 5 种备选边缘分布函数

Tab. 2 Five candidates for the marginal distribution function

分布类型	概率密度函数	概率分布函数	备注
截尾 正态	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}q} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-p}{q}\right)^2\right]$ $1-\Phi\left(\frac{0-p}{q}\right)$	$\Phi\left(\frac{x-p}{q}\right)-\Phi\left(\frac{0-p}{q}\right)$ $1-\Phi\left(\frac{0-p}{q}\right)$	$p=\mu$ $q=\sigma$
对数 正态	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}qx} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-p}{q}\right)^2\right]$	$\Phi\left(\frac{\ln x-p}{q}\right)$	$p=\ln \frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2/\mu^2}},$ $q=\sqrt{\ln\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)}$
截尾极值 I 型	$\frac{q \exp\{-q(x-p)-\exp[-q(x-p)]\}}{1-\exp[-\exp(pq)]}$	$\frac{\exp\{-\exp[-q(x-p)]\}-\exp[-\exp(pq)]}{1-\exp[-\exp(pq)]}$	$\mu=p+\frac{0.5772}{q}, \sigma^2=\frac{\pi^2}{6q^2}$
威布尔	$\frac{q}{p}\left(\frac{x}{p}\right)^{q-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{p}\right)^q\right]$	$1-\exp\left[-\left(\frac{x}{p}\right)^q\right]$	$\mu=p\Gamma\left(1+\frac{1}{q}\right),$ $\sigma^2=p^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{q}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{q}\right)\right]$
伽马	$\frac{p^qx^{q-1}}{\Gamma(q)} \exp(-px)$	$\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{px} t^{q-1} \exp(-t) dt$	$\mu=\frac{q}{p}, \sigma^2=\frac{q}{p^2}$

表 3 最优边缘分布函数识别结果

Tab. 3 Suitability results for the selection of the optimal marginal distribution function

判断准则	参数	均值	标准差	拟合值					最优分布类型
				截尾正态	对数正态	截尾极值 I 型	威布尔	伽马	
AIC	φ_0	49.62	4.70	4 477.0	4 535.8	5 197.0	4 467.0	4 512.5	威布尔分布
	$\Delta\varphi$	8.57	2.50	3 524.8	3 706.1	3 777.4	3 528.8	3 936.5	截尾正态分布
BIC	φ_0	49.62	4.70	4 486.3	4 545.1	5 206.2	4 476.2	4 521.8	威布尔分布
	$\Delta\varphi$	8.57	2.50	3 534.0	3 715.4	3 786.6	3 538.1	3 945.8	截尾正态分布

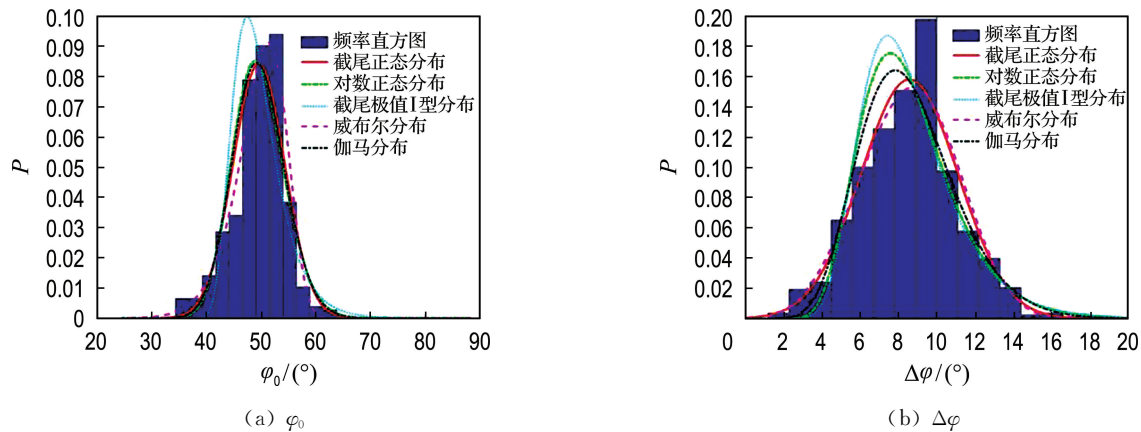


图 6 不同边缘分布函数拟合的概率密度曲线

Fig. 6 Probability density curves of different marginal distribution functions when fitted on the data

表 4 8 种 Copula 函数

Tab. 4 Eight types of Copula functions

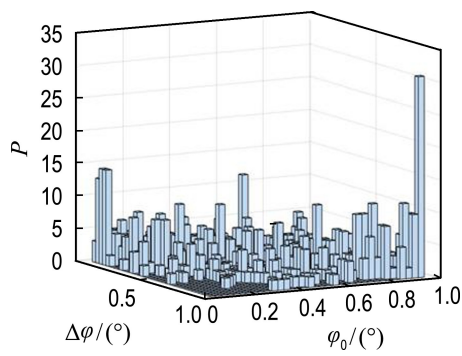
Copula 类型	Copula 分布函数 $C(u_1, u_2; \theta)$	Copula 密度函数 $D(u_1, u_2; \theta)$	生成 $\varphi_\theta(t, \theta)$	θ 取值范围
Gaussian	$\Phi_\theta(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \theta)$	$\frac{\varphi_2(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \theta)}{\varphi(\Phi^{-1}(u_1))\varphi(\Phi^{-1}(u_2))}$	—	$[-1, 1]$
t	$T_2(T_v^{-1}(u_1), T_v^{-1}(u_2); \theta, v)$	$\frac{t_2(T_v^{-1}(u_1), T_v^{-1}(u_2); \theta, v)}{t_v(T_v^{-1}(u_1))t_v(T_v^{-1}(u_2))}$	—	$[-1, 1]$
Plackett	$\frac{S - \sqrt{S^2 - 4u_1u_2\theta(\theta-1)}}{2(\theta-1)}$, $S = 1 + (\theta-1)(u_1 + u_2)$	$\frac{\theta[1 + (\theta-1)(u_1 + u_2 - 2u_1u_2)]}{\{[1 + (\theta-1)(u_1 + u_2)]^2 - 4u_1u_2\theta(\theta-1)\}^{3/2}}$	—	$(0, 1) \cup (1, \infty)$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left\{ 1 + \frac{[\exp(-\theta u_1) - 1][\exp(-\theta u_2) - 1]}{\exp(-\theta) - 1} \right\}$	$\frac{-\theta[\exp(-\theta) - 1]\exp[-\theta(u_1 + u_2)]}{\{[\exp(-\theta) - 1] + [\exp(-\theta u_1) - 1][\exp(-\theta u_2) - 1]\}^2}$	$-\ln \frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
Clayton	$(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$(1 + \theta)(u_1 u_2)^{-\theta-1} (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-2-1/\theta}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$(0, \infty)$
Gumbel	$\exp\{-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta}\}$	$\frac{\exp(-S^{1/\theta})(\ln u_1 \ln u_2)^{\theta-1}(S^{1/\theta} + \theta + 1)}{u_1 u_2 S^{2-1/\theta}}$ $S = (-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta$	$(-\ln t)^\theta$	$[1, \infty]$
CClayton	$u_1 + u_2 - 1 + (W_1^{-\theta} + W_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$, $W_i^{-\theta} = 1 - u_i$	$(1 + \theta)(W_1 W_2)^{-\theta-1} (W_1^{-\theta} + W_2^{-\theta} - 1)^{-2-1/\theta}$, $W_i = 1 - u_i$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$(0, \infty)$
No. 16	$\frac{1}{2}(S + \sqrt{S^2 + 4\theta})$, $S = u_1 + u_2 - 1 - \theta\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - 1\right)$	$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\theta}{u_1^2}\right)\left(1 + \frac{\theta}{u_2^2}\right)S^{-0.5}\left\{-S^{-1} \times \left[u_1 + u_2 - 1 - \theta\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - 1\right)\right]^2 + 1\right\}$, $S = \left[u_1 + u_2 - 1 - \theta\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - 1\right)\right]^2 + 4\theta$	$\left(\frac{\theta}{t} + 1\right)(1 - t)$	$[0, \infty)$

准则确定最优 Copula 函数,结果如表 5 所示,由表可知,最优 Copula 函数是 Plackett Copula 函数.图 7 展示了原始数据二维频率直方图与二维 Plackett Copula 函数概率密度函数图,显然,图 7(a)与(b)具有相似的分布形状,说明 Plackett Copula 函数能够准确地描述堆石料非线性强度

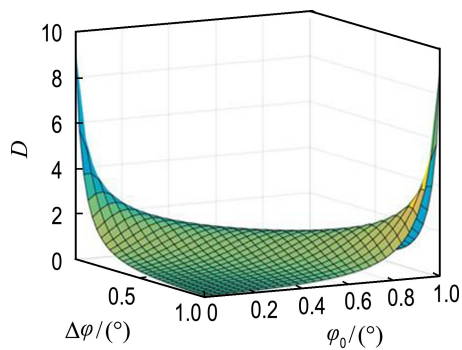
表 5 最优 Copula 函数识别

Tab. 5 Selection of the optimal Copula function

Copula 类型	相关参数(θ)	数值结果		最优 Copula 函数
		AIC	BIC	
Gaussian	0.670 2	-357.251 8	-352.626 4	Plackett Copula 函数
t	0.675 1	-456.612 0	-451.986 6	
Plackett	9.493 1	-459.507 7	-454.882 3	
Frank	5.175 7	-413.446 3	-408.820 9	
Clayton	1.756 2	-132.999 4	-128.347 0	
Gumbel	1.878 1	-455.067 0	-450.444 2	
CClayton	1.756 2	-163.767 0	-159.141 7	
No. 16	0.001 6	-238.478 9	-233.853 5	



(a) 数据频率直方图



(b) 二维 Plackett Copula 函数概率密度图

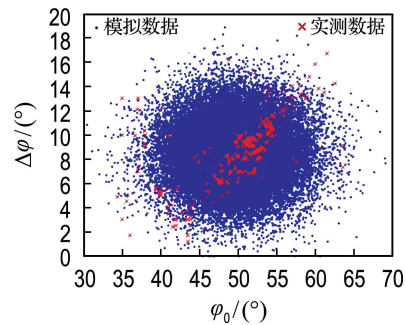
图 7 数据频率直方图及二维 Plackett Copula 函数概率密度图

Fig. 7 Frequency histogram for measured data and probability density plot for 2D Plackett Copula function

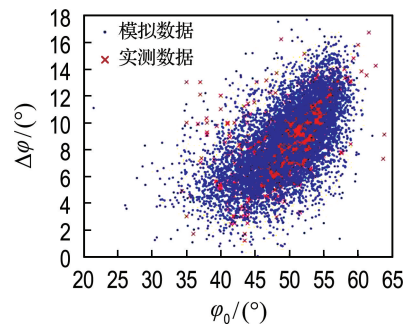
参数间的相关性.

4.3.3 堆石料非线性强度参数仿真数据模拟

确定最优边缘分布函数与 Copula 函数之后,由式(1)可得堆石料非线性强度参数联合分布函数.联合分布函数的主要作用是模拟符合堆石料分布特征的仿真数据,为土石坝坝坡稳定可靠度分析提供可靠的具有统计意义的参数样本.图 8 分别展示了传统独立正态分布模型与最优 Copula 函数(Plackett Copula 函数)构造的联合分布模型模拟的 30 000 组仿真数据.显然,传统独立正态分布模型仿真数据呈离散均匀分布,无法考虑变量间的边缘分布与相关性. Plackett Copula 函数能够较准确地拟合实测数据的分布特征,验证了表 5 结果的准确性.



(a) 独立正态分布



(b) Plackett Copula 函数

图 8 堆石料非线性强度参数的仿真数据

Fig. 8 Simulated rockfill material nonlinear strength parameters

4.4 结果分析

图 9 给出了不同安全系数下,传统独立正态分布与最优 Copula 函数建立的联合分布模型计算的土石坝三维坝坡失效概率.由图可知,传统独立正态分布模型忽略了非线性强度参数的相关性,计算的失效概率过小,高估了土石坝坝坡稳定

系统的可靠度.

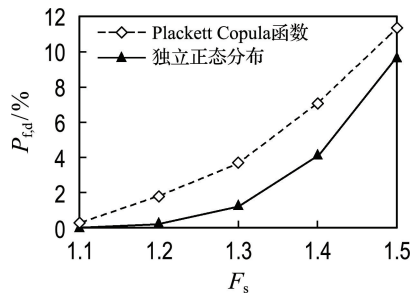


图 9 不同分布模型的坝坡系统失效概率

Fig. 9 Dam slope failure probabilities for the different distribution models

因此,在进行土石坝三维坝坡稳定系统可靠度分析时,应充分考虑非线性强度参数的相关性,基于 Copula 函数合理描述样本数据的边缘分布与相关结构,为准确评估土石坝坝坡稳定系统可靠度提供模型、数据支持.

5 结果讨论

不同的 Copula 函数具有不同的结构类型,对坝坡稳定系统失效概率有显著的影响.因此,合理选择 Copula 函数是分析坝坡稳定系统可靠度的重要环节.同时,岩土工程中多为小样本数据,样本数

量可能对参数的相关性等产生影响.因此,本文从 Copula 函数类型与样本数量两个方面对土石坝三维坝坡稳定系统可靠度的影响进行讨论.

5.1 Copula 函数类型对土石坝坝坡稳定系统可靠度的影响

Plackett Copula 函数是拟合堆石料非线性强度参数的最优 Copula 函数.因此,将 Plackett Copula 函数作为分析标准,表 6 列出了不同分布模型计算的失效概率相对误差.由表可知,不同 Copula 函数计算的失效概率具有明显的差异, Frank Copula 函数的相对误差最小, t Copula 函数的相对误差最大.相较不同 Copula 函数计算的结果,传统独立正态分布模型计算的失效概率误差远远大于标准值,平均相对误差达到 54.1%.

5.2 样本数量对土石坝坝坡稳定系统可靠度的影响

Genest 等^[44]指出样本数量对参数的相关性及置信区间影响显著.因此,本文将堆石料非线性强度数据随机分成 8、16、32、54、100、200、400 及 755 组共 8 种不同数量的样本数据,采用表 3、5 中的最优边缘分布函数和 Copula 函数模拟 30 000 组仿真数据,从模拟的非线性强度参数分布与失效概率两个方面进行讨论.

表 6 不同 Copula 函数计算的失效概率的相对误差

Tab. 6 Relative errors of the failure probabilities computed by different Copula functions

安全系数	失效概率相对误差								
	Gaussian	t	Plackett	Frank	Clayton	Gumbel	CClayton	No. 16	独立正态分布
1.1	0.270	0.770	0	0.100	0.230	0.230	0.170	0.570	0.930
1.2	0.080	0.120	0	0.030	0.060	0.060	0.120	0.160	0.800
1.3	0.020	0.014	0	0.010	0.016	0.015	0.054	0.043	0.590
1.4	0.010	0.040	0	0.010	0.014	0.013	0.033	0.012	0.320
1.5	0.010	0.010	0	0.001	0.006	0.006	0.014	0.009	0.064
平均	0.078	0.191	0	0.030	0.065	0.065	0.078	0.159	0.541

图 10 展示了不同样本数量模拟的非线性强度仿真数据的分布情况.样本数量不同时,仿真数据形状有显著的差别,样本数量低于 100 时,差别尤为显著,仿真数据点更多集中分布在形状很好的区域,这是因为样本数量过少,统计特征不显著,增加了数据采样的不确定性;随着样本数量的增加,仿真数据分布形状越来越接近,最后整体趋

于稳定.

表 7 列出了不同样本数量计算的坝坡稳定系统失效概率及相对误差(安全系数为 1.3).由表可知,当样本数量低于 100 时,失效概率的误差达到 20% 以上,样本数量越少,误差越大.样本数量对于坝坡稳定系统可靠度有重要的影响,这主要体现在最优边缘分布函数与 Copula 函数的识别

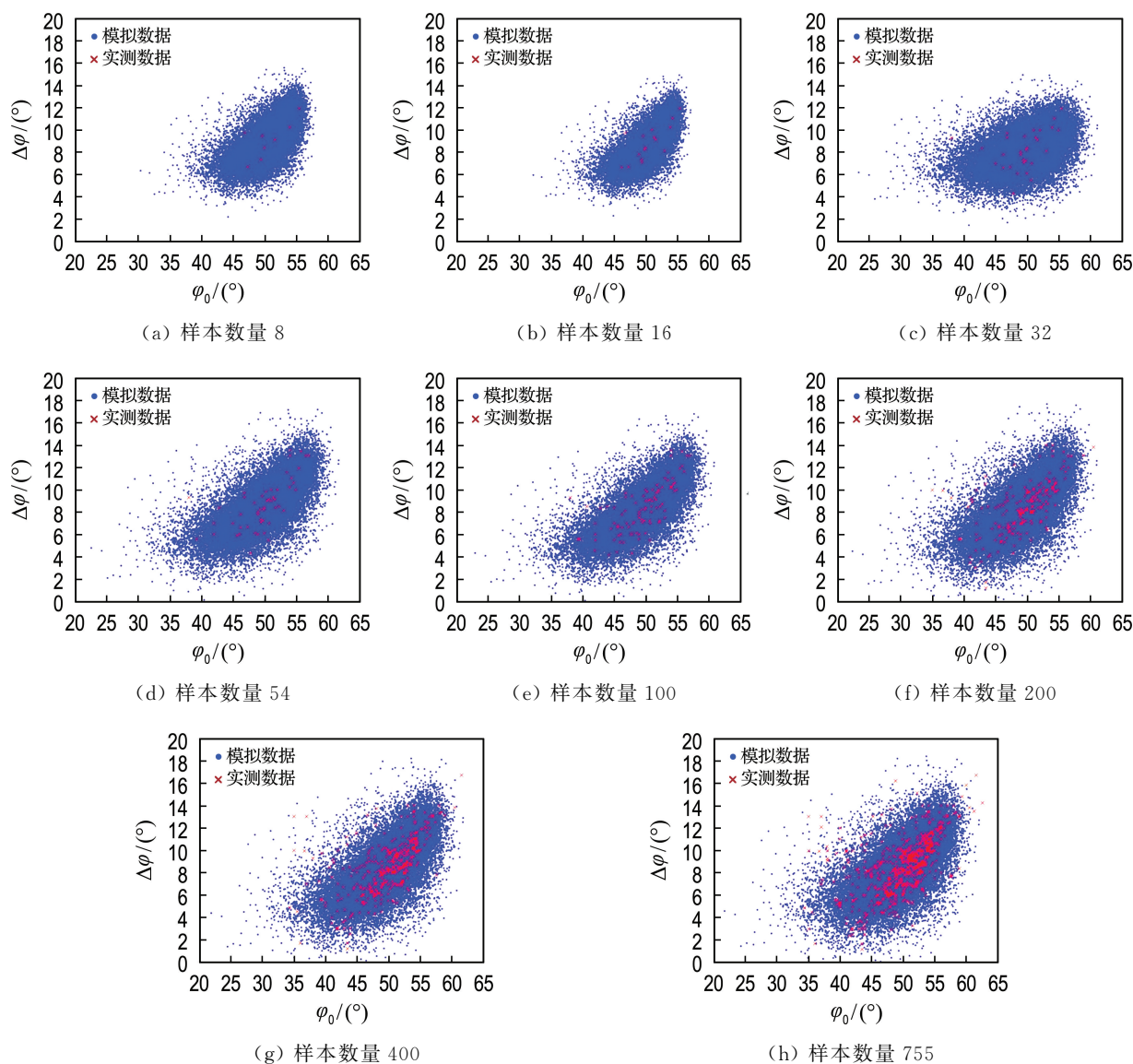


图 10 不同样本数量模拟的非线性强度仿真数据

Fig. 10 Simulated nonlinear strength parameters from different sample sizes

表 7 不同样本数量坝坡稳定系统失效概率
Tab. 7 Failure probability of dam slope stability system
obtained from different sample sizes

样本数量	失效概率	相对误差
8	0.000 3	0.999
16	0.001 1	0.963
32	0.019 0	0.360
54	0.023 7	0.202
100	0.025 5	0.141
200	0.028 3	0.047
400	0.029 2	0.017
755	0.029 7	0

不够准确,导致三维坝坡稳定系统失效概率计算误差过大.

6 结 论

(1)在不完备概率信息条件下,Copula 函数能够合理表征堆石料非线性强度参数的相关非正态分布特征,可有效地建立堆石料非线性强度参数联合分布模型,为土石坝坝坡稳定系统可靠度分析提供可靠的具有统计意义的参数样本,对于准确评估土石坝工程安全具有重要的工程意义.

(2)传统独立正态分布模型忽略了堆石料非线性强度参数的相关非正态分布特征,计算的失

效概率偏小,高估了坝坡稳定系统的可靠度.因此,在进行土石坝坝坡稳定系统可靠度分析时应充分考虑堆石料非线性强度参数间的相关非正态分布特性.

(3) Copula 函数类型与样本数量对土石坝坝坡稳定系统可靠度结果有显著的影响,因此,在进行土石坝坝坡稳定系统可靠度分析时,应尽可能多地统计试验数据,选择能够表征堆石料非线性强度参数的最优 Copula 函数,提高坝坡稳定系统失效概率的计算精度.

参考文献:

- [1] 张明, 刘金勇, 麦家煊. 土石坝边坡稳定可靠度分析与设计 [J]. 水力发电学报, 2006, **25**(2): 103-107.
ZHANG Ming, LIU Jinyong, MAI Jiaxuan. Reliability analysis and design of slope stability of earth-rock dam [J]. **Journal of Hydroelectric Engineering**, 2006, **25**(2): 103-107. (in Chinese)
- [2] WU Zhenyu, CHEN Jiankang, LI Yanling, *et al.* An algorithm in generalized coordinate system and its application to reliability analysis of seismic slope stability of high rockfill dams [J]. **Engineering Geology**, 2015, **188**: 88-96.
- [3] 孔宪京, 宋来福, 徐斌, 等. 基于 Copula 函数的堆石料非线性强度参数相关性及分布模型研究 [J]. 岩土工程学报, 2020, **42**(5): 797-807.
KONG Xianjing, SONG Laifu, XU Bin, *et al.* Correlation and distribution model for nonlinear strength parameters of rockfill based on Copula function [J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2020, **42**(5): 797-807. (in Chinese)
- [4] 吴震宇, 陈建康, 许唯临, 等. 高堆石坝非线性强度指标坝坡稳定可靠度分析方法研究及工程应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(1): 130-137.
WU Zhenyu, CHEN Jiankang, XU Weilin, *et al.* Research on methodology of reliability analysis of high rockfill dam slope stability using nonlinear strength indexes and its engineering application [J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2009, **28**(1): 130-137. (in Chinese)
- [5] SILVA F, LAMBE T W, MARR W A. Probability and risk of slope failure [J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2008, **134**(12): 1691-1699.
- [6] LOW B K. Reliability analysis of rock slopes involving correlated nonnormals [J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2007, **44**(6): 922-935.
- [7] LI Dianqing, CHEN Yifeng, LU Wenbo, *et al.* Stochastic response surface method for reliability analysis of rock slopes involving correlated non-normal variables [J]. **Computers and Geotechnics**, 2011, **38**(1): 58-68.
- [8] PENMAN A D M. Shear characteristics of a saturated silt, measured in triaxial compression [J]. **Géotechnique**, 1953, **3**(8): 312-328.
- [9] BISHOP A W, WEBB D L, LEWIN P I. Undisturbed samples of London clay from the ashford common shaft: strength - effective stress relationships [J]. **Géotechnique**, 1965, **15**(1): 1-31.
- [10] PONCE V M, BELL J M. Shear strength of sand at extremely low pressures [J]. **Journal of Soil Mechanics and Foundations Division**, 1971, **97**(4): 625-638.
- [11] MAKSIMOVIC M. Nonlinear failure envelope for soils [J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 1989, **115**(4): 581-586.
- [12] BAKER R. Nonlinear Mohr envelopes based on triaxial data [J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2004, **130**(5): 498-506.
- [13] 许春雷. 高土石坝坝坡稳定的可靠性研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 2010.
XU Chunlei. Study on reliability of slope stability of high rockfill dam [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2010. (in Chinese)
- [14] 张智超. 基于支持向量机的土石坝坝坡稳定可靠度分析 [D]. 南宁: 广西大学, 2014.
ZHANG Zhichao. Reliability analysis of earth-rock dams based on support vector machine [D]. Nanning: Guangxi University, 2014. (in Chinese)
- [15] 柴小兵. 300 m 级混凝土面板堆石坝变形可靠性分析 [D]. 北京: 北京交通大学, 2014.
CHAI Xiaobing. Reliability analysis of 300 m concrete faced rockfill dam deformation [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2014. (in Chinese)
- [16] 吴震宇, 陈建康. 土坡体系可靠度分析方法及在高

- 土石坝工程中的应用 [J]. 岩土力学, 2018, **39**(2): 699-704, 714.
- WU Zhenyu, CHEN Jiankang. Method of reliability analysis of stability for soil slope and its application in high soil and rockfill dams [J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2018, **39** (2): 699-704, 714. (in Chinese)
- [17] BARTON N, KJAERNSLI B. Shear strength of rockfill [J]. **Journal of the Geotechnical Engineering Division**, 1981, **107**(7): 873-891.
- [18] INDRARATNA B, WIJEWARDENA L S S, BALASUBRAMANIAM A S. Large-scale triaxial testing of grey wacke rockfill [J]. **Géotechnique**, 1993, **43**(1): 37-51.
- [19] 吕攀峰, 殷宗泽. 非线性强度参数对高土石坝坝坡稳定性的影响 [J]. 岩石力学与工程学报, 2004, **23**(16): 2708-2711.
- LV Qingfeng, YIN Zongze. Effect of strength nonlinearity on slope stability of high rockfill dam [J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, **23** (16): 2708-2711. (in Chinese)
- [20] 陈祖煜, 陈立宏, 孙 平. 非线性强度指标边坡稳定安全系数取值标准的研究 [J]. 水力发电, 2004, **30**(2): 17-20.
- CHEN Zuyu, CHEN Lihong, SUN Ping. An investigation on the allowable factors of safety in slope stability analysis using nonlinear strength parameters [J]. **Water Power**, 2004, **30**(2): 17-20. (in Chinese)
- [21] 陈立宏, 陈祖煜. 堆石非线性强度特性对高土石坝稳定性的影响 [J]. 岩土力学, 2007, **28**(9): 1807-1810.
- CHEN Lihong, CHEN Zuyu. Effect of nonlinear strength of rockfill on slope stability of high earth-rock dam [J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2007, **28**(9): 1807-1810. (in Chinese)
- [22] WANG Fan, LI Heng, ZHANG Qiling. Response-surface-based embankment reliability under incomplete probability information [J]. **International Journal of Geomechanics**, 2017, **17**(12): 06017021.
- [23] WU Xingzheng. Modelling dependence structures of soil shear strength data with bivariate copulas and applications to geotechnical reliability analysis [J]. **Soils and Foundations**, 2015, **55**(5): 1243-1258.
- [24] WANG Fan, LI Heng. Stochastic response surface method for reliability problems involving correlated multivariates with non-Gaussian dependence structure: Analysis under incomplete probability information [J]. **Computers and Geotechnics**, 2017, **89**: 22-32.
- [25] UZIELLI M, MAYNE P W. Serviceability limit state CPT-based design for vertically loaded shallow footings on sand [J]. **Geomechanics and Geoengineering**, 2011, **6**(2): 91-107.
- [26] JIANG C, ZHANG W, WANG B, *et al.* Structural reliability analysis using a copula-function-based evidence theory model [J]. **Computers and Structures**, 2014, **143**: 19-31.
- [27] WANG Fan, LI Heng. System reliability under prescribed marginals and correlations: Are we correct about the effect of correlations? [J]. **Reliability Engineering and System Safety**, 2018, **173**: 94-104.
- [28] TANG Xiaosong, LI Dianqing, RONG Guan, *et al.* Impact of copula selection on geotechnical reliability under incomplete probability information [J]. **Computers and Geotechnics**, 2013, **49**: 264-278.
- [29] LI Dianqing, ZHANG Lei, TANG Xiaosong, *et al.* Bivariate distribution of shear strength parameters using copulas and its impact on geotechnical system reliability [J]. **Computers and Geotechnics**, 2015, **68**: 184-195.
- [30] XU Zhaoxia, ZHOU Xiaoping. Three-dimensional reliability analysis of seismic slopes using the copula-based sampling method [J]. **Engineering Geology**, 2018, **242**: 81-91.
- [31] PAN Yue, ZHANG Limao, WU Xianguo, *et al.* Modeling face reliability in tunneling: A copula approach [J]. **Computers and Geotechnics**, 2019, **109**: 272-286.
- [32] SKLAR A. Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges [J]. **Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris**, 1959, **8**: 229-231.
- [33] NELSEN R B. **An Introduction to Copulas** [M]. New York: Springer, 2006.
- [34] DAI F C, LEE C F, DENG J H, *et al.* The 1786 earthquake-triggered landslide dam and subsequent dam-break flood on the Dadu River, southwestern China [J]. **Geomorphology**, 2005, **65** (3/4): 205-

- 221.
- [35] 黄润秋. 汶川地震地质灾害研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- HUANG Runqiu. **Geohazard Assessment of the Wenchuan Earthquake** [M]. Beijing: Science Press, 2009. (in Chinese)
- [36] LIN Meei-ling, WANG Kuo-lung. Seismic slope behavior in a large-scale shaking table model test [J]. **Engineering Geology**, 2006, **86**(2/3): 118-133.
- [37] SONG Laifu, XU Bin, KONG Xianjing, *et al.* Three-dimensional slope dynamic stability reliability assessment based on the probability density evolution method [J]. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2019, **120**: 360-368.
- [38] 康 飞, 李俊杰, 李守巨, 等. 边坡系统可靠度分析智能响应面法框架 [J]. 武汉大学学报(工学版), 2016, **49**(5): 654-660.
- KANG Fei, LI Junjie, LI Shouju, *et al.* Framework of intelligent response surface methods for system reliability analysis of slopes [J]. **Engineering Journal of Wuhan University**, 2016, **49**(5): 654-660. (in Chinese)
- [39] WANG Xu, KANG Fei, LI Junjie, *et al.* Inverse parametric analysis of seismic permanent deformation for earth-rockfill dams using artificial neural networks [J]. **Mathematical Problems in Engineering**, 2012, **2012**: 383749.
- [40] KANG Fei, LI Junjie. Artificial bee colony algorithm optimized support vector regression for system reliability analysis of slopes [J]. **Journal of Computing in Civil Engineering**, 2016, **30** (3): 04015040.
- [41] KANG Fei, HAN Shaoxuan, SALGADO R, *et al.* System probabilistic stability analysis of soil slopes using Gaussian process regression with Latin hypercube sampling [J]. **Computers and Geotechnics**, 2015, **63**: 13-25.
- [42] AKAIKE H. A new look at the statistical model identification [J]. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1974, **AC-19**(6): 716-723.
- [43] SCHWARZ G. Estimating the dimension of a model [J]. **The Annals of Statistics**, 1978, **6**(2): 461-464.
- [44] GENEST C, FAVRE A C, BÉLIVEAU J, *et al.* Metaelliptical copulas and their use in frequency analysis of multivariate hydrological data [J]. **Water Resources Research**, 2007, **43**(9): W09401.

Reliability analysis of 3D rockfill dam slope stability based on Copula function

SONG Laifu, KONG Xianjing, XU Bin*, PANG Rui

(School of Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: The evaluation of slope stability reliability under the condition of incomplete probability information is one of the most popular issues in geotechnical engineering. The key difficulty in the issue lies in how to effectively establish a joint probability distribution model that conforms to the distribution characteristics of shear strength parameters under the condition of incomplete probability information. Based on the incomplete probability information of the nonlinear strength parameters of rockfill, the joint distribution model of the nonlinear strength parameters is established using the Copula function. Combined with a radial basis function network (RBFN), an intelligent response surface method for reliability analysis of rockfill dam slope stability system is proposed. Its feasibility and validity are demonstrated through an example. The influences of Copula function type and sample number on the reliability of stability system of rockfill dam slope are systematically studied based on the constructed intelligent response surface.

Key words: correlation; incomplete probability information; reliability; Copula; joint probability distribution